MINISTERO DELL' ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITA' E DELLA RICERCA

LICEO STATALE "P. E. IMBRIANI"

Linguistico - Scientifico - Scientifico delle Scienze Applicate

Via S. Pescatori, 155 – 83100 Avellino

Tel. (2 linee) 08257821.84 - 86 Fax segreteria 0825783899 ~ Fax dirigenza 082535375

Cod. fiscale: 80011170646 ~ Cod. Istituto: AVPM040007

web-site: www.liceoimbriani.it ~ email: avpm040007@istruzione.it

Unione Europea FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013 MIUR

Con l'Europa investiamo nel vostro futuro!

Il principio di induzione Applicazioni

Prof. Roberto Capone

Il teorema minore di Fermat

Se p e un numero primo ed n un numero intero naturale, allora $n^p - n$ è divisibile per p

La strategia dimostrativa che usò Eulero per dimostrare questo teorema è l'induzione completa

- Si verifica che la congettura è vera per n=1
- Si suppone per hp che la congettura sia vera per n

Un aiuto …

Per svolgere il quesito bisogna tener presente lo sviluppo della potenza n-sima di un binomio

$$(n+1)^p = n^p + \binom{p}{1} n^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1} n + 1$$

Vi ricordo anche che il coefficiente binomiale si può sviluppare nel seguente modo

$$\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!\,(p-q)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}{q(q-1)(q-2)\ldots 2\cdot 1}$$

Esempio

E' il numero di combinazioni di 5 elementi presi 3 alla volta

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{12} = 10$$

Excursus: proprietà del coefficiente binomiale

- Il coefficiente binomiale ha le seguenti proprietà:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Dimostrazione:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Il coefficiente binomiale: proprietà

- Proprietà n°2

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

- Dimostrazione

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)![n-(n-1)]!} = \binom{n}{n-1} = n$$

Il coefficiente binomiale: proprietà 3

- Proprietà n°3

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Dimostrazione

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k}$$

Proprietà 4

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \quad \text{ovvero} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Dimostrazione

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

considerando il fatto che

$(n-k)! = (n-k)(n-k-1)!$

ed allo stesso modo

$(k+1)! = (k+1)k!$

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)k!(n-k-1)!} =$$

.... segue

Si ha:

$$= \frac{(n-k)n!}{(k+1)(n-k)k!(n-k-1)!} + \frac{(k+1)n!}{(k+1)(n-k)k!(n-k-1)!}$$

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{(n-k+k+1)n!}{(k+1)k!(n-k)(n-k-1)!}$$

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Ancora sul coefficiente binomiale

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

- Dimostrazione

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{(n-k)} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Il coefficiente binomiale e le combinazioni

- Combinazioni semplici (senza ripetizioni)

Si chiama **combinazione semplice** una presentazione di elementi di un insieme nella quale non ha importanza l'ordine dei componenti e non si può ripetere lo stesso elemento più volte.

Quindi il numero delle combinazioni semplici di *n* elementi di lunghezza *k* si ottiene dividendo per *k*! il numero delle disposizioni semplici di *n* elementi di lunghezza *k:*

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Combinazioni con ripetizioni

- Quando l'ordine non è importante ma è possibile avere componenti ripetute si parla di **combinazioni con ripetizione**. Il numero di combinazioni con ripetizione di *n* oggetti di classe *k* è uguale a quello delle combinazioni senza ripetizione di *n*+*k*-1 oggetti di classe *k* ed è quindi uguale a:

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} \qquad \binom{2+4-1}{4} = 5$$

- Ad esempio, vi sono modi di distribuire a 2 bambini distinguibili 4 caramelle indistinguibili, contando anche i casi in cui uno dei bambini non riceve nessuna caramella: 0-4, 1-3, 2-2, 3-1, 4-0

Logica e Applicazioni

La famiglia di Caterina consiste di Daniele, Maria, Gioia e Enzo. Essi sono la madre, il padre, il fratello e la sorella di Caterina. Trova il nome del padre, della madre, del fratello e della sorella di Caterina sapendo che 1. Daniele non ha sorelle 2. Maria non è la madre di Caterina Risposta aperta Madre …….. Padre …….. Sorella …….. Fratello ……..	A Policrate che gli domandava quanti erano i suoi allievi, così rispose Pitagora: "I miei allievi possono essere suddivisi in insiemi disgiunti; in particolare - la metà coltiva la matematica - la quarta parte si dedica allo studio della natura - la settima parte ascolta con religioso silenzio le mie parole - inoltre ci sono tre allievi che non fanno nessuna delle cose precedenti" Quanti erano gli allievi di Pitagora?

Applicazione del principio di non contraddizione. Visto che Daniele non ha sorelle mentre il fratello di Caterina ha ovviamente almeno una sorella, Daniele sarà di conseguenza il padre. Da cui Enzo sarà il fratello. Visto che Maria non è la madre, allora la madre sarà ovviamente Gioia , da cui Maria sarà la sorella.	Gli insiemi sono disgiunti, nessuno coltiva due interessi contemporaneamente. Sia x il numero degli allievi. Allora: $x/2$ indica il numero di matematici $x/4$ indica il numero di naturalisti $x/7$ indica il numero di religiosi Quindi: $x/2 + x/4 + x/7 +3 = x$ Risolvendo l'equazione si ottiene $x=28$

Trovare il più piccolo numero > 100 che sia pari alla somma dei fattoriali delle sue cifre.	**Sia f(x) un polinomio a coefficienti interi tale che f(3) = 5. Se un intero n ha la proprietà che $f(n^3) = 15$, quali sono i possibili valori di n?**
Dimostrare che esistono infiniti numeri naturali n tali che : $n \mid 2^n + 2$, $n - 1 \mid 2^n + 1$.	Determinare tutti gli n interi tali che $37^{2006n} + 4 \cdot 37^{2n} + 7 \cdot 19^{5n}$ sia il prodotto di $k \geq 2$ interi consecutivi.