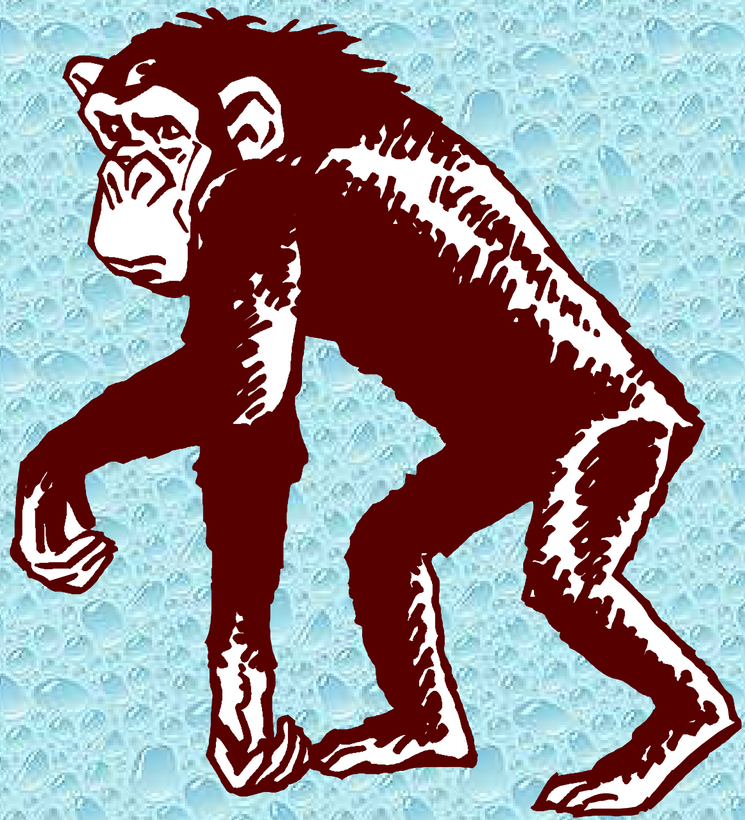
LICEO CLASSICO "L.EINAUDI"
CERVINARA

Il linguaggio della Matematica: Insiemi e operazioni

Prof. Roberto Capone

Il concetto di insieme è un

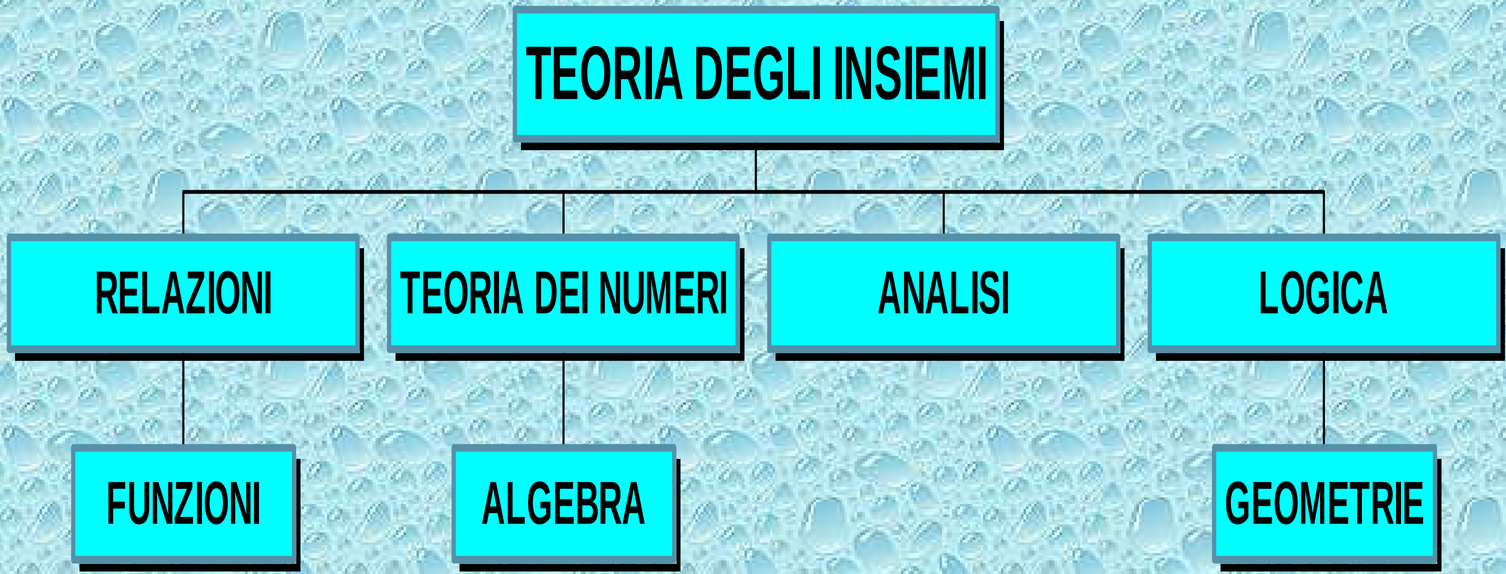
CONCETTO PRIMITIVO proprio come i concetti di punto, retta e piano introdotti nella geometria



Il termine “insieme” in matematica indica una collezione di oggetti , più o meno come nel linguaggio comune

Si tratta di un concetto molto importante perché su di esso si fonda tutto l’edificio della matematica

La TEORIA DEGLI INSIEMI è strettamente connessa con molti settori della matematica



Affinché si possa parlare di insieme in senso matematico occorre poter stabilire senza ambiguità se un oggetto appartiene o meno all'insieme

Perciò in matematica si considerano insiemi solo quei raggruppamenti di oggetti per cui è possibile stabilire, secondo un criterio oggettivo, se un oggetto appartiene o meno al raggruppamento

- Ad esempio è un insieme matematicamente corretto l’insieme delle città della Lombardia.

  Infatti tutti sanno riconoscere le differenti città della regione

- Non è un insieme matematicamente corretto l’insieme dei ragazzi simpatici della classe.

  Ciò perché la simpatia di un compagno o di un altro è soggettiva

∅

Insiemi numerici

Abbiamo già incontrato alcuni insiemi ovvero dei raggruppamenti di elementi che hanno caratteristiche comuni

N l'insieme dei numeri naturali

Z l'insieme dei numeri interi

Q l'insieme dei numeri razionali

R l'insieme dei numeri reali

Tali insiemi si chiamano anche insiemi numerici

Un insieme privo di elementi si chiama INSIEME VUOTO e si indica col simbolo Ø

Simbologia

$\in$	Simbolo di appartenenza
$\notin$	Simbolo di non appartenenza
$\cup$	Simbolo di unione tra insiemi
$\cap$	Simbolo di intersezione tra insiemi
-	Simbolo di differenza tra insiemi
$\varnothing$	Insieme vuoto
/	Tale che
$\wedge$	Simbolo di congiunzione tra proposizioni
$\vee$	Simbolo di disgiunzione tra proposizioni
$\overline{A}$	Complementare dell'insieme A rispetto all'ambiente universo U
$C_U A$	Complementare dell'insieme A rispetto all'ambiente universo U

Il simbolo di appartenenza

- Consid... l'i...
  del...
  in sin...

Attenzione all'uso dei simboli : essi esprimono sempre un legame tra un elemento ed un insieme, mai tra due insiemi o tra due elementi. Il nome dell'elemento è scritto a sinistra, quello dell'insieme a destra.

- Le lette... b e c non appartengono all'in...eme e si scrive b∉A , c∉A ...

Rappresentazione di un insieme

Con i diagrammi di Eulero Venn:

Per rappresentare un qualsiasi insieme possiamo utilizzare tre diversi metodi. Si voglia ad esempio rappresentare l'insieme che chiameremo "A" di tutti gli amici di Marco che sono: Andrea, Marta, Simone, Matteo, Anna, Martina.

Attraverso la rappresentazione tabulare (estensiva):

Enunciando la proprietà caratteristica (intensiva):

1) Rappresentazione tabulare

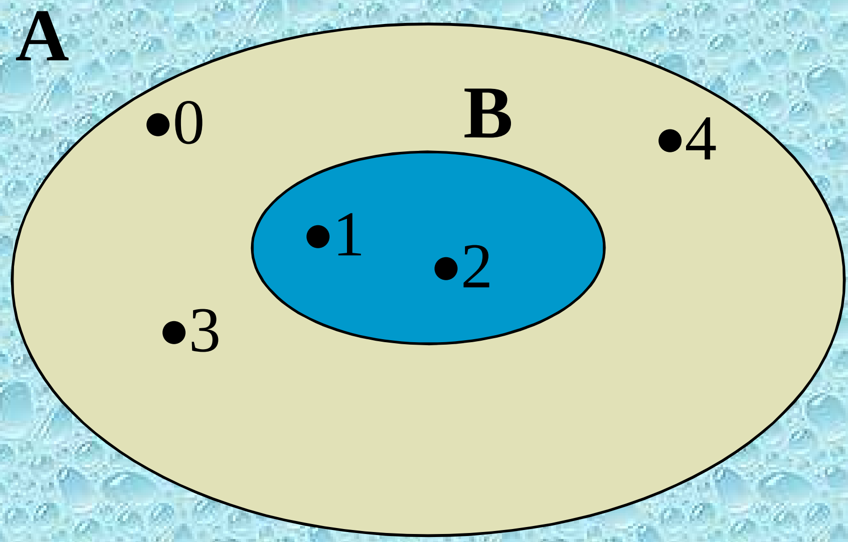
A = {Marta; Andrea; Matteo; Martina; Simone; Anna}

2) Rappresentazione per caratteristica

A = {x | x è amico di Marco}

3) Rappresentazione con diagrammi di Eulero-Venn

Un insieme può essere contenuto in un altro



Si dice allora che B è un sottoinsieme di A:

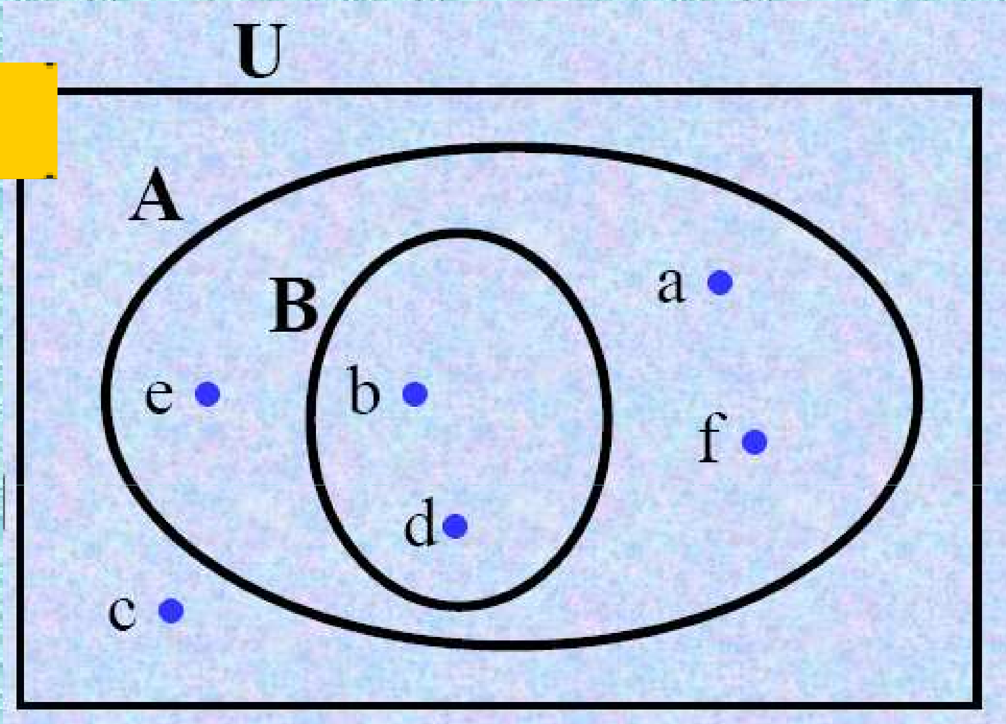
$$\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$$

Esempi

B = {b; d}

A = {a; b; d; e; f}

U = {a; b; c; d; e; f}



$a \in A,\ a \in U,\ a \notin B,$

$b \in B,\ b \in A,\ b \in U$

$c \in U,\ c \notin B,\ c \notin A$

Esempi

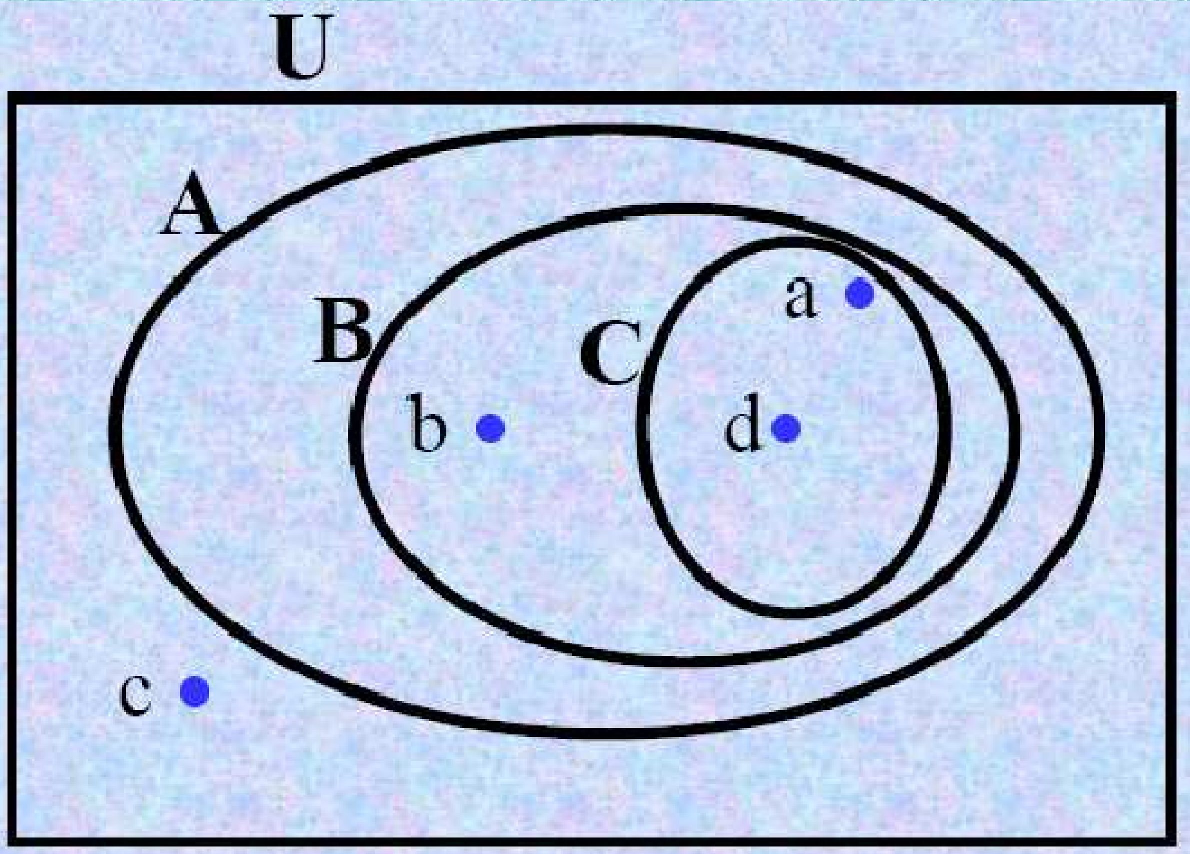
B è un SOTTOINSIEME IMPROPRIO di A

Ogni insieme è un SOTTOINSIEME (IMPROPRIO) di sé stesso

L'insieme vuoto è un SOTTOINSIEME (IMPROPRIO) di ogni insieme

A è un SOTTOINSIEME DI U

C è un SOTTOINSIEME DI B



$B \subseteq A$

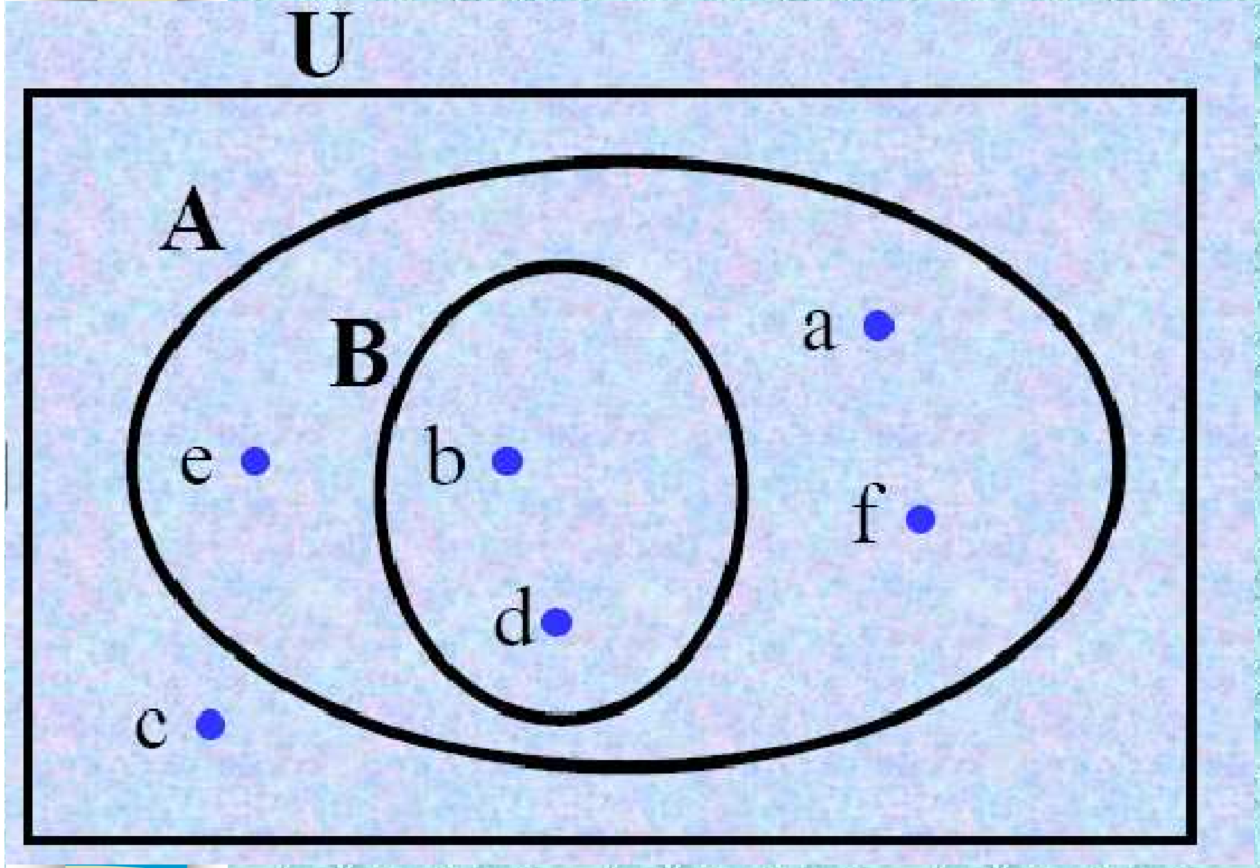
$\varnothing \subseteq C, \varnothing \subseteq B, \ldots\ldots$

$A \subseteq A, B \subseteq B, \ldots\ldots$

$A \subset U$

$C \subset B$

Esempi



$U = \{a; b; c; d; e; f\}$

$A = \{a; b; d; e; f\}$

$B = \{b; d\}$

$\{b; d\} \subseteq B$

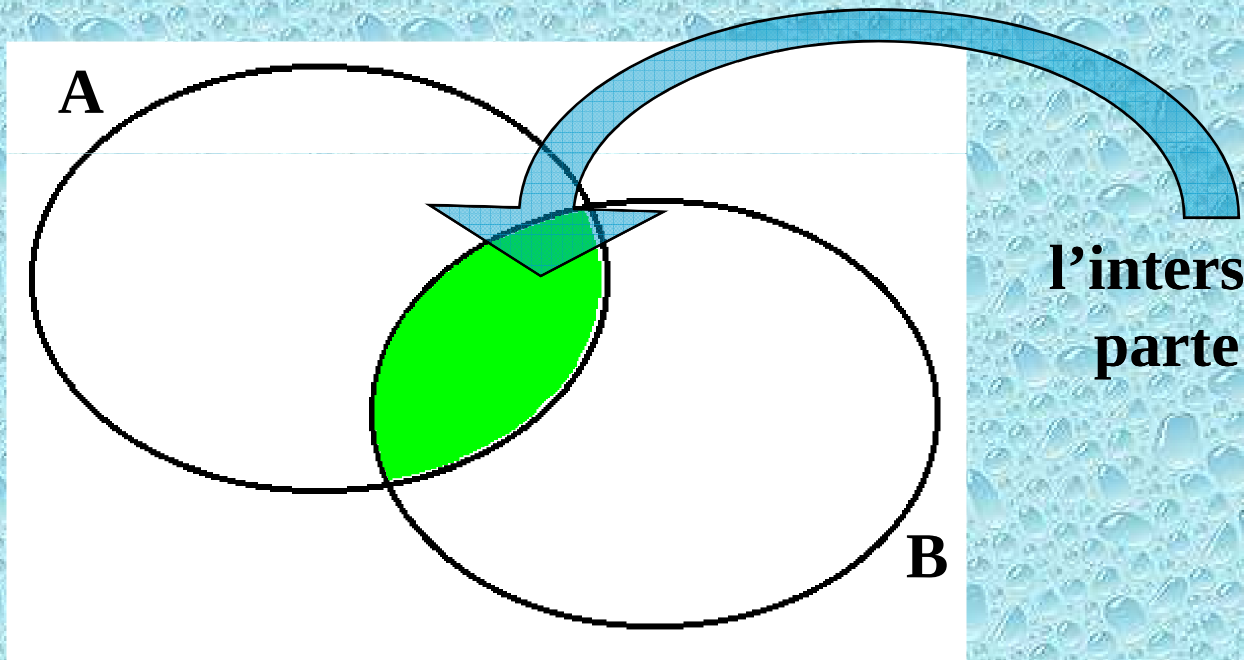
$\{a; b; d\} \subset A$

$\{d\} \subset B$

OPERAZIONI TRA INSIEMI

- Intersezione
- Unione
- Differenza Complementare
- Prodotto Cartesiano

Si definisce **intersezione** di due insiemi A e B, l'insieme formato dagli elementi comuni ad A e B.



l'intersezione è la parte colorata

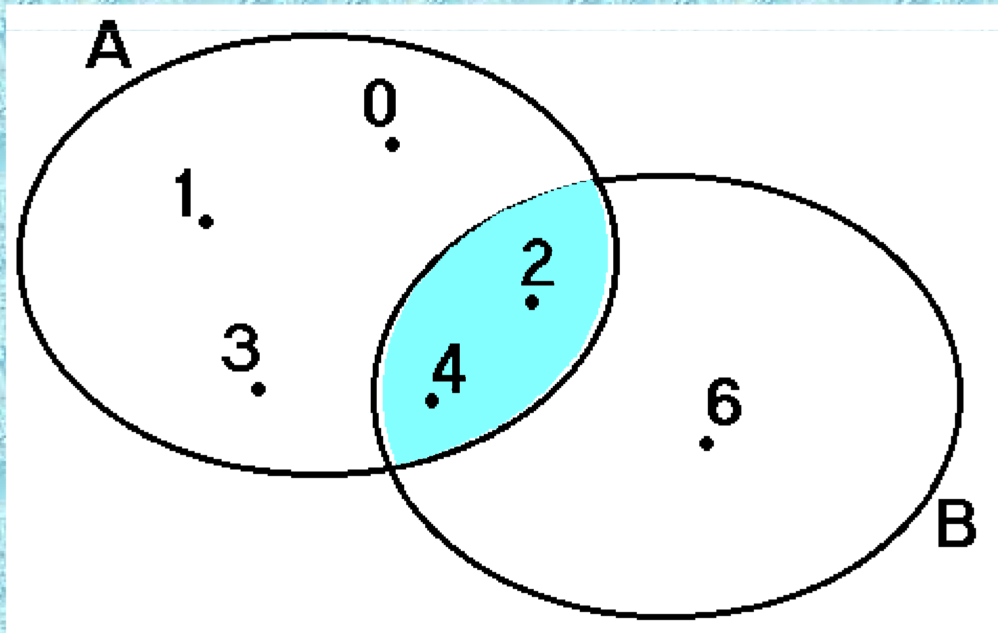
$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathbf{A} \; e \; \mathbf{x} \in \mathbf{B}\}$$

Dati ad esempio i due insiemi
A = {0,1,2,3,4} e **B = {2,4,6}**,
l’intersezione tra **A** e **B** è data dal seguente insieme:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{2, 4}\}$$

Il simbolo $\cap$ è il simbolo che caratterizza l’operazione. Si può leggere “**A** intersecato **B**” oppure “**A** e **B**”.

Con i diagrammi di Venn, il risultato dell'esempio precedente sarà indicato così:

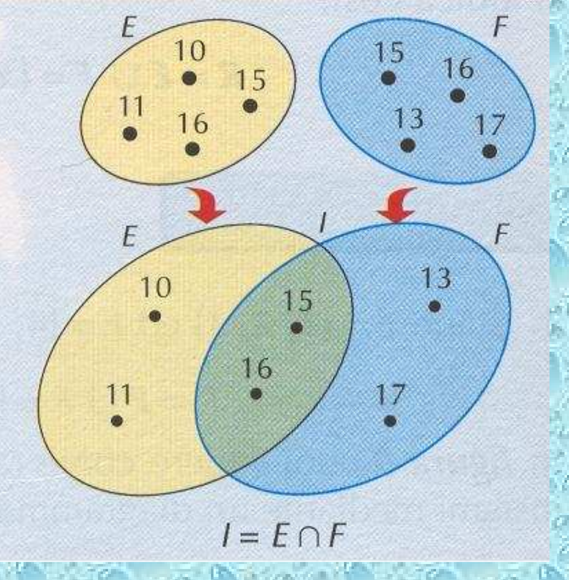


Esempio……

Siano E={10, 11, 15, 16},

F={13, 15, 16, 17},

Allora I = E ∩ F = {15, 16}



CASI PARTICOLARI DELL'INTERSEZIONE

$$A \cap A = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

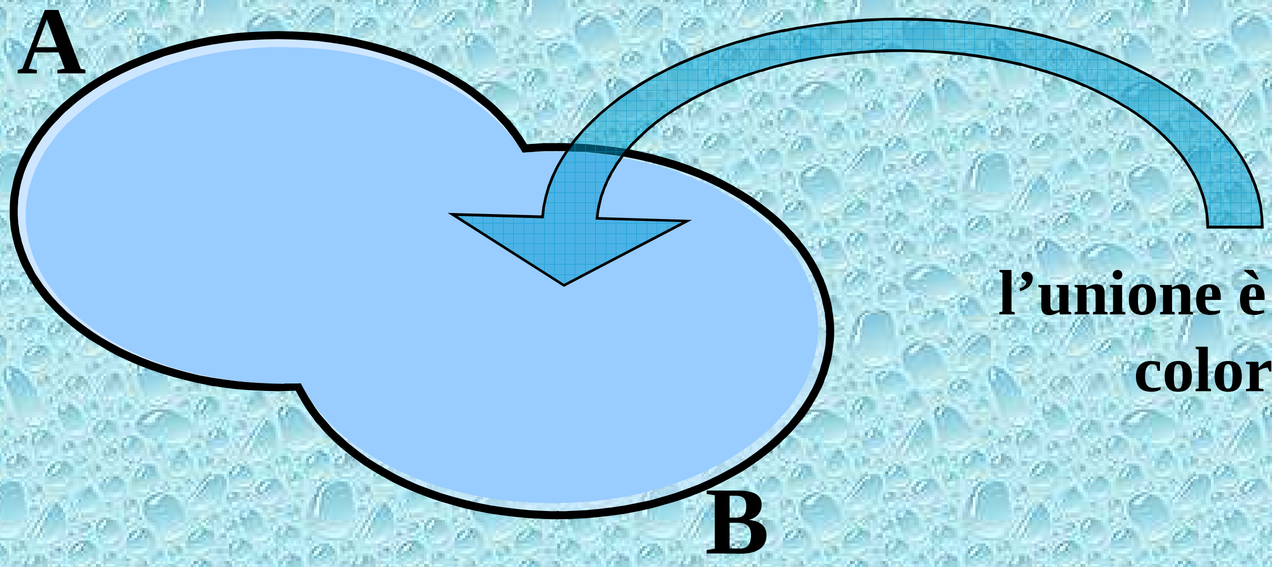
Se $A \cap B = \varnothing$,
A e B si dicono DISGIUNTI

$$A \cap \underline{A} = \varnothing$$

Se $B \subset A$ allora $A \cap B = B$

$$A \cap U = A$$

Si definisce **unione** di due insiemi A e B, l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi dati.



l’unione è la parte colorata

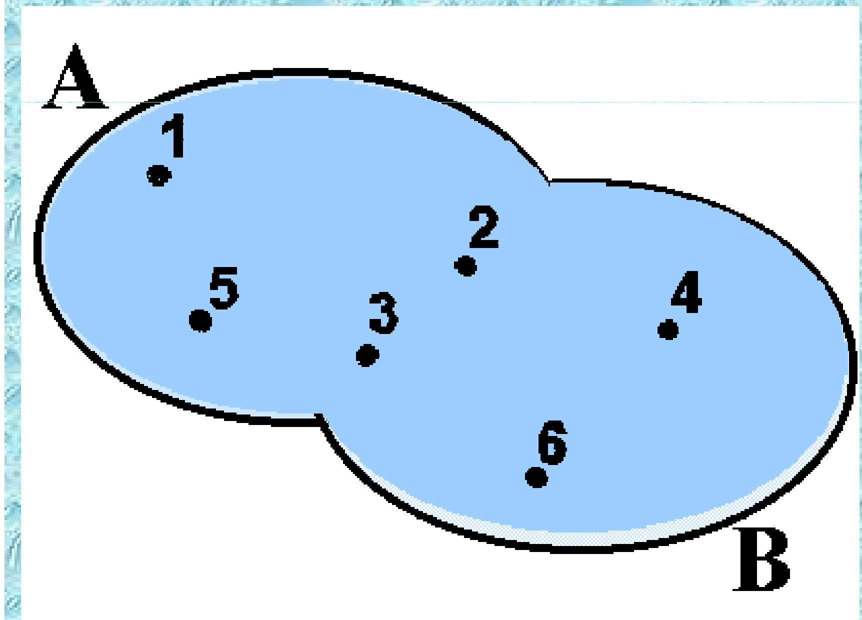
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \mathit{o} \ x \in B\}$$

Dati ad esempio i due insiemi **A** = **{1,2,3,5}** e **B** = **{2,3,4,6}**, l'unione tra **A** e **B** è data dal seguente insieme:

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{\mathbf{1,2,3,4,5,6}\}$$

Il simbolo $\cup$ è il simbolo che caratterizza l'operazione. Si può leggere "**A** unito **B**" oppure "**A** o **B**".

Con i diagrammi di Venn, il risultato dell'esempio precedente sarà:

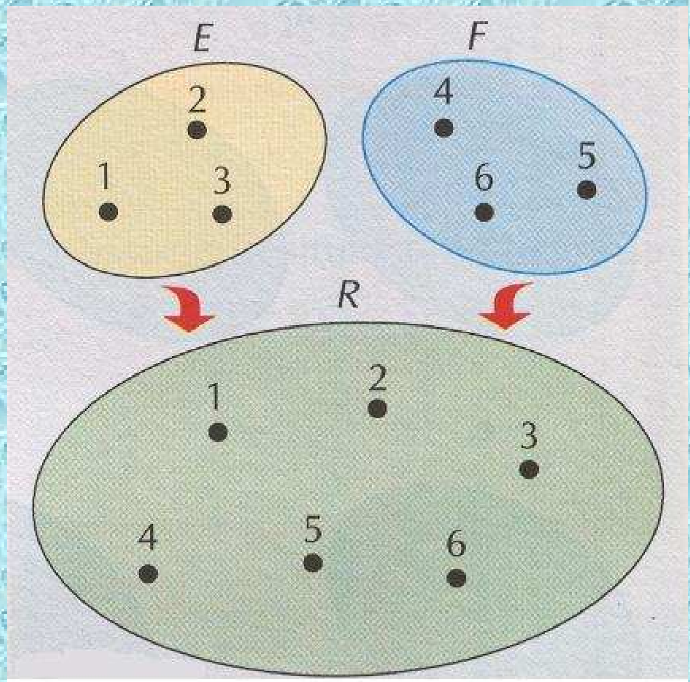


Esempio……

Siano E={1, 2, 3}

F={4, 5, 6},

Allora R = E $\cup$ F = {1, 2, 3, 4, 5, 6}



CASI PARTICOLARI DELL'UNIONE

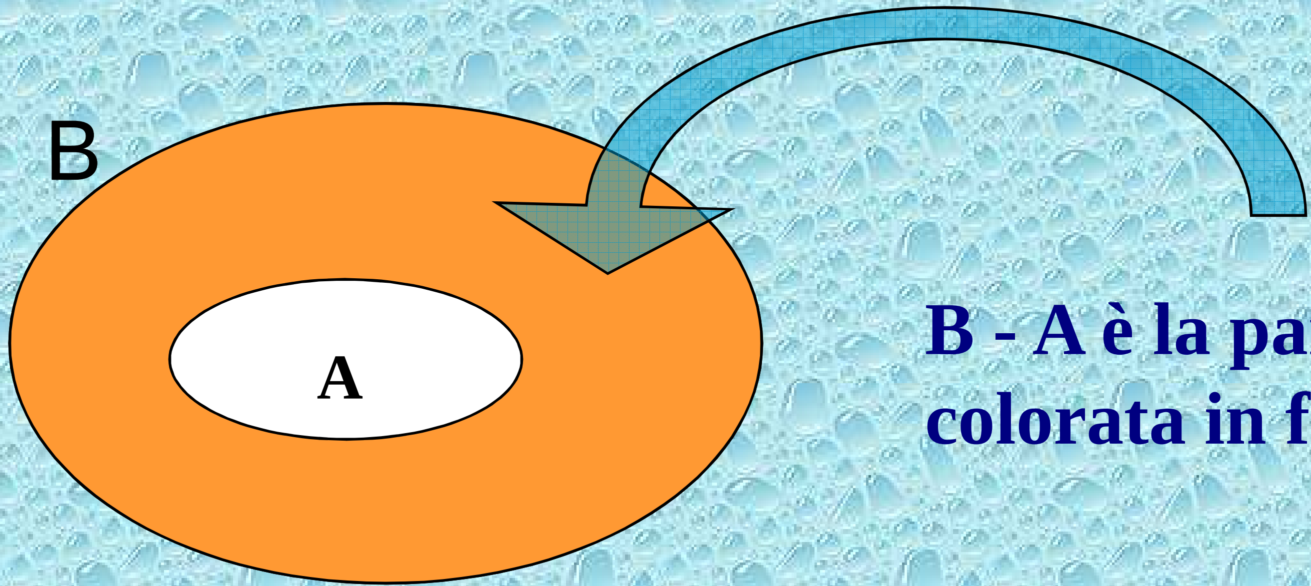
$$A \cup A = A$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup \underline{A} = U$$

Se $B \subset A$ allora $A \cup B = A$

Si definisce differenza complementare fra due insiemi B ed A l'insieme degli elementi di B che non appartengono ad A.



B - A è la parte colorata in figura.

Si ha, per definizione:

$$\mathbf{B - A = \{ x \mid x \in B \ e \ x \notin A \}}$$

L’operazione di differenza complementare non soddisfa la proprietà commutativa, cioè:

$$B\text{-}A \neq A\text{-}B$$

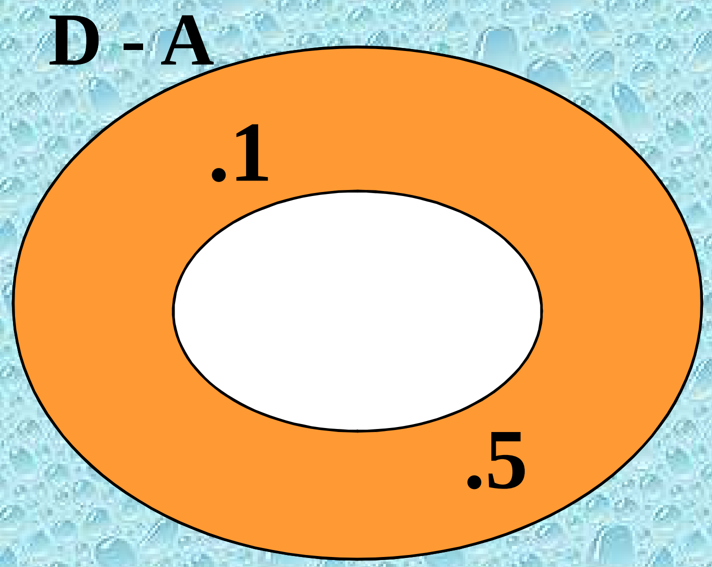
Infatti...

Dati ad esempio i due insiemi
B = **{1,2,3,5}** e A = **{2,3}**, accade che:

B - A = {1,5}

A - B = { }

Con i diagrammi di Venn, l'esempio precedente diventa:

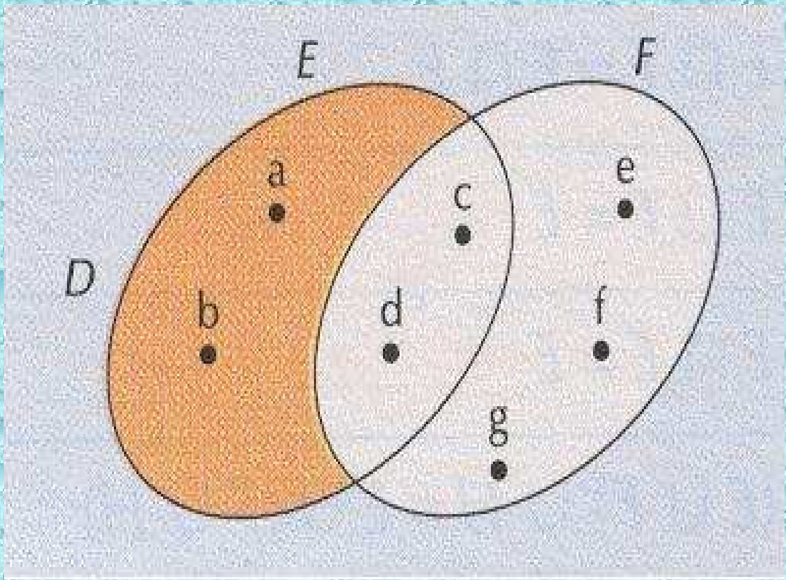


Esempio……

Siano E={a, b,c,d}

F={c, d, e, f, g},

Quindi D = E - F = {a, b}



Si definisce **prodotto cartesiano** tra due insiemi A e B non vuoti l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il 1° elemento $\in$ ad A ed il 2° elemento $\in$ a B.

Dati gli insiemi

A={2, 4} B={a,f}

AxB={(2,a);(2,f);(4,a);(4,f)}

Attenzione: per l’operazione **prodotto cartesiano** non vale la proprietà commutativa! $A \times B \neq B \times A$

Infatti, dati gli insiemi

A={2, 4} B={a,f}

AxB={(2,a);(2,f);(4,a);(4,f)}

BxA={(a,2);(a,4);(f,2);(f,4)}

$$\left.\begin{array}{l} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{array}\right\} \text{Proprietà di idempotenza}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{array}\right\} \text{Proprietà commutativa}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{array}\right\} \text{Proprietà associativa}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{array}\right\} \text{Legge di assorbimento}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}\right\} \text{Proprietà distributiva}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap \overline{A} = \varnothing \\ A \cup \overline{A} = U \end{array}\right\} \text{Complementarietà}$$

De Morgan

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \end{array}\right\} \text{Leggi di}$$