CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

L'introduzione dell'energia potenziale e dell'energia cinetica ci permette di formulare un principio potente e universale applicabile alla soluzione dei problemi che sono difficili da risolvere con le leggi di Newton.

Se solleviamo un libro da una altezza y_a ad un'altezza y_b nel sistema libro-Terrra è immagazzinata energia potenziale gravitazionale, che possiamo calcolare dal lavoro compiuto da un agente esterno sul sistema. Infatti:

$$L = mgy_b - mgy_a$$

Dal teorema dell'energia cinetica sappiamo, inoltre, che

$$L = \Delta K$$

Quindi, uguagliando queste due espressioni per il lavoro svolto sul libro, si ha:

$$\Delta K = mgy_b - mgy_a$$

La quantità al secondo membro può anche essere scritta in relazione all'energia potenziale posseduta dal sistema. Infatti:

$$mgy_b - mgy_a = -(mgy_a - mgy_b) = -(U_f - U_i) = -\Delta U_g$$

Dove U_g è l'energia potenziale gravitazionale del sistema.

In definitiva potremo scrivere:

$$\Delta K = -\Delta U_g$$

E cioè

$$\Delta K + \Delta U_g = 0$$

In questa equazione il primo membro rappresenta la somma delle variazioni di energia immagazzinata nel sistema e il secondo membro è la somma dei trasferimenti attraverso il contorno del sistema. Questo, nel caso presente, è uguale a zero, perché il nostro sistema libro-terra è isolato dall'ambiente.

Se scriviamo le variazioni di energia esplicitamente si ha:

$$(K_f - K_i) + (U_f - U_i) = 0 \qquad \rightarrow \qquad K_f + U_f = K_i + U_i$$

Definiamo energia meccanica di un sistema la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale possedute dal sistema:

$$E_{mecc} = K + U$$

La relazione

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

Rappresenta il cosiddetto teorema di conservazione dell'energia meccanica e può essere enunciato come segue:

"In un sistema isolato, l'energia meccanica totale (data dalla somma di energia cinetica ed energia potenziale) si conserva"

Esplicitando ulteriormente la relazione $K_f + U_f = K_i + U_i$ possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$

Questa relazione la useremo in moltissime applicazioni

Esempio n°1 Palla in caduta libera

Una palla di massa m cade da un'altezza h. determinare la velocità della palla quando giunge al suolo e quando giunge ad un'altezza y rispetto al suolo

Ragioniamo insieme - Considereremo come sistema la palla e la Terra. Adottiamo il modello semplificato secondo cui la palla non incontra la resistenza dell'aria. Quindi la palla e la Terra non subiscono altre forze da parte dell'ambiente e noi possiamo usare il principio di conservazione dell'energia meccanica.

Inizialmente il sistema ha energia potenziale e non ha energia cinetica (infatti la pallina all'inizio è ferma). Mentre la palla cade, l'energia meccanica totale del sistema (la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale) rimane costante ed è uguale alla sua energia potenziale iniziale. L'energia potenziale del sistema diminuisce e l'energia cinetica aumenta

Soluzione

Scriviamo l'equazione di conservazione dell'energia meccanica

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

Nell'equazione, $K_i = 0$ perché la palla inizialmente è ferma mentre l'energia potenziale è $U_i = mgh$.

Quando la palla si trova ad un'altezza y rispetto al suolo, la sua energia cinetica sarà $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ mentre l'energia potenziale del sistema è $U_f = mgy$

Pertanto:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy = 0 + mgh$$

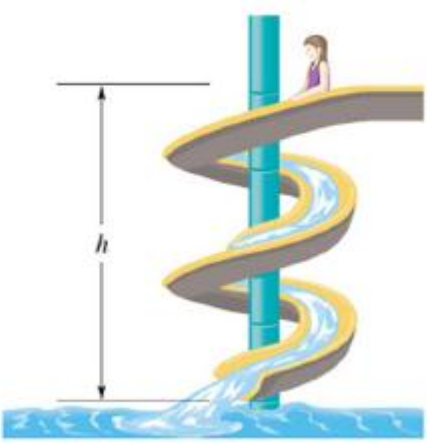
Da cui

$$v_f = \sqrt{2g \cdot (h - y)}$$

Se la palla arriva al suolo, la sua velocità finale sarà data invece dalla relazione

Esempio svolto n°2

Un bambino di massa m è lasciato andare, da fermo, dalla cima di uno scivolo tridimensionale, a un'altezza h = 8.5 m, sopra il livello della piscina. A che velocità starà scivolando quando arriva in acqua?Si supponga lo scivolo privo di attrito.



Ragioniamo insieme - non posso trovare la velocità finale del bambino attraverso la su accelerazione (**F=ma**) perché non conosco la pendenza dello scivolo. Posso applicare principio di conservazione energia meccanica., infatti ho sistema isolato e forze conservative

Soluzione:

dal teorema di conservazione dell'energia meccanica sappiamo che

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

ovvero

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$

da cui

$$v_f^2 = v_i^2 + 2g(y_i - y_f)$$

Tenuto conto che la velocità iniziale è nulla perché il bambino parte da fermo, e indicato con $h = y_i - y_f$, si ricava

$$v_f = \sqrt{2g \cdot h}$$

Da cui, sostituendo i valori, otteniamo

$$v_f = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 8{,}5} = 13m/s$$

Esempio svolto n°3 (ATTENZIONE c'è l'attrito quindi non vale la conservazione dell'energia)

Una cassa di 3Kg scivola giù lungo una rampa di carico. La rampa è lunga 1 metro e inclinata di un angolo di 30° come in figura. La cassa parte da ferma dalla sommità e subisce una forza di attrito costante di 5N. determinare la velocità della cassa proprio mentre raggiunge la base della rampa.

Ragioniamo insieme – definiamo la cassa, la Terra e la rampa come il nostro sistema. Esso è un sistema isolato. Se scegliessimo la cassa e la Terra come sistema,. Dovremmo usare il modello del sistema non isolato perché la forza di attrito tra la cassa e la rampa è un'influenza esterna.

Soluzione

Poiché per la cassa $v_i = 0$, l'energia cinetica iniziale del sistema è zero. Se la coordinata y è misurata dal fondo della rampa, allora $y_i = 1m \cdot sin\theta = 0{,}5m$ per la cassa.

Quindi, l'energia meccanica totale del sistema cassa-Terra quando la cassa si trova alla sommità della rampa è tutta energia potenziale gravitazionale

$$E_i = U_i = mgy_i$$

Quando la cassa raggiunge la base, l'energia potenziale gravitazionale del sistema è zero poiché la quota della cassa è $y_f = 0$

Quindi l'energia meccanica totale quando la cassa si trova alla base è tutta quanta energia cinetica:

$$E_f = K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Tuttavia non possiamo dire in questo caso che $E_f = E_i$ poiché agisce una forza non conservativa che è la forza di attrito che sottrae energia meccanica al sistema.

In questo caso la variazione di energia meccanica del sistema è

$\Delta E = -f_d \cdot \Delta r$

Dove Δr è lo spostamento della cassa lungo la rampa

$\Delta E = \Delta K + \Delta U = -f_d \cdot \Delta r$

Nel nostro caso avremo:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - mgy_i = -f_d \cdot \Delta r$$

da cui

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgy_i - f_d \cdot \Delta r$$

di qui possiamo ricavare la velocità finale che è pari a 2,54m/s (fare i calcoli)

Ora tocca a te

ESERCIZIO

Usare la seconda legge di Newton per calcolare l'accelerazione della cassa sulla rampa, e le equazioni della cinematica per determinare la velocità finale della cassa. *Risposta* 3.23 m/s; 2 2.54 m/s

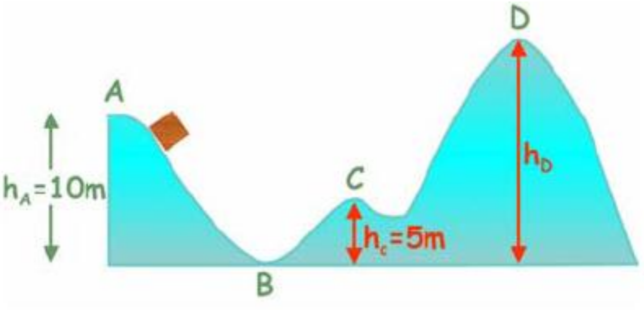
ESERCIZIO

Se si considera la rampa priva di attrito, trovare la velocità finale della cassa e la sua accelerazione sulla rampa. *Risposta* 3.13 m/s; 4.90 m/s^2

ESERCIZI PROPOSTI

ESERCIZIO N°1

Nella figura è rappresentato un punto materiale di massa 1Kg che percorre la traiettoria ABCD senza attrito. Passa per il punto A con velocità v; per il punto B con una velocità tripla e alla fine si ferma in D.



Calcolare:

a) il modulo della velocità con cui il punto materiale passa per A

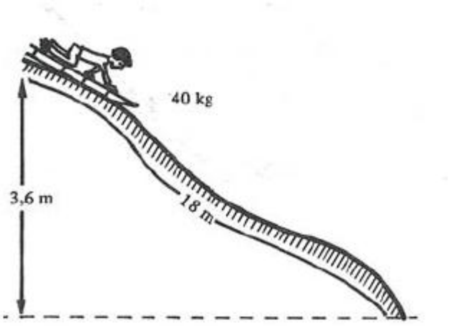
b) L' energia cinetica nel punto C

c) L'altezza del punto D, dove si ferma.

ESERCIZIO N°2

Un bambino si lascia andare da uno scivolo su uno slittino partendo da fermo e da un'altezza h=3,6m. la massa del bambino e dello slittino è nel complesso 40Kg. Se giunge alla fine del tratto con una velocità di 11,3 m/s, si calcoli, applicando i teoremi di conservazione dell'energia:

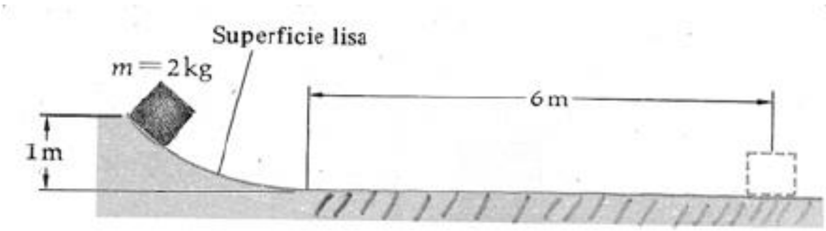
a) il lavoro della forza di attrito
b) supponendo il tratto di lunghezza l=18m, l'intensità della forza di attrito



ESERCIZIO N°3

Un blocco di massa 2Kg da una altezza di 1m, inizialemente fermo, viene abbandonato su una rampa liscia e curva come mostrato in figura. Di seguito si muove su una superficie orizzontale scabra per 6 metri prima di fermarsi.

a) calcola la sua velocità nel punto più basso della rampa
b) calcola il lavoro della forza di attrito
c) calcola il coefficiente di attrito tra il blocco e la superficie orizzontale



ESERCIZIO N°4

ESERCIZIO N°5

Una pallina da ping-pong (**m = 30 g**) è lanciata verso l'alto con velocità iniziale $\mathbf{v_0}$ = **15 m/s** e raggiunge l'altezza **h = 7,5 m**. Quanta energia è stata dissipata per effetto dell'attrito dell'aria? **(ΔE = -1,17 J)**

ESERCIZIO N°6

Una ragazza trascina una scatola che pesa **40 N** a velocità costante per una distanza di **10 m** sul pavimento. Quanto lavoro compie se il coefficiente di attrito cinetico vale **0,2**? **(W= 80 J)**

ESERCIZIO N°7

Un bambino su un'altalena raggiunge un'altezza massima di **2 m** al di sopra della sua posizione più bassa. Qual è la velocità dell'altalena nel punto più basso? (si trascurino le forze di attrito) **(v= 6,2 m/s)**

ESERCIZIO N°8

Una lattina di birra viene fatta cadere da una finestra alta **30 m** dal livello del suolo. Trascurando la resistenza dell'aria, qual è la sua velocità quando tocca il suolo? **(v=24,2 m/s)**

ESERCIZIO N°9

Una scatola con una velocità iniziale di **3 m/s** scivola sul pavimento orizzontale e si ferma in **0,5 m**. Qual è il coefficiente di attrito cinetico? **(μ = 0,91)**

ESERCIZIO N°10

Una slitta di massa **m = 9kg** scivola per **100 m** giù da una collina che ha pendenza di **30°** gradi rispetto alla direzione orizzontale. La slitta raggiunge una velocità finale di **20** $\mathbf{ms^{-1}}$ alla base della discesa. Quanta energia è stata dissipata a causa dell'attrito? **(ΔE = 2615 J)**

ESERCIZIO N°11

Un sasso viene lanciato in direzione orizzontale dalla cima di una torre con velocità iniziale di 1 m/s e arriva a terra dopo 4 s.
a) Quanto vale la velocità del sasso (in modulo direzione e verso) quando sta per toccare il suolo?
b) Quanto μe alta la torre?
c) A quale distanza dalla torre tocca terra?

ESERCIZIO N°12

Un corpo avente una massa di 3 kg µe poggiato su un piano inclinato e vi scivola sopra con attrito trascurabile. La lunghezza del piano µe uguale a 3m e la differenza di altezza fra le due estremità del piano è di 150 cm.

a) Con quale velocità il corpo arriva in fondo se parte da fermo dall'inizio del piano?
b) Quanto lavoro ha fatto la forza di gravitµa sul corpo durante la discesa?
c) Quanto vale la forza che fa muovere il corpo lungo il piano?
d) Quanto tempo impiega il corpo a scendere?

R: a) $v_f = 5{,}4 m/s$; b) L = 44,1 J; c) F = 14,7N; d) t = 1,1 s

ESERCIZIO N°13

La pista di una montagna russa ha la forma mostrata nella figura. Un carrello di massa 200 g arriva nel punto *A* con la velocità di 2 *m/s.* Le altezze dei quattro piloni sono: h_A = 6 m, h_B = 3m, *h-* = 4 m, *h,,* 6 m. Supponi che l'attrito sia trascurabile e che l'energia meccanica si conservi. Calcola l'energia cinetica, potenziale e meccanica nei quattro punti. Calcola la velocità del carrello nei punti B e *D.*

ESERCIZIO N°14

Una forza F costante e pari a 1N agisce su un corpo che si sposta di 1m lungo una direzione (non necessariamente parallela alla forza). L'energia cinetica del corpo passa da 3 J a 2 J

a) Quanto vale la variazione di energia cinetica del corpo e quanto vale il lavoro compiuto dalla forza su di esso?
b) Quale µe la direzione relativa della forza e dello spostamento?

Ris.: a) ΔE = -1 J; L = -1 J; b) Antiparallela.

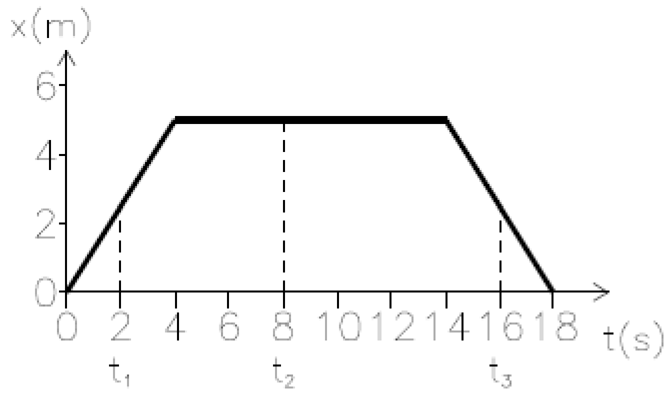
ESERCIZIO N°15

Un corpo di massa m = 200 g viene lanciato verso l'alto con velocità iniziale pari a 4 m/s.

a) Quanto vale la sua energia cinetica iniziale?
b) Quanto vale l'energia potenziale gravitazionale (rispetto al suolo) nel punto piµu alto della traiettoria?
c) Quale altezza massima raggiunge?

R: a) E_{cin} = 1,6 J; b) E_{pot} = 1,6 J; c) h = 81,6 cm

ESERCIZIO N°16



Un corpo C di massa m = 50 g, che puμo muoversi solo lungo una linea retta coincidente con l'asse x, ha una posizione che cambia nel modo indicato in figura

a) Quanto valgono le velocità v_1, v_2 e v_3 (se ne chiede il valore ed il segno) in corrispondenza dei tempi t_1, t_2 e t_3?

b) Quale lavoro deve essere fatto (da forze opportune) tra l tempo t_1 ed il tempo t_2 (L_{12}) e tra il tempo t_1 ed il tempo t_3 (L_{13})?

R: a) v_1 = 1,25 m/s; v_2 = 0; v_3 = -1,25 m/s; b) L_{12} = -0,039 J; L_{13} = 0

ESERCIZIO N°17

Un blocco di massa M = 6 kg partendo da fermo scivola per una distanza di 4m lungo un piano inclinato di 60o rispetto alla verticale. Calcolare:

a) L'energia potenziale iniziale del blocco rispetto alla base del piano inclinato

b) La velocità che possiede il blocco alla fine del piano inclinato, assumendo che questo sia privo di attrito

c) La velocità finale e il tempo impiegato dal blocco a raggiungere il pavimento nel caso sia presente una forza di attrito costante Fa = 8N

R: a) E_{pot} = 117,6 J; b) v = 6,26 m/s; c) v = 5,34 m/s

Paulo difficiliora

ESERCIZIO N°18

Una rana saltando verso l'alto μe in grado di decollare dal terreno con una velocità v_r pari a 250 cm/s

a) A quale altezza h può arrivare la rana saltando verticalmente?

La rana di cui sopra va a camminare su un sasso che si trova in bilico sul ciglio di un burrone e, ad un certo istante, il sasso si sbilancia e comincia a cadere trascinando con se la rana.

b) Se la rana spicca un salto verso il ciglio del burrone dopo un tempo t = 0/15 s dall'inizio del moto di caduta del sasso, ha la possibilità di salvarsi ritornando sul ciglio del burrone?

R: a) h = 32 cm; b) no