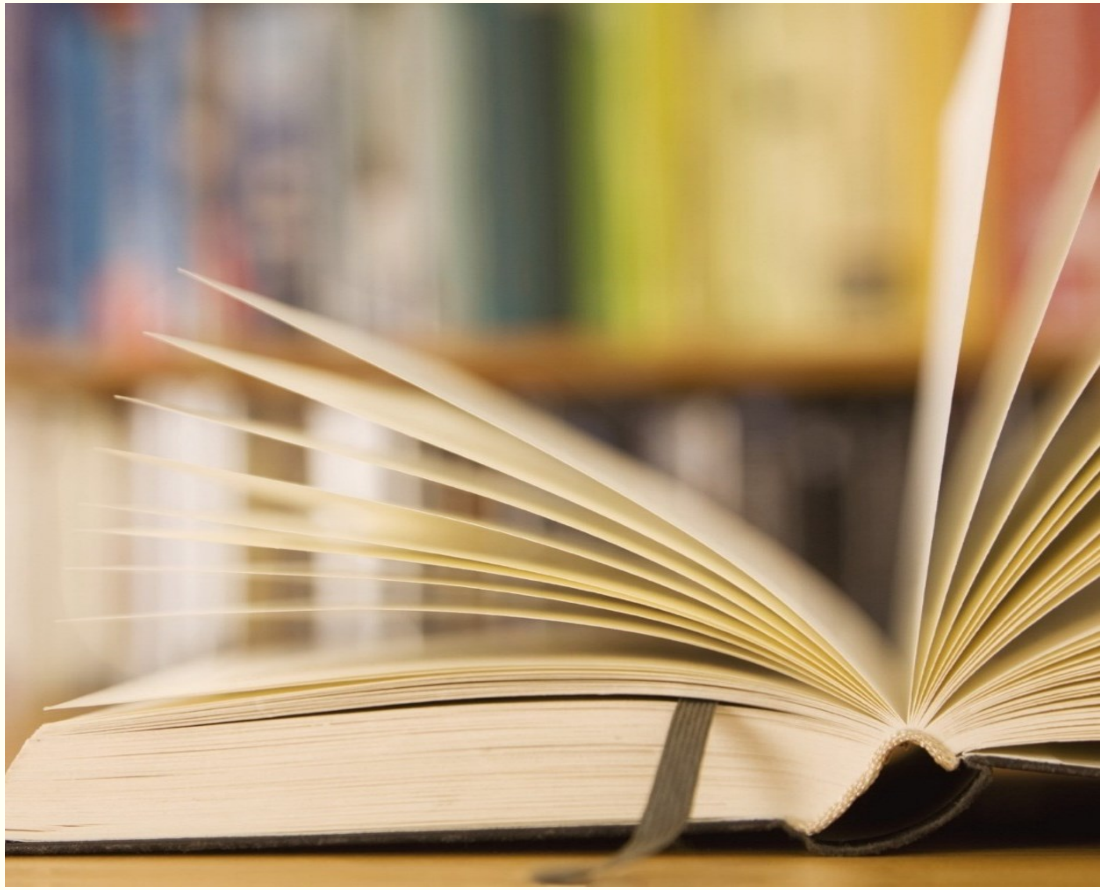
FONDAMENTI DI ANALISI PER L'INSEGNAMENTO

Prof. Roberto Capone
A.A. 2024/25
Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore



Fondamenti di analisi per l’insegnamento

- La nascita della geometria analitica (R. Descartes, P. Fermat).
- Il calcolo infinitesimale nelle opere di Newton (metodo delle flussioni, metodo dei primi ultimi rapporti, metodo delle serie, il “teorema fondamentale del calcolo integrale”, integrazione di funzioni, integrazione di equazioni differenziali).
- Il calcolo infinitesimale in Leibniz. Il confronto fra le Scuole di Leibniz e di Newton. Le premesse alla creazione del calcolo infinitesimale (Cavalieri, Torricelli, Barrow).
- Le serie nel Settecento (cenni).
- Evoluzione del concetto di funzione. La Théorie des fonctions analytiques (1797) di J.-L. Lagrange e l’algebrizzazione dell’analisi.
- Cauchy e l’inizio del processo di rigorizzazione dell’analisi: il Cours d’analyse (1821) e i Résumés des leçons données à l'Ecole royale polytechnique sur le calcul infinitésimal (1823).
- L'evoluzione dei concetti di limite, derivata e integrale nel XVIII e XIX secolo.

Crisi dell’approccio sintetico: tutto il mondo è numero

La scoperta delle geometrie non euclidee ha messo in crisi il convincimento del carattere assolto della geometria Euclidea.
In realtà, prima ancora di tali scoperte, un primo fondamentale elemento di crisi del metodo di Euclide (se non proprio del sistema geometrico di Euclide) si manifestò con il sistematico processo di algebrizzazione della geometria.

Tale processo, iniziato nella prima metà del 1300 con **Nicola d’Oresme**, trasformerà la geometria "sintetica" di Euclide, in cui si dimostrano teoremi e si tracciano figure, in quella che attualmente si chiama geometria "analitica" in cui tutti i problemi si riducono alla ricerca di radici di sistemi di equazioni algebriche.

Crisi dell’approccio sintetico: tutto il mondo è numero

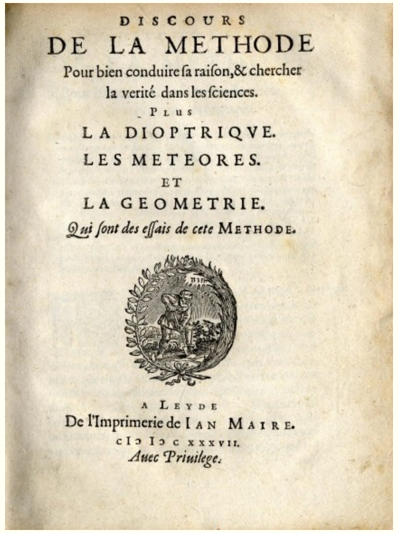
In un certo senso si passa dalle "dimostrazioni con figure" tipiche della geometria euclidea ai “calcoli” tipici della geometria analitica.
Infatti, come è noto, la geometria analitica si ottiene quando, fissati due assi e su di essi due unità di misura, si siano identificati

- i punti del piano con le relative coordinate,
- le rette con le equazioni di primo grado,
- le coniche con le equazioni di secondo grado e, più in generale, le curve con opportune equazioni implicite o esplicite.

Allora ad ogni operazione geometrica corrisponde una operazione di carattere analitico (cioè relativa ai numeri reali). Ad esempio l'intersezione di due curve si traduce nella risoluzione di un sistema di due equazioni.

Crisi dell'approccio sintetico: tutto il mondo è numero

Concorsero a tale processo di algebrizzazione scienziati e filosofi come Fermat e Cartesio. In particolare è interessante esaminare il libro di Cartesio La Geometria che è una delle appendici del famoso Discorso sul Metodo del 1637. La Geometria è costituita da tre parti, di cui la prima porta il titolo "Dei problemiche si possono costruire col solo uso di cerchi e di linee rette".



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↄ Iↄ c XXXVII.
Auec Priuilege.

Crisi dell’approccio sintetico: tutto il mondo è numero

Si deve tenere conto che il termine "costruzione" di un problema si deve intendere come "costruzione geometrica di un segmento che sia soluzione del problema" e quindi corrisponde a "risoluzione" di un problema. In questa prima parte si illustra come sia possibile elaborare un "calcolo geometrico" dei segmenti che è l'analogo geometrico della moderna teoria dei numeri reali.

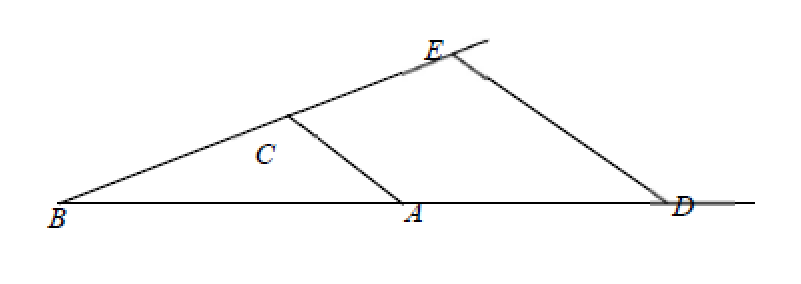
Come l'aritmetica è composta solo di quattro, cinque operazioni, la Somma, la Sottrazione, la Moltiplicazione, La Divisione e la Estrazione delle radici, che si può considerare una specie di Divisione, così anche in Geometria, per quanto riguarda le linee che si cercano . . .

Crisi dell’approccio sintetico: tutto il mondo è numero

Il brano prosegue spiegando come si possano fare le corrispondenti operazioni con i segmenti. Per la somma e la sottrazione di due segmenti la cosa è evidente. Dando per scontato che sia possibile muoverli a proprio piacimento, basta collocarli uno dopo l’altro per la somma o soprapporli per la differenza. Per quanto riguarda il prodotto e la divisione si utilizza invece la nozione di proporzione. Infatti supponiamo di volere moltiplicare i segmenti d e c. Allora basta trovare una costruzione geometrica per cui valga una proporzione del tipo $1 : d = c : x$ in quanto, essendo il prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi, in tale caso il segmento x rappresenterà il prodotto di d per c. D'altra parte è ben noto come ottenere grandezze proporzionali in geometria: basta considerare triangoli simili.

Calcolo dei segmenti in Cartesio

Utilizzando il teorema degli angoli simili Cartesio dice, con riferimento alla seguente figura,



. . . *sia per esempio BA l'unità: se bisogna moltiplicare BD per BC devo soltanto aggiungere i punti A e C, poi tracciare DE parallela a CA, e BE è il risultato di questa moltiplicazione.*

In altre parole si considerino due rette distinte per il punto B e due punti D e C su tali rette in modo che BD sia uguale a d e BC sia uguale a c. Sia inoltre A un punto della retta per B e D tale che BA sia unitario. Si tracci infine la parallela a AC per D e si denoti con E il punto di intersezione con la retta per B e C. Allora per la similitudine dei triangoli CBA e EBD risulterà che $1 : BD = BC : BE$. In conclusione BE è il prodotto cercato.

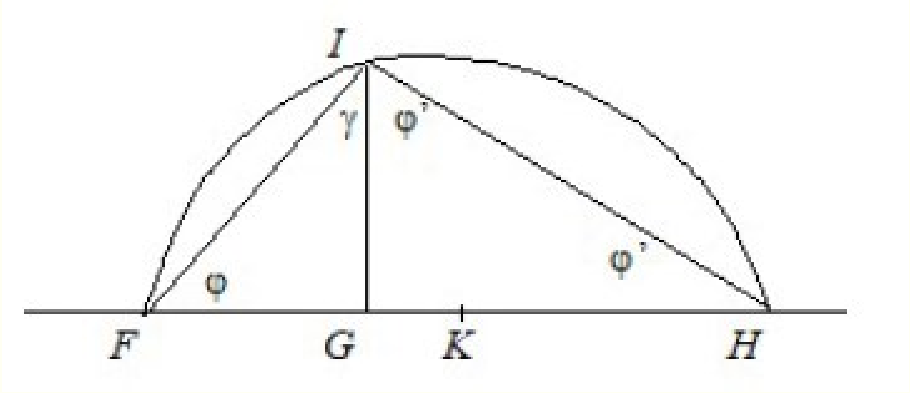
Calcolo dei segmenti in Cartesio

Esercizio. Calcolare il prodotto di 3 per 5 in modo grafico (cioè utilizzando riga e compasso).

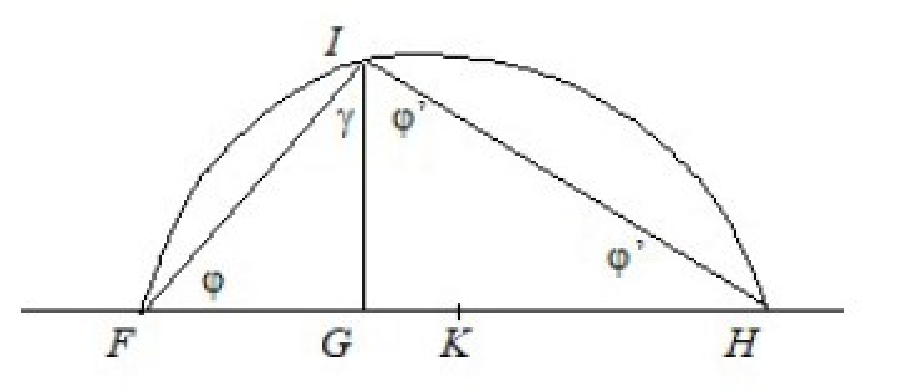
Esercizio. Calcolare 6/3 in modo grafico.

Calcolo dei segmenti in Cartesio

. . . Se bisogna estrarre la radice quadrata di GH, aggiungo in linea retta FG, che è l'unità, e dividendo FH in due parti uguali nel punto K, dal centro K traccio (la semicirconferenza) FIH, poi innalzando dal punto G una linea retta fino ad I ad angoli retti su FH, GI è la radice cercata.



Calcolo dei segmenti in Cartesio



Ad esempio se voglio trovare graficamente la radice 9 allora applico la seguente procedura:

1. Traccio un segmento GH di lunghezza 9
2. Prolungo a sinistra tale segmento con un segmento FG di lunghezza 1
3. Trovo il punto medio K del segmento FH
4. Traccio la circonferenza di centro K e diametro FH = 10
5. Alzo la perpendicolare dal punto G

Il segmento GI misurerà esattamente 3, cioè la radice di 9.

Calcolo dei segmenti in Cartesio

Esercizio. Trovare la radice di 7 in maniera grafica utilizzando cioè un righello ed un compasso.

Il *“Discorso sul Metodo”*

Il calcolo dei segmenti era alla base del metodo proposto da Cartesio, tuttavia si deve sottolineare che quello che Cartesio proponeva era una riduzione della geometria ai suoi elementi più semplici, i segmenti, e non una riduzione della geometria a manipolazione algebrica di numeri come avviene attualmente nella geometria analitica.

Tutti i problemi della geometria si possono facilmente ridurre a tali termini che in seguito per costruirli basta conoscere la lunghezza di alcune rette.

Tali elementi semplici si possono manipolare con operazioni simili a quelle dell'aritmetica e pertanto è più corretto dire che con Cartesio si ha una algebrizzazione della geometria che pone la nozione di operazione alla base di tutto.

Il *“Discorso sul Metodo”*

D'altra parte in Cartesio non vi era solo l'esigenza di ridurre la geometria a calcolo (di segmenti). Altrettanto importante era il processo inverso che consiste nella possibilità di interpretare ogni discorso algebrico in termini geometrici. In altre parole egli pensava si dovesse

- da un lato liberare la geometria dal ricorso obbligato alle figure che affaticavano inutilmente l'immaginazione
- da un altro lato dare significato alle operazioni dell'algebra per mezzo di una interpretazione geometrica.

Quanto poi all'analisi degli antichi e all'algebra dei moderni . . . , la prima è sempre siffattamente legata alla considerazione delle figure, che essa non può esercitare l'intelligenza senza affaticare di molto l'immaginazione; e, nella seconda, ci si è talmente assoggettati a certe regole e a certe cifre, che se ne è fatta un'arte confusa ed oscura, la quale tiene imbarazzato lo spirito, invece di (essere) una scienza che lo coltivi.

Il *“Discorso sul Metodo”*

Scopo dichiarato di Cartesio è la ricerca di un metodo generale in contrasto con il modo frammentario con cui procedevano i greci antichi quando si trattava di trovare una dimostrazione o di risolvere un problema. Se infatti è certamente un merito dei greci il fatto che ogni dimostrazione sia rigorosamente controllabile nei sui singoli passaggi, niente viene detto da essi circa il metodo che si deve seguire per poter trovare nuovi teoremi e dimostrazioni. Pertanto restiamo disarmati di fronte ad ogni problema nuovo che si presenta e dobbiamo ogni volta procedere per tentativi.

Il metodo proposto da Cartesio per la geometria consisteva:
- nell'indicare con lettere i dati e le incognite di un problema geometrico
- di tradurre le informazioni disponibili in equazioni
- nel semplificare, tramite calcoli algebrici, le equazioni quanto più possibile
- nel risolvere le equazioni risultanti da tale semplificazione in termini geometrici.

Il *“Discorso sul Metodo”*

Pertanto abbiamo un passaggio del tipo

Geometria → Algebra → Geometria

piuttosto che un annullamento della geometria.

Ad esempio dopo aver tradotto un problema geometrico in una equazione di secondo grado era opportuno semplificare al massimo tale equazione.
Giunti però alla forma più semplice possibile la risoluzione della equazione finale doveva essere di tipo grafico.

Pertanto la risoluzione grafica (detta ‘costruzione’) di semplici equazioni di secondo grado, in particolare il calcolo grafico di una radice quadrata, era un elemento essenziale della teoria di Cartesio.

Il *“Discorso sul Metodo”*

Ecco che cosa dice Cartesio nella sua Geometria

> *Così, volendo risolvere qualsiasi problema, si deve innanzi tutto considerarlo come risolto, e si devono dare dei nomi a tutte le linee che sembrano necessarie per la sua costruzione, sia quelle ignote, sia alle altre. Poi, senza fare alcuna differenza tra queste linee, note ed ignote, bisogna affrontare le difficoltà secondo l'ordine che mostra nella maniera più naturale in che modo tali linee siano in rapporto tra loro, fino a che non si sia trovato modo di esprimere una medesima quantità in due maniere diverse: ciò si chiama un'equazione (in una sola incognita) poiché i termini di una di queste due espressioni sono uguali a quelli dell'altra.*

Si noti che Cartesio tratta prevalentemente problemi che si traducono in una equazione ad una sola incognita e che l'idea di luogo geometrico, insieme dei punti le cui coordinate verificano una equazione a due variabili, non è presente nella sua opera se non in modo saltuario.

Il “*Discorso sul Metodo*”

Le teorie matematiche di Cartesio erano strettamente legate al suo sistema filosofico più generale. Basti pensare che il suo libro La Geometria non venne pubblicato come un trattato a sé stante ma come una delle tre appendici del "Discorso sul metodo" il cui titolo completo è "Discorso sul metodo per ben condurre la propria ragione e cercare la verità nelle scienze"
e che tali appendici avevano appunto il ruolo di illustrare il suo metodo filosofico generale. I precetti fondamentali di tale metodo erano:

- Il precetto dell'evidenza;
- Il precetto dell'analisi;
- Il precetto della sintesi;
- Il precetto del computo completo.

Il *“Discorso sul Metodo”*

Ed il primo era, di non accettare cosa alcuna per vera quando non la riconoscessi evidentemente per tale: cioè, di evitare studiatamente la precipitazione e la prevenzione; e di non accogliere nei miei giudizi nulla di più di ciò che si presentasse sì chiaramente e sì distintamente al mio spirito da non poter aver motivo alcuno di metterlo in dubbio.

Il secondo, di dividere ogni difficoltà, ch'io esaminassi, in parti elementari fino al limite del possibile e quanto sarebbe richiesto per trovarne la migliore soluzione.

Il terzo, di condurre per ordine i miei pensieri, cominciando dagli oggetti più semplici e più facili da conoscer, per salire a poco a poco e come per gradi alla conoscenza dei più complessi

. . .

E l'ultimo, di fare, in ogni argomento, enumerazioni così complete e verifiche così generali da essere sicuro di nulla omettere.

Dalla Géométrie al calcolo: il problema delle tangenti e le origini del calcolo infinitesimale

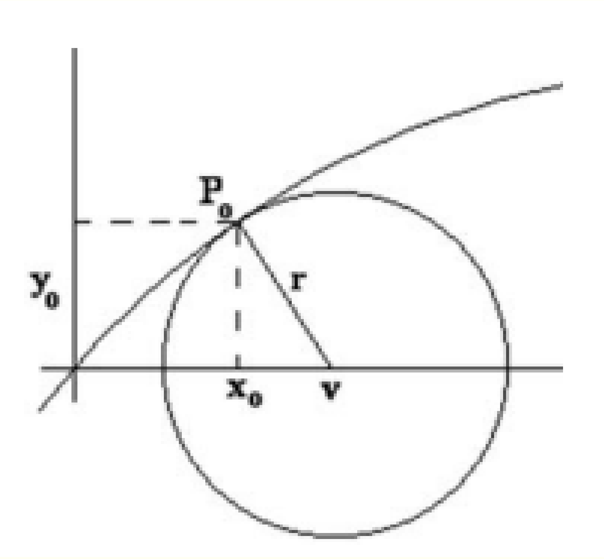
La pubblicazione nel 1637 del *Discours de la méthode*, di cui la Géométrie era l'ultimo dei saggi, segna un punto di svolta nella matematica moderna

Descartes aveva innovato radicalmente l'impianto classico della geometria delle curve, introducendo un nuovo oggetto: la curva-equazione, che gli aveva permesso di risolvere completamente il problema di Pappo, di dare un metodo universale per la soluzione geometrica delle equazioni, di porre in maniera generale e risolvere il problema delle tangenti «*il problema più utile e generale, non solo tra quelli che conoscono, ma anche tra quelli che lo mai desiderato di conoscere*»

Fu proprio questo problema e la soluzione che Descartes ne aveva proposto nella Geometrie a essere oggetto di studi fin dall'apparire dell'opera cartesiana

Dalla Géométrie al calcolo: il problema delle tangenti e le origini del calcolo infinitesimale

La soluzione di Descartes passa attraverso la considerazione della circonferenza tangente alla curva in un punto dato $P_0 = (x_0, y_0)$. Una volta trovata quest'ultima, il suo raggio per P_0 sarà normale alla curva e, per ricavare la tangente, non si dovrà fare altro che prendere la perpendicolare al raggio.



Descartes considera la circonferenza con centro nel punto v sull'asse delle ascisse e raggio s, dunque di equazione

$$(x - v)^2 + y^2 = r^2$$

e impone che essa abbia intersezione doppia in P_0 con la curva.

Descartes considera la circonferenza con centro nel punto v sull'asse delle ascisse e raggio s, dunque di equazione

$$(x - v)^2 + y^2 = r^2$$

e impone che essa abbia intersezione doppia in P_0 con la curva.

Dalla Géométrie al calcolo: il problema delle tangenti e le origini del calcolo infinitesimale

Analiticamente, se la curva ha equazione $P(x,y) = 0$ (con P polinomio di grado arbitrario) si elimina una delle variabili, ad esempio la y, dal sistema formato dalle equazioni della curva e della circonferenza e si richiede che il polinomio Q(x) così ottenuto abbia una radice doppia in x_0, ovvero che sia della forma

$$Q(x) = (x - x_0)^2 R(x)$$

con $R(x)$ da determinare.

Se il polinomio $P(x,y)$ è di grado n, il risultante Q(x) è di grado 2n e R(x) è di grado 2n-2. Uguagliando i coefficienti dei termini dello stesso grado si ottengono dunque 2n+1 equazioni in 2n+1 incognite, i 2n-1 coefficienti di R(x) e i due parametri della circonferenza v ed s.
Risolvendo questo sistema si ricavano questi due parametri, che determinano la circonferenza tangente.
Una volta trovata quest’ultima, la retta tangente è perpendicolare al raggio che passa per il punto P_0.

Dalla Géométrie al calc2olo: il problema delle tangenti e le origini del calcolo infinitesimale

Il metodo conduce a calcoli piuttosto intricati, anche nei casi più semplici.
Vediamo cosa avviene nella parabola di equazione $y = mx^2$
Scrivendo questo valore di y nella equazione della circonferenza, si ottiene:

$$(x - v)^2 + m^2x^4 = r^2$$

Ossia

$$m^2x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - r^2 = 0$$

Il polinomio a primo membro deve avere una radice doppia per $x = x_0$ e dunque deve essere nella forma:

$$(x - x_0)^2(ax^2 + bx + c)$$

che sviluppando diventa

$$ax^4 + (b - 2ax_0)x^3 + (c - 2bx_0 + ax_0^2)x^2(bx_0^2 - 2cx_0)x + cx_0^2$$

Dalla Géométrie al calcolo: il problema delle tangenti e le origini del calcolo infinitesimale

Confrontando termine a termine con l’equazione precedente, si ottiene:

$$a = m^2$$
$$b - 2ax_0 = 0$$
$$c - 2bx_0 + ax_0^2 = 1$$
$$bx_0^2 - 2cx_0 = -2v$$
$$cx_0^2 = v^2 - r^2$$

dalle quali si possono ricavare ad una ad una le cinque incognite a, b, c, v, r.

CONTINUA SU APPUNTI LEZIONE