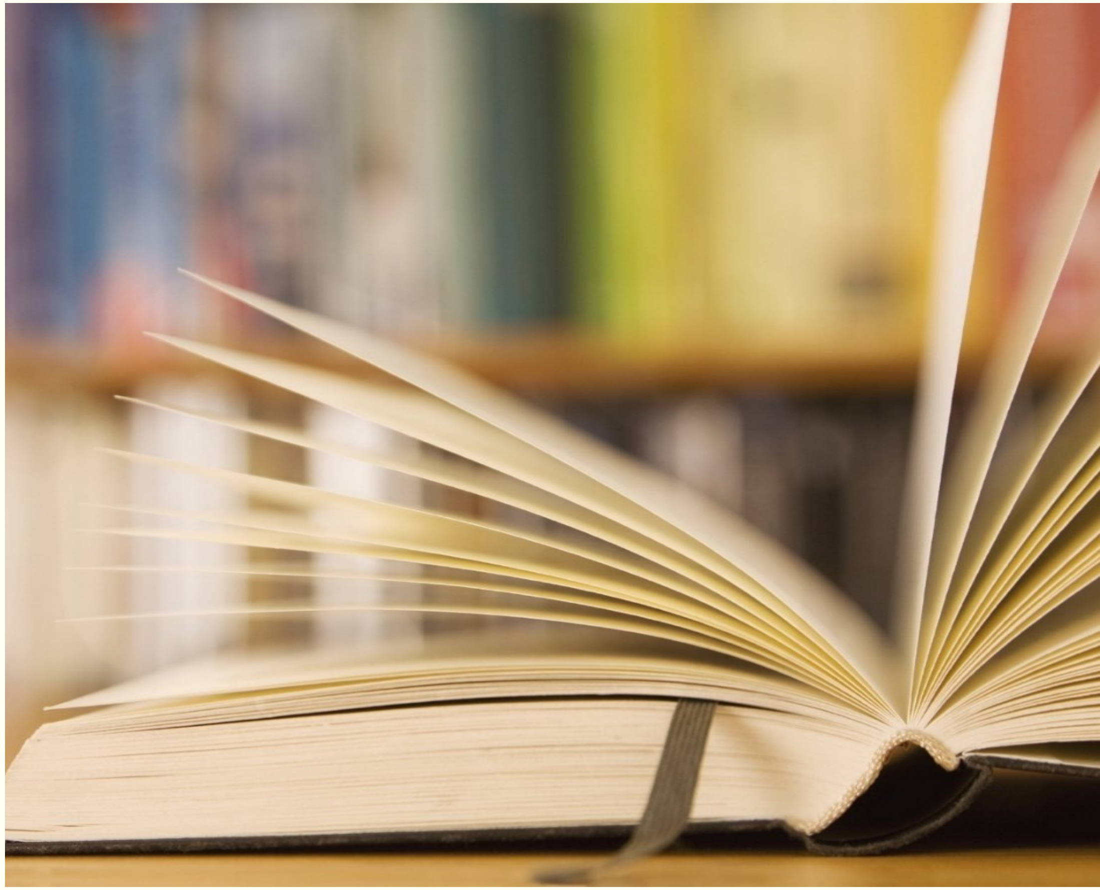
FONDAMENTI DI ANALISI PER L'INSEGNAMENTO

Prof. Roberto Capone
A.A. 2024/25
Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore



Fondamenti di analisi per l'insegnamento

- La nascita della geometria analitica (R. Descartes, P. Fermat).
- **Il calcolo infinitesimale nelle opere di Newton (metodo delle flussioni, metodo dei primi ultimi rapporti, metodo delle serie, il "teorema fondamentale del calcolo integrale", integrazione di funzioni, integrazione di equazioni differenziali).**
- **Il calcolo infinitesimale in Leibniz. Il confronto fra le Scuole di Leibniz e di Newton. Le premesse alla creazione del calcolo infinitesimale (Cavalieri, Torricelli, Barrow).**
- Le serie nel Settecento (cenni).
- Evoluzione del concetto di funzione. La Théorie des fonctions analytiques (1797) di J.-L. Lagrange e l'algebrizzazione dell'analisi.
- Cauchy e l'inizio del processo di rigorizzazione dell'analisi: il Cours d'analyse (1821) e i Résumés des leçons données à l'Ecole royale polytechnique sur le calcul infinitésimal (1823).
- L'evoluzione dei concetti di limite, derivata e integrale nel XVIII e XIX secolo.

La nascita del calcolo infinitesimale

Non è possibile fissare con precisione le origini del calcolo differenziale; tuttavia può affermarsi con sicurezza che il suo sorgere fu preparato dagli studî che si svilupparono, nel sec. XVII

- Problemi della tangente a una curva (Fermat, Descartes, Torricelli, Roberval, Barrow)
- Problema della velocità di un punto mobile (Torricelli, Roberval)
- Problemi dei massimi e minimi delle funzioni (Fermat)

Vanno indicate in modo speciale le ricerche di Pierie De Fermat sui massimi e minimi (Methodus ad disquirendam maximam et minimam, opera scritta nel 1638 e stampata a Tolosa nel 1679), nelle quali vien data una regola che sostanzialmente non differisce da quella del calcolo differenziale.

La nascita del calcolo infinitesimale

Il calcolo differenziale nacque nel momento in cui Leibniz e Newton introdussero una nuova nozione analitica, quella di differenziale e di flussione rispettivamente.
L'invenzione del calcolo integrale, invece, non richiedeva necessariamente l'introduzione di concetti nuovi. Le aree erano considerate degli oggetti di indagine definiti in modo sufficientemente chiaro dalla loro natura geometrica: ciò che occorreva era la scoperta che i problemi di quadratura richiedono un'operazione inversa rispetto a quella di differenziazione

Newton e Leibniz affidano alla differenziazione il ruolo principale e riducono l'integrazione ad esserne solo l'inverso.

La nascita del calcolo infinitesimale

Nonostante che la pubblicazione dei Principia di Newton sia avvenuta tre anni dopo di quella della Nova methodus di Leibniz, è certo che l'invenzione del metodo delle flussioni precedette quella del metodo differenziale. Leibniz inventò il suo calcolo, molto probabilmente, nel 1675; ma Newton si servi del suo fin dal 1666, e lo comunicò per lettera ad amici e scolari nel 1669 e negli anni seguenti.

Al principio del sec. XVIII, fu rivolta a Leibniz l'accusa di aver derivato il concetto fondamentale del suo metodo da quello di Newton, di cui si ritenne da taluni che egli fosse venuto a conoscenza attraverso le lettere inviate da Newton ai propri amici. Leibniz respinse sdegnosamente l'accusa; ma la controversia continuò, e in forma aspra, e non cessò neppure con la morte dei maggiori interessati.

La nascita del calcolo infinitesimale

Sulla dibattuta questione non è detta neppure oggi la parola decisiva. Però l'opinione prevalente è quella di ritenere vere le dichiarazioni di Leibniz e di considerare perciò come fra loro indipendenti le invenzioni del calcolo delle flussioni e del calcolo differenziale. Sia o non sia tale opinione la giusta, non può essere in nessun modo contestata a Leibniz la gloria di aver dato al calcolo differenziale una forma tale, con denominazioni e segni perfettamente appropriati, che da essa può ben dirsi essere derivata direttamente l'Analisi matematica moderna.

Il primo volgarizzatore delle idee e dei metodi di Leibniz fu il marchese de l'Hôpital, che pubblicò, nel 1696, la sua Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes (Parigi); ma il rapido affermarsi e svilupparsi dell'analisi infinitesimale di Leibniz fu dovuto soprattutto all'opera dei fratelli Giacomo e Giovanni Bernoulli, di L. Euler e di J.L. Lagrange.

La nascita del calcolo infinitesimale

Nonostante i brillanti risultati ottenuti nell'applicazione dei procedimenti di Leibniz ai più svariati problemi della matematica, restava alla base della teoria una grande incertezza ed oscurità, e le menti più acute erano assillate dal desiderio di precisare i principî fondamentali, liberandoli da ogni considerazione metafisica

Nella prima metà del sec. XIX Agostino Luigi Cauchy, dopo di aver precisata e parzialmente sistemata la teoria dei limiti, i cui fondamenti erano già stati posti nel sec. XVII da Pietro Mengoli (1625-1686) e da Jacopo Gregory (1638-1675), definì (in accordo col Mengoli) l'infinitesimo come una grandezza variabile avente per limite zero (Analyse Algébrique, Parigi 1821, p. 26). Così il calcolo differenziale veniva finalmente a trovare la sua base sicura e ad esser messo al riparo dagli attacchi che da varie parti gli erano stati mossi.

La nascita del calcolo infinitesimale

Precisati i principî, restava da compiersi una revisione accurata di tutti i procedimenti e di tutte le proposizioni dell'analisi infinitesimale ed a quest'opera critica si dedicarono, nella seconda metà del sec. XIX insigni matematici, fra i quali K. Weierstrass, R. Dedekind, P. Du Bois-Reymond, B. Riemann, G. Cantor, H. E. Heine, H. A. Schwarz, G. Darboux, Ch. Meray e, in Italia, U. Dini, G. Peano, C. Arzelà.

La nascita del calcolo infinitesimale

Isaac Newton (1642-1727)

“Io ebbi un’illuminazione per questo mio metodo dal modo di Fermat di tracciare le tangenti, però io lo resi generale applicandolo ad equazioni astratte direttamente ed inversamente”

Newton, 1665-66 biennium mirabilissimum

Isaac Newton (1642-1727)

" All'inizio dell'anno 1665 io scoprii il metodo di approssimazione delle serie e la regola per esprimere qualunque potenza di un binomio con una serie. Lo stesso anno in maggio trovai il metodo delle tangenti e, in novembre scoprii il metodo diretto delle flussioni; l'anno seguente, in gennaio trovai la teoria dei colori; nel maggio successivo ebbi accesso al metodo inverso delle flussioni. E nello stesso anno cominciai a pensare alla gravità. Tutto ciò avvenne nei due anni della peste 1665 e 1666"

1669 [1711], De Analysi per aequationes numero terminoruminfinitas (MPN II, pp. 206-247), problema delle quadrature
1671 [1736, 1740,1779] Tractatus de methodis serierum etfluxionum, (MPN III, pp. 32-353), trattato di calcolo infinitesimale
1687 Philosophiae naturalis principia mathematica
1691 [1704] De quadratura curvarum (MPN VII , VIII)

Newton, 1665-66 biennium mirabilissimum

"Considero qui le quantità matematiche non come costituite da particelle minime, ma come generate da un moto continuo: le linee si descrivono... mediante un moto continuo di punti, le superfici con il moto delle linee, i solidi con il moto delle superfici, gli angoli per rotazione dei lati, i tempi mediante un flusso continuo, e così via. Queste genesi hanno luogo nelle cose naturali e si vedono ogni giorno nel moto dei corpi" [De Quadratura, MPN VIII, p.122]

Newton considera le grandezze matematiche come quantità variabili al variare del tempo e le chiama fluenti $(x, y, z, \dots)$ e chiama flussioni le loro velocità di variazione $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots)$

$$y = x^3 \qquad \dot{y} = 3\dot{x}x^2 \qquad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3x^2 \quad \left[\frac{dy}{dx} = 3x^2\right]$$

Newton, 1665-66 biennium mirabilissimum

Newton non possiede il concetto di funzione, né dispone di una rigorosa definizione di velocità (come limite di un rapporto incrementale).

I due problemi fondamentali del calcolo, derivazione e integrazione, vengono formulati così:
- Data la relazione tra le fluenti, determinare quella tra le flussioni [derivazione]
- Data la relazione tra le flussioni, determinare quella tra le fluenti [calcolo di integrali e integrazione di equazioni differenziali]

Le due variabili di cui è data la relazione possono rappresentare quantità qualsiasi.
Tuttavia, Newton pensa ad esse come variabili con il tempo. Se quindi o è un "intervallo infinitamente piccolo di tempo", allora $\dot{x}o$ *e* $\dot{y}o$ *sono gli incrementi infinitesimi di x e di y, o i rispettivi momenti.*

Newton, 1665-66 biennium mirabilissimum

Nella lettera a Oldenburg (per Leibniz) del 24 ottobre 1676 , Newton enuncia questi due problemi con la frase crittografata:

" *6ae 2c d ae 13e 2f 7i 3l 9n 4o 4q 2r 4s 9t 12v x* " (LMS, I, p. 128)

che, decrittata significa
"Data aequatione quotcumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire et viceversa«

Il metodo delle flussioni è presentato dunque da Newton con immagini e terminologia tratte dal mondo fisico. Un carattere eminente del pensiero scientifico newtoniano consiste infatti nella stretta interazione fra matematica e fisica :"Il mio metodo -egli scrive- è derivato immediatamente dalla natura stessa".

Problema I, De methodis

Data la seguente relazione tra le fluenti $[F(x,y)=0]$, trovare la relazione fra le flussioni

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

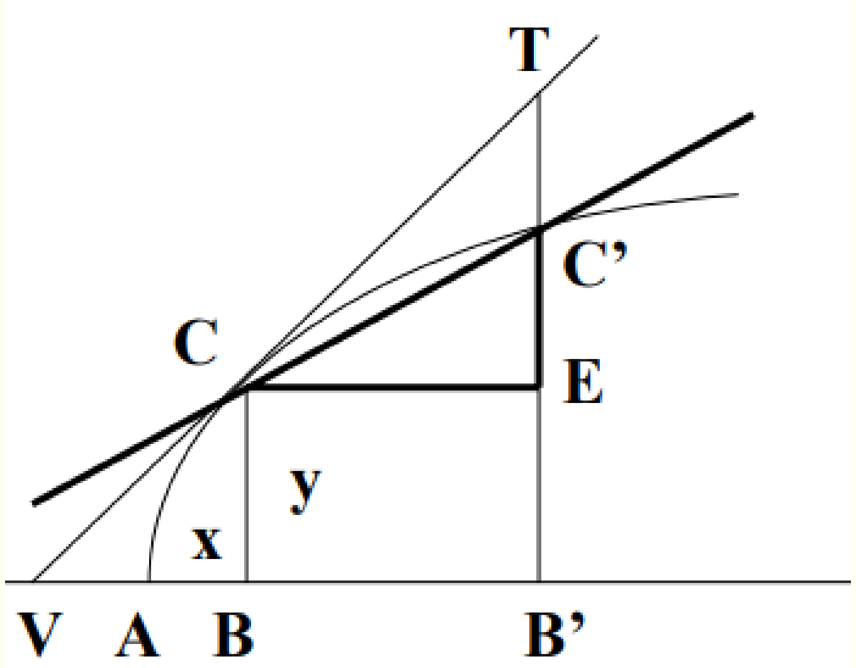
$$\begin{array}{cccc}
x^3 & -\ ax^2 & +\ axy & -\ y^3 \\
\multicolumn{4}{l}{\text{si moltiplica per}} \\
3\dfrac{\dot{x}}{x} & 2\dfrac{\dot{x}}{x} & 1\dfrac{\dot{x}}{x} & 0 \\
\hline
\multicolumn{4}{l}{3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
-\ y^3 & +\ axy & -\ ax^2 & +\ x^3 \\
\multicolumn{4}{l}{\text{si moltiplica per}} \\
3\dfrac{\dot{y}}{y} & 1\dfrac{\dot{y}}{y} & 0 & 0 \\
\hline
\multicolumn{4}{l}{-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x}
\end{array}$$

Sommando i risultati così ottenuti e uguagliando a zero si ricava la relazione cercata fra le fluenti e le flussioni :

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$$

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{3y^2 - ax}{3x^2 - 2ax + ay} \qquad \left[\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} = 0\right]$$

Determinazione della retta tangente



[De Quadratura, MPN VIII, p.122]

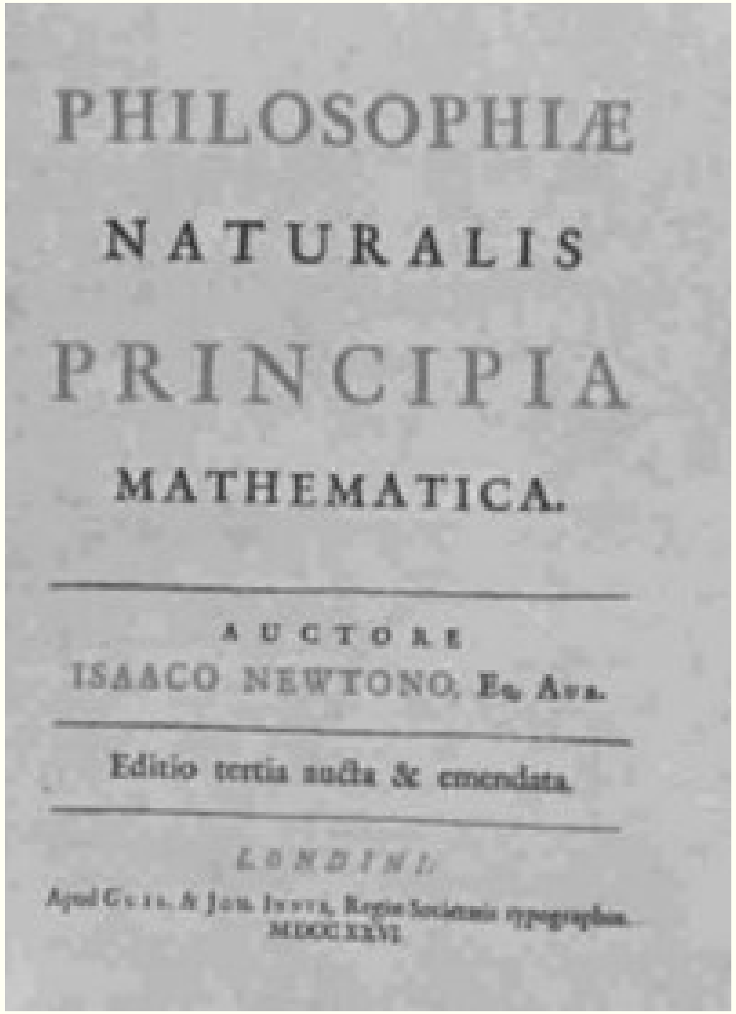
Per trovare la retta tangente alla curva in C, N. considera la secante CC'K.
Fa "muovere" l'ordinata B'C' fino a ritornare nella posizione BC, allora CC'K verrà a coincidere con la tangente VCT.
Il "triangolo evanescente" CC'E "nella sua ultima forma" diventerà simile al triangolo VCB

$$\frac{VB}{BC} = \frac{CE}{C'E}\Bigg|_{B'\to B} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$$

$$VB = y\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\left[=\frac{y}{y'}\right]$$

$$\left[\lim_{\substack{B'\to B\\ \Delta x\to 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right]$$

1687 Philosophiae naturalis principia mathematica


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

AUCTORE
ISAACO NEWTONO, Eq. Aur.

Editio tertia aucta & emendata.

LONDINI:
Apud Guil. & Joh. Innys, Regiae Societatis typographos.
MDCCXXVI.

I primi e ultimi rapporti [= intuitivo metodo dei limiti]
I primi e ultimi rapporti non sono i rapporti delle ultime quantità, ma "i limiti ai quali i rapporti delle quantità decrescenti si avvicinano sempre, illimitatamente, e ai quali si possono avvicinare per meno di qualunque differenza data, e che, però non possono mai superare, né toccare prima che le quantità siano diminuite all'infinito"
[Pala, p. 158]

L’area sotto una curva

[integrazione = antiderivazione]

1669 [1711], De analysi per aequationes numero terminorum infinitas

Regola I – Se $y = ax^{\frac{m}{n}}$ allora sarà $Area\ ABD = \frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$

Regola II – curve dove y è uguale alla somma di un numero finito di addendi del tipo precedente

Regola III - curve dove y è espressa da una serie di potenze serie ottenuta per divisione o estrazione di radice.

$$\frac{a^2}{b+x} = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2 x}{b^2} + \dots$$

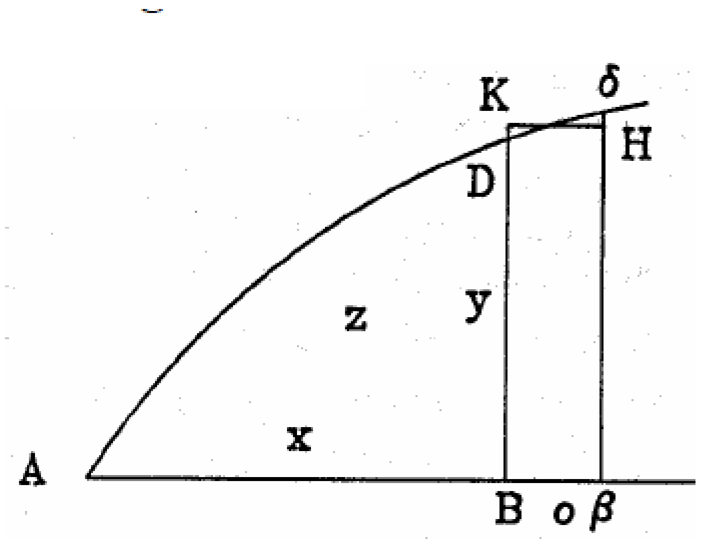
$$\begin{array}{l|l}
a^2 & b+x \\ \hline
-a^2 - \frac{a^2 x}{b} & \frac{a^2}{b} - \frac{a^2 x}{b^2} + \dots \\ \cline{1-1}
// \quad -\frac{a^2 x}{b} & \\
\quad\quad \ddots &
\end{array}$$

Con le serie Newton può risolvere il problema generale delle quadrature riducendolo all'integrazione di potenze.

L’area sotto una curva

[integrazione = antiderivazione]

Regola I – Se $y = ax^{\frac{m}{n}}$ allora sarà $Area\ ABD = \frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$



$o = B\beta$ incremento della x
$A\beta = x + o$ e $Area(A\beta\delta) = z + ov$
$B\beta\delta D$ incremento dell’area z

$z = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ $\qquad z^2 = \frac{4}{9} x^3$

$$(z + ov)^2 = \frac{4}{9}(x + 0)^2$$

$$o^2v^2 + 2zv = \frac{4}{9}o^3 + \frac{4}{3}x^2 o + \frac{4}{3}xo^2$$

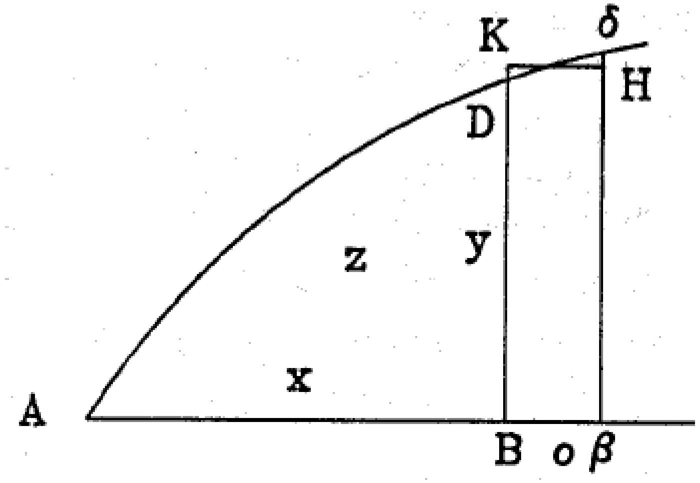
divide per o

$$ov^2 + 2zv = \frac{4}{9}o^2 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}xo$$

L'area sotto una curva

[integrazione = antiderivazione]

Regola I – Se $y = ax^{\frac{m}{n}}$ allora sarà $Area\ ABD = \frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$



$$erunt\ v\&\ y\ æquales\ \&\ termini\ per\ o\ multiplicati\ evanescent"“$$
$$Si\ jam\ supponamus\ B\ esse\ infinite\ parvam, sive\ o\ esse\ nihil,$$

$$2zy = \frac{4}{3}x^2$$
$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

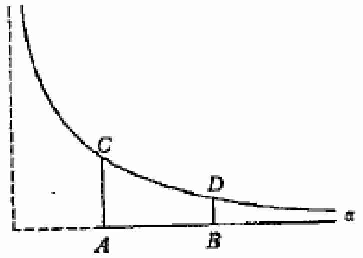
Al contrario:

Se $y = x^{\frac{1}{2}}$ allora l'area di ABD sarà $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

L'area sotto una curva

Exempla dividendo.[24] Sit $\frac{aa}{b+x}=y$, curvâ nempe existente Hyperbolâ: Jam ut æquatio ista a denominatore suo liberetur divisionem sic instituo—

$$
\begin{array}{l}
b+x\Big)\, aa+0\left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{bb}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}\ \&c\right. \\
\underline{aa+\frac{aax}{b}} \\
0-\frac{aax}{b}+0 \\
\underline{-\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{bb}} \\
0+\frac{aax^2}{bb}+0 \\
\underline{+\frac{aax^2}{bb}+\frac{aax^3}{b^3}} \\
0-\frac{aax^3}{b^3}+0 \\
\underline{-\frac{aax^3}{b^3}-\frac{a^2x^4}{b^4}} \\
0+\frac{aax^4}{b^4}\ \&c.
\end{array}
$$



Et sic vice hujus $y=\frac{aa}{b+x}$ nova prodit $y=\frac{aa}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}$ &c serie istâc infinitè continuatâ. Adeoqȝ per Reg 2^{am} erit area

$$ABDC=\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{2b^2}+\frac{a^2x^3}{3b^3}-\frac{a^2x^4}{4b^4}\ \&c$$

infinitæ etiam seriei, tamen cujus[25] termini pauci initiales erunt in usum aliquem [&] satis exacti cùm[26] x sit aliquoties minor quam b.[27]

L’area sotto una curva

Nelle mani di Newton le serie diventano un modo di esprimere e rappresentare tutte le funzioni allora conosciute, un modo che conserva la semplicità algoritmica di un polinomio.
L'abile intreccio del metodo delle serie e di quello delle flussioni permette a Newton di affrontare e risolvere nella loro massima generalità i problemi fondamentali dell'analisi infinitesimale.
Scrive infatti nell'Account:

> *" Se l'operazione non arriva a dare equazioni finite, Newton ricorre alle serie convergenti; per cui il suo metodo risulta incomparabilmente più universale di quello di Leibniz, che è limitato alle sole equazioni finite dato che egli non ha accesso al metodo delle serie infinite" [MPN, VIII, p.598]*

L’area sotto una curva

Il Problema II, "Data la relazione tra le flussioni trovare quella delle quantità fluenti" viene risolto da Newton nel *De methodis* nella sua generalità; egli considera sia il caso più semplice (già affrontato nel *De Analysi*) cioè l'integrazione di una funzione, sia il caso più generale dell’integrazione di un'equazione differenziale, utilizzando abilmente il metodo delle serie.

"Il fatto è che il metodo delle flussioni e delle serie chiude i problemi, in primo luogo quello dell'integrazione delle equazioni differenziali, ma non li esaurisce. Esso opera come una macchina frantumatrice: da una parte si introduce l'equazione da integrare e dall'altra viene fuori pezzo a pezzo la soluzione sotto forma dei successivi termini della serie.
Ma la serie non dà tutta la soluzione; infatti anche a prescindere da questioni di convergenza, il carattere delle serie è eminentemente locale: esse possono essere usate per operazioni che riguardino il comportamento della soluzione nell'intorno di un punto, ma non sono di nessun aiuto quando se ne vogliano studiare le proprietà qualitative e globali” [Giusti 1988, p. 14]

Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)

"…prima ancora di andare a scuola ero affascinato dalla storia e dai poeti; avevo iniziato a interessarmi alla storia non appena imparai a leggere e i versi poetici mi procuravano molta gioia, ma quando incominciai a conoscere la logica, mi sentii molto compiaciuto per la ripartizione e l'ordine del pensiero che vi scoprivo dentro. Cominciai subito a notare che all'interno doveva esserci qualcosa di grande, per quanto sia possibile capire ad un ragazzo di 13 anni" [(lettera a G. Wagner, fine 1696)]

Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)

Il soggiorno parigino
1672-1676

È decisivo l'incontro con C. Huygens che gli consiglia letture matematiche (Pascal, Gregory, descartes, Sluse, Wallis, …).

" *Incitato da lui mi applicai a studiare la geometria più intricata sebbene all'epoca conoscessi solo gli Elementi di Euclide*" (1680)
Leibniz stesso scrive che "*si svegliò dal letargo*"

Durante il soggiorno parigino Leibniz perviene alla creazione del calcolo differenziale e integrale

Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)

Il soggiorno parigino
1672-1676

Come per Newton, anche per Leibniz svolsero un ruolo importante le serie infinite, ma fu leggendo la lettera di Amos Dettonville sul “*Traitè des sinus du quart de cercle*” che Leibniz, a quanto egli stesso riferisce, fu colpito da un’intuizione improvvisa.
Nel 1673, intuì che la determinazione della tangente ad una curva dipendeva dal rapporto tra le differenze delle ordinate e delle ascisse, quando queste diventavano infinitamente piccole, e che le quadrature dipendevano dalla somma delle ordinate, ossia dei rettangoli infinitamente piccoli che formavano l’area.
Intuì così che in geometria i problemi della quadratura e della tangente, che dipendevano rispettivamente da somme e da differenze, erano l’uno l’inverso dell’altro.

Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)

Il soggiorno parigino
1672-1676

Così pochi anni più tardi, nel 1676 Leibniz giunse alla stessa conclusione di Newton, indipendentemente dal lavoro di quest’ultimo: in pratica era in possesso di un metodo generale, secondo il quale, data una “funzione” - razionale o irrazionale, algebrica o trascendente (termine coniato dallo stesso Leibniz) - potevano essere sempre applicate le operazioni del suo metodo per trovare somme e differenze.
Spettava quindi a lui elaborare un linguaggio e una notazione confacenti a questa nuova branca della matematica.
Del resto Leibniz aveva sempre avvertito l’importanza di una buona notazione come utile strumento per il pensiero

Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)

Il soggiorno parigino
1672-1676

“Ammetto di aver scoperto tutto questo metodo dalle considerazioni sulla reciprocità di somme e differenze e che le mie considerazioni si estesero dalle successioni di numeri alle successioni di linee e ordinate”

Fundamentum calculi: Differentiae et summae sibi reciprocae sunt

Series differentiae		1	2	3	4	5	dx
Series ipsa	0	1	3	6	10	15	x
Seriei summae	0	1	4	10	20	35	$\int x$

$$\int dx = x = d\int x$$

“la considerazione delle differenze e delle somme delle successioni numeriche mi aveva gettato la prima luce quando mi accorsi che le differenze corrispondono alle tangenti e le somme alle quadrature”

Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)

Le analogie tra il Triangolo aritmetico di Pascal e il Triangolo armonico affascinarono molto Leibniz.

(ogni termine, tranne quelli sui lati obliqui, è uguale alla differenza tra il termine posto nella riga inferiore alla sua sinistra e quello alla sua sinistra sulla stessa riga, es. 6=10-4; inoltre ogni termine, tranne quelli sui lati obliqui, è uguale alla somma dei termini posti subito sopra di esso; es. 3 = 1+ 2).

```
               1
            1     1
         1     2     1
      1     3     3     1
   1     4     6     4     1
1     5    10    10     5     1
…     …     …     …     …     …     …
```

Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)

Triangolo armonico

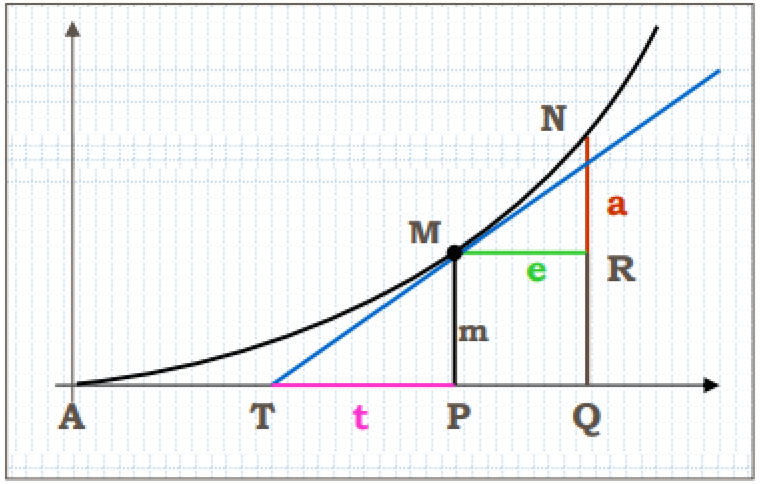
(ogni termine, tranne quelli che si trovano sui lati obliqui, è uguale alla differenza tra il termine posto sulla riga superiore alla sua destra e quello sulla sua stessa riga a destra, es. $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$;
inoltre ogni termine è uguale alla somma del termine posto sulla riga inferiore alla sua destra più i due termini ad esso sottostanti, es. $\frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \frac{1}{1} & & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \\
 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & \\
\frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & &
\end{array}
$$

Così come nei triangoli aritmetico e armonico i processi di sommazione e differenziazione
sono inversamente correlati, così anche nella geometria i problemi della quadratura e della tangente, che dipendono rispettivamente da somme e da differenze, sono l’uno l’inverso dell’altro. L’anello di collegamento, a quanto sembra, fu dato dal Triangolo Caratteristico (o Triangolo Infinitesimale); infatti, mentre Pascal lo aveva usato per trovare la quadratura dei seni, Barrow lo aveva applicato al problema della tangente.

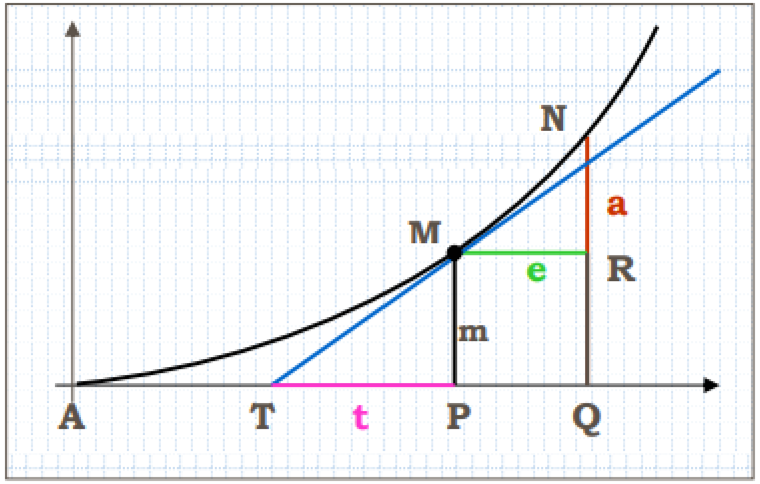
Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)

Il confronto tra i due triangoli mette in evidenza le analogie che evidentemente colpirono Leibniz.
Il triangolo caratteristico usato da Barrow per il problema della tangente:



Sia M un punto di una curva espressa, in notazione moderna, da un’equazione polinomiale $f(x,y)=0$ e sia T il punto d’intersezione della tangente desiderata MT con l’asse x.
Fermat segnava poi “un arco infinitamente piccolo MN della curva”, tracciava le ordinate dei punti M e N e per M tracciava una retta MR parallela all’asse x.
Indicando poi con m l’ordinata di M, che era nota, con t la sottotangente PT, che si desiderava conoscere, e con a ed e i lati verticali e orizzontali del triangolo MRN, faceva notare che $a : e = m : t$

Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)

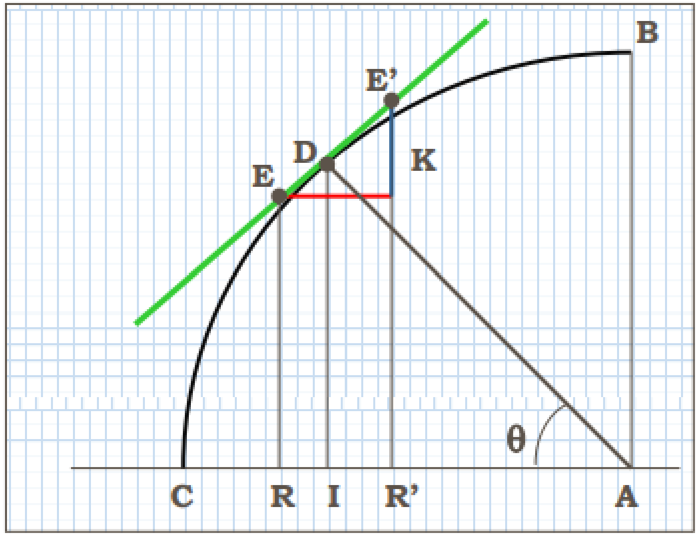


Questi sono i passaggi seguiti da Fermat:

- Per trovare il rapporto $a : e$ (che per noi rappresenta la pendenza della curva per punti infinitamente vicini) sostituì x e y nell'equazione $f(x, y) = 0$ con $x + e$ e $y + a$;
- Nell'equazione risultante trascurò tutti i termini non contenenti a o e, dal momento che questi erano tutti uguali a zero e tutti i termini di grado superiore al primo in a ed e;
- Poi sostituì a con m ed e con t. Da questo ottenne la sottotangente t in termini di x e m.

Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)

Il triangolo caratteristico usato da Pascal per trovare la quadratura dei seni:



Se EDE' è la tangente in D al quadrante unitario BDC, allora:

$$AD : DI = EE' : RR'(EK).$$

Per un intervallo RR' molto piccolo si può considerare il segmento EE' come virtualmente uguale all'arco della circonferenza; quindi

$$1 : senx = d\theta : dx$$

Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)

La nozione di funzione si afferma solo nel ‘700, mentre precedentemente predomina il concetto di relazione, espressa dall’equazione $P(x,y) = 0$
Quindi, il problema della derivazione si presenta a Leibniz nella forma:

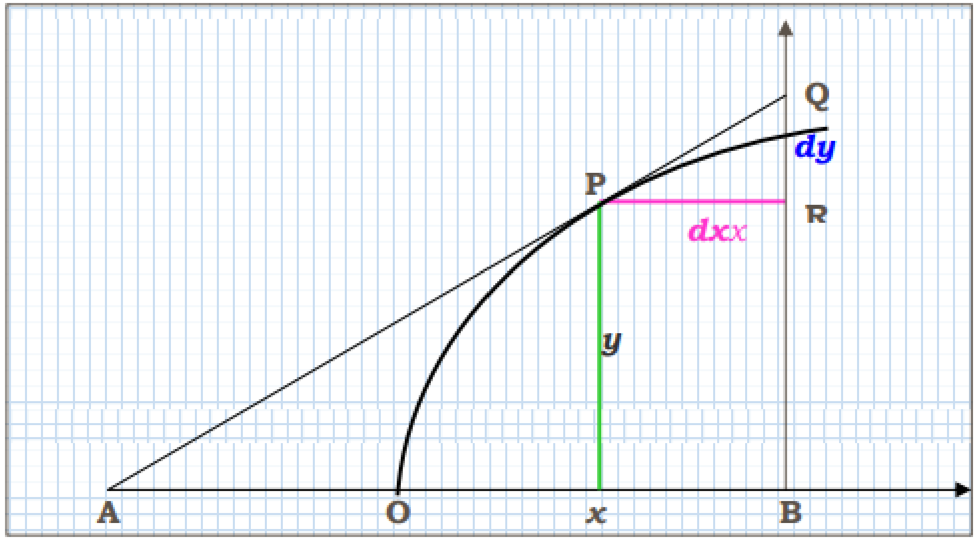
“Data la relazione $P(x,y) = 0$ tra le variabili x e y,
trovare la relazione tra i loro differenziali dx e dy”

Per Leibniz la derivata, o meglio, il differenziale è definito capovolgendo il punto di vista oggi usuale, ossia mediante la tangente.
Leibniz definisce dy (che coincide con il nostro differenziale anche se è definito in altro modo) a partire da un segmento dx, incremento infinitesimo della variabile x e dalla retta tangente alla curva.

Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)

Definisce dy come il segmento che sta a y come dx sta al segmento AB, cioè:

$$dy : y = dx : AB$$



Infatti per la similitudine dei triangoli ABP e PRQ si ha:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{QR}{PR} = \frac{PB}{AB} = \frac{y}{AB}$$

Quindi la sottotangente AB è determinata:

$$AB = y\frac{dx}{dy}$$

Per tracciare la tangente nel punto P basterà congiungerlo con il punto A sull'asse delle x a distanza $y\frac{dx}{dy}$ da B.

Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)

Dopo vari tentativi fissò la sua scelta su dx e dy per indicare le minime differenze possibili (differenziali) di x e y (cioè l’incremento infinitesimo della variabile x e l’incremento infinitesimo della variabile y), sebbene inizialmente avesse usato x/d e y/d

Per indicare la somma di tutte le ordinate di una curva inizialmente usò omn.y (tutte le y), poi passò al simbolo $\int y$ e infine a $\int ydx$, dove il simbolo dell’integrale è l’ingrandimento della lettera “s” che indica la “somma”. Ancora oggi il simbolo dx è usato ed è molto utile per esempio nel calcolo delle derivate parziali.

Non solo: i termini oggi usati di “calcolo differenziale” e “calcolo integrale” sono nati
proprio dalle espressioni usate da Leibniz:

- per trovare le tangenti si richiedeva l’uso del *calculus differentialis*
- per trovare le quadrature si richiedeva l’uso del *calculus summatorius* o *calculus integralis*.

Newton - Leibniz
divergenza di punti di vista

- per Leibniz è centrale la differenziazione che risolve il problema delle tangenti e consente di impostare quello generale delle equazioni differenziali, di cui egli richiede la soluzione in termini finiti.
- per Newton sono centrali gli sviluppi in serie: con le serie egli dà soluzioni generali al problema dell'integrazione

"*Ma la serie non dà tutta la soluzione; infatti anche a prescindere da questioni di convergenza, il carattere delle serie è eminentemente locale: esse possono essere usate per operazioni che riguardino il comportamento della soluzione nell'intorno di un punto, ma non sono di nessun aiuto quando se ne vogliano studiare le proprietà qualitative e globali*“ [Giusti 1988, pp. 26-27]

Leibniz e i leibniziani ponevano e affrontavano dei problemi specifici quali quello della **catenaria**, della **velaria**, della **brachistocrona**, dell' **isocrona paracentrica** e altri ancora accumulando una grande messe di risultati, una delle ragioni questa del primato dell'analisi leibniziana nella prima metà del '700.

I fratelli Bernoulli

Il primo a capire il calcolo leibniziano fu Jacob Bernoulli che lo spiegò al fratello Johann.

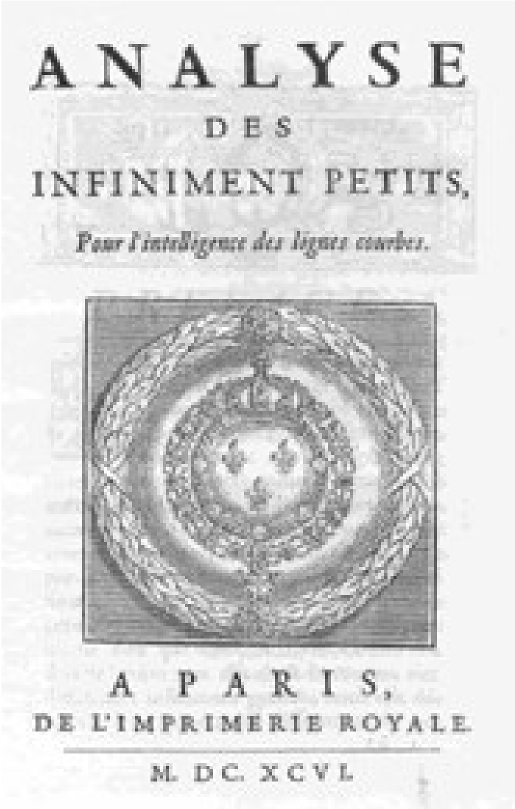
"*Se paragoniamo il genio di Leibniz ad un avventuroso marinaio che destreggiandosi attraverso i flutti e le tempeste della speculazione filosofica porta la sua nave ad approdare nella sospirata terra promessa, allora dobbiamo paragonare il talento dei due Bernoulli all'opera da pioniere del primo conquistatore di una terra inesplorata*" [Fleckenstein, ***]

I fratelli Bernoulli

“ Niente sembrava tanto difficile, né tanto intricato che, muniti del nostro metodo, non sperassimo di scioglierlo, purché fossimo disposti a rivolgervi l’attenzione.
Un’immensa messe di nuove scoperte poi si dispiegava abbondantemente sotto i nostri occhi; ci sembrava di essere stati improvvisamente trasportati dall’angusto golfo, nel quale prima nuotavamo, nel vastissimo oceano in cui veleggiando velocemente, grazie allo spirare di un vento favorevole, scoprivamo moltissime terre di verità impenetrabili. Allora pensavamo di aver infine trovato la chiave con cui poter aprire le serrature della natura e penetrare tutti suoi arcani”[Joh. Bernoulli, 1705]

G. De L’ De L’Hôpital

Le lezioni private di Johann Bernoulli al marchese De L’Hôpital (Parigi 1690-1691) porteranno alla pubblicazione del primo trattato di calcolo differenziale. *Analyse des infiniment petits*, 1696



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
Pour l'intelligence des lignes courbes.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DC. XCVI.