[Selezionare la data]

ROBERTO CAPONE

CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE

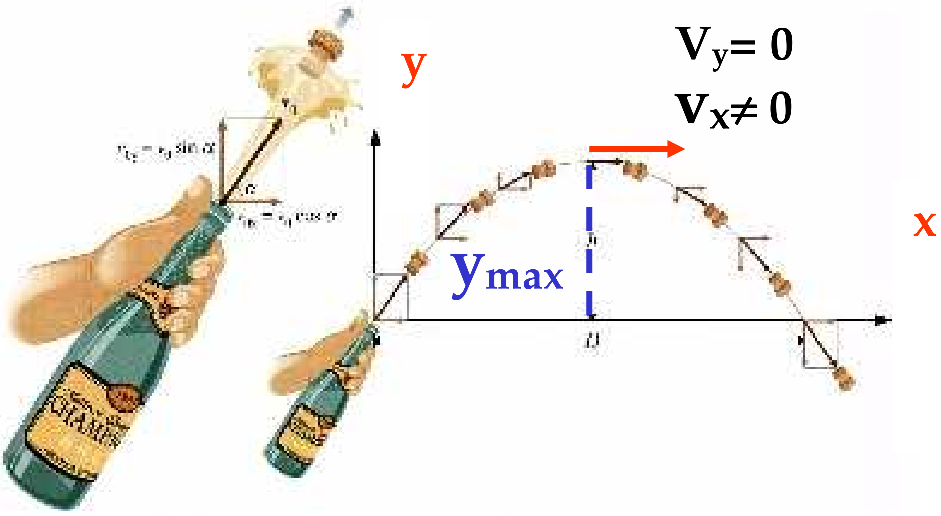
MOTI IN DUE DIMENSIONI



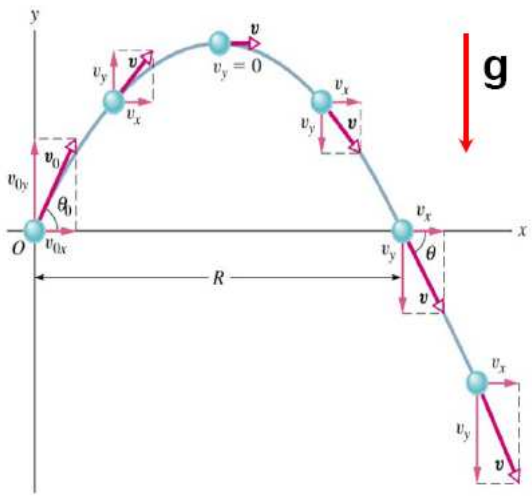


Questione di gradi.
Le comuni leggi della fisica affermano che per lanciare un proiettile alla massima distanza è necessario inclinare il cannone a 45° rispetto al suolo. Questa regola non sembra però essere applicabile alle rimesse con le mani: i calciatori infatti, così come i lanciatori del disco e del giavellotto, solitamente utilizzano inclinazioni inferiori, tra i 30 e i 35°. I due ricercatori hanno analizzato centinaia di lanci, effettuati con inclinazioni diverse, misurandone potenza e lunghezza: un complesso sistema di equazioni ha consentito loro di determinare che l'inclinazione ottimale per un lancio lungo deve essere compresa tra i 20 e i 35°.

Ci vuole una fisica bestiale...
Per Linthorne e Everett, questa differenza tra le comuni regole della balistica e quelle della fisica sportiva risiede nella struttura scheletrica e muscolare dell'uomo, che rende più semplice applicare una maggior forza al pallone ad angoli bassi. I calciatori, pur non essendo, tranne rarissime eccezioni, esperti di fisica, giungono a questa conclusione semplicemente grazie all'esperienza: le rimesse di professionisti ma anche di semplici appassionati si discostano infatti pochissimo dall'angolo ottimale. (dalla rivista Focus)



Abbiamo analizzato finora moti che avvengono lungo una sola direzione: il moto di un oggetto che si muove lungo una retta orizzontale, il moto di un oggetto che cade liberamente da una certa altezza h sono esempi di moto cosiddetto unidimensionale.
Nella vita di tutti i giorni si ha spesso a che fare con moti in due dimensioni: una palla da basket che viene lanciata nel tentativo di far canestro, un calcio d'angolo battuto durante una partita di calcio, un paracadutista che si lancia da un aereo in movimento, un proiettile sparato da un cannone sono solo alcuni dei numerosi esempi il cui studio cinematica richiede la conoscenza del moto in due dimensioni.
Durante il suo moto in due dimensioni, il mobile (che chiameremo per uso comune proiettile) subisce una accelerazione verso il basso dovuta alla accelerazione di gravità g che ovviamente si mantiene costante in modulo e diretta verticalmente verso il basso mentre non possiede accelerazione orizzontale. A un primo impatto lo studio del moto in due dimensioni potrebbe sembrare complicato ma possiamo semplificarlo analizzando singolarmente il moto lungo le due dimensioni perché
Il moto orizzontale e il moto verticale sono indipendenti l'uno dall'altro non influenzandosi a vicenda.



Lungo la direzione orizzontale l'accelerazione è nulla e così la componente orizzontale della velocità rimane costante durante il moto (si tratta di un moto uniforme)

Il moto verticale è quello analizzato per il moto di caduta libera ovvero di un oggetto che si muove sottoposto ad una accelerazione g costante. Si tratta, pertanto, di un moto uniformemente accelerato.

Possiamo così schematizzare le leggi del moto:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad [3]$$

Possiamo per semplicità porre l'origine degli assi coordinati nel punto di lancio del proiettile avendosi così $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ e possiamo rappresentare graficamente il moto. Dal grafico si può notare che la componente orizzontale della velocità rimane costante mentre quella verticale varia con continuità. La componente verticale della velocità si comporta come per una palla lanciata verticalmente verso l'alto. E' diretta inizialmente verso l'alto e la sua intensità diminuisce fino ad annullarsi quando il proiettile raggiunge la posizione più elevata della traiettoria. Poi la componente verticale della velocità inverte la sua direzione e la sua intensità va aumentando sempre più rapidamente.
Analizziamo ora il moto nel dettaglio.

EQUAZIONE DELLA TRAIETTORIA (Facoltativo)

Ci preoccupiamo inizialmente di trovare l'equazione della traiettoria.
Ricavo il tempo dall'equazione

$$x = v_{0x} t$$

Si ha

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

E sostituisco tale valore della equazione

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

ricavando

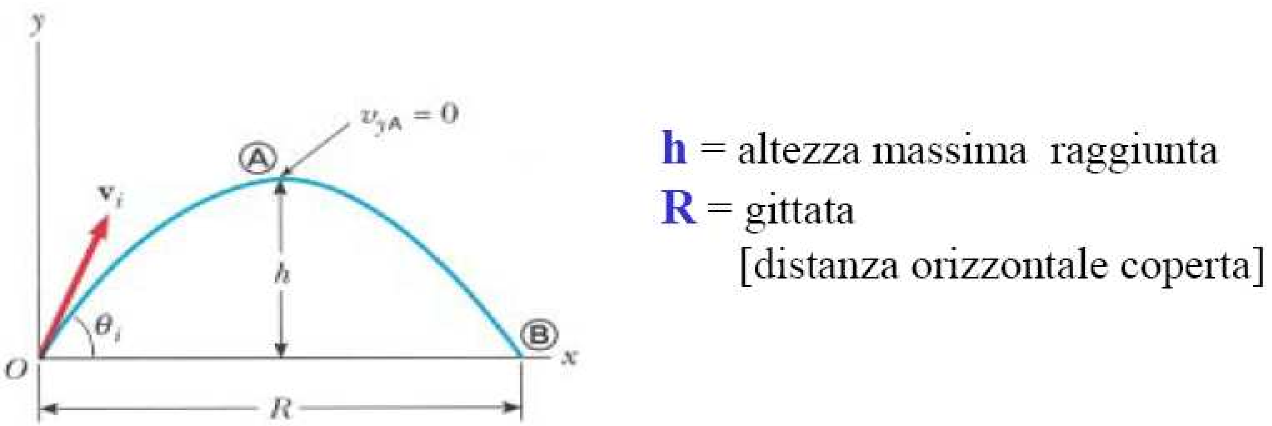
$$y = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2}$$

Indico con b la quantità $\frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ e con a la quantità $\frac{1}{2v_{0x}^2} g$; entrambe le quantità sono costanti avendosi così l'equazione

$$y = -ax^2 + bx$$

che è l'equazione di una parabola che volge la concavità verso il basso.

LA GITTATA



Si dice gittata la distanza orizzontale tra il punto di lancio del proiettile e il punto in cui tocca nuovamente il suolo (alla stessa quota di partenza)

Quando il proiettile tocca il suolo la componente y della sua traiettoria si annulla. Dall'equazione di II grado ottenuta ponendo y=0 ricavo il tempo. Ricavo:

$t_1 = 0$ che rappresenta l'istante del lancio e $t_2 = \frac{2v_{0y}}{g}$

Questo valore di t prende anche il nome di tempo di volo.
Sostituendo il valore ottenuto nella equazione $x = v_{0x}t$ ricavo:

$x = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$ che rappresenta il segmento cercato e detto Gittata R

LE CONDIZIONI INIZIALI

Molte volte conosciamo il cosiddetto angolo di lancio ovvero l'inclinazione rispetto all'asse orizzontale del lancio del proiettile.
Applicando le relazioni già note che legano un vettore e le sue componenti possiamo esprimere v_{0x} e v_{0y} come segue

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

Se conosciamo l'angolo di alzo possiamo riscrivere la relazione che ci permette di calcolare la gittata G come segue

$$x = G = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

Si noti che la massima gittata si ha per $\alpha = 45°$

LA MASSIMA ALTEZZA RAGGIUNTA

Al vertice della traiettoria si ha $v_y = 0$ e cioè

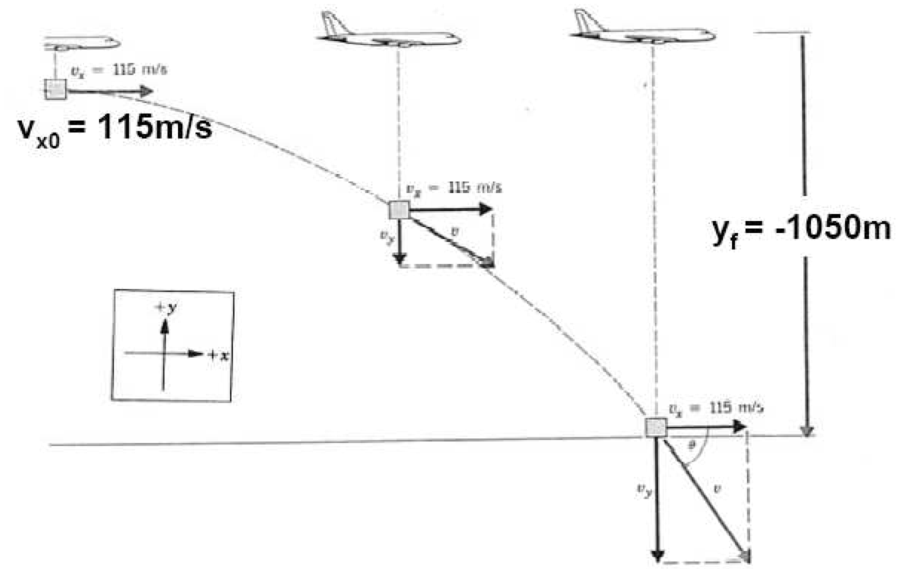
$v_0 \sin\alpha - gt = 0$ da cui ricavo il tempo $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

La massima altezza raggiunta si ricava sostituendo nell'equazione della traiettoria il valore di t così ricavato avendosi:

$$y = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

Fisica e realtà: lancio di materiali da soccorso

Un aereo impiegato per il soccorso durante la guerra in Kosovo viaggia alla velocità di 115m/s e ad un'altezza dal suolo di 1050 metri. Il pilota deve lanciare un pacco contenente materiale per il pronto soccorso ma deve stare bene attento affinché il pacco arrivi proprio nell'accampamento distante circa 1600 metri dal punto in cui decide di sganciare il pacco. Riuscirà nell'ardua missione?



$$\begin{cases} x_f = x_i + v_{x0}\, t \\ y_f = y_i + v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

moto orizzontale: rettilineo ed uniforme
moto verticale: uniformemente accelerato

In questo caso, la velocità iniziale ha solo la componente lungo x , mentre la componente lungo y è nulla
Dalla relazione scritta sopra è possibile ricavare il tempo che impiega il pacco di pronto soccorso per arrivare al suolo e a che distanza dal punto di lancio il pacco arriva

$$\begin{cases} x_f = 0 + (115\, m/s) \cdot t \\ -1050\, m = 0 + 0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$t^2 = \frac{2 \times 1050\, m}{9.8 m/s^2} = 214.3\, s^2$$

$$t = 14.6 s$$

$$x_f = (115 m/s) \times 14.6 s = 1679 m$$