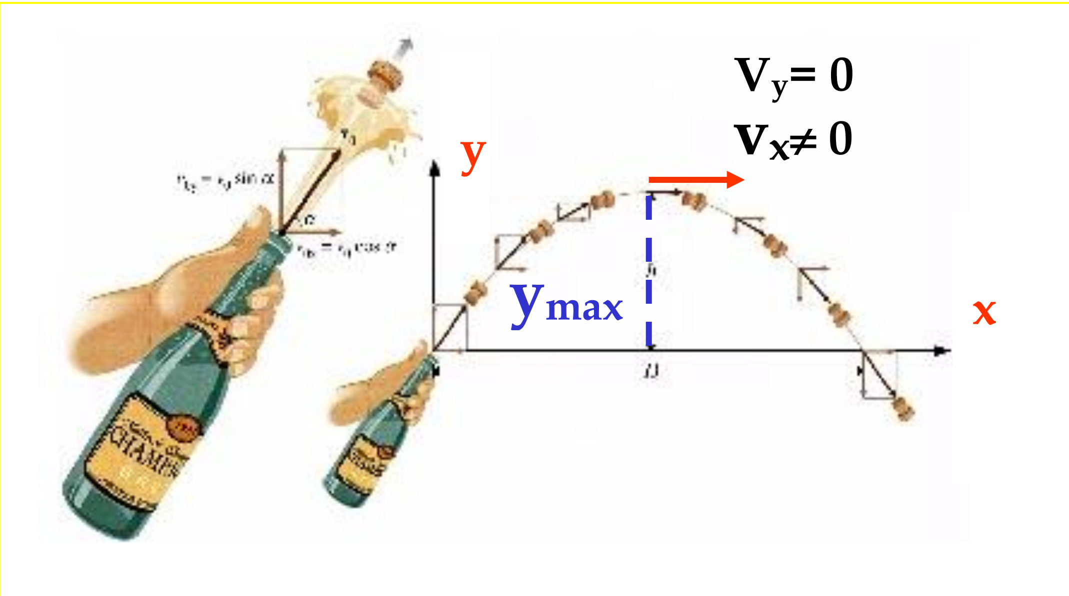
MOTI IN DUE DIMENSIONI



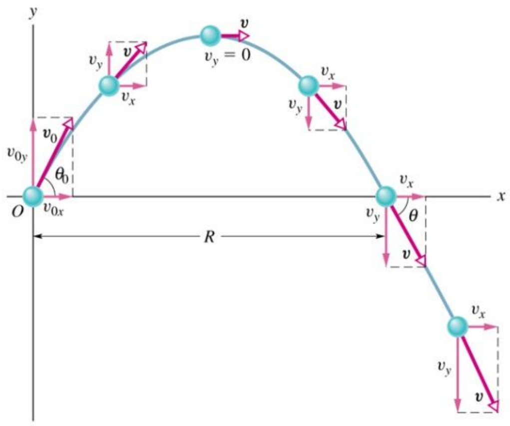


Questione di gradi.
Le comuni leggi della fisica affermano che per lanciare un proiettile alla massima distanza è necessario inclinare il cannone a 45° rispetto al suolo. Questa regola non sembra però essere applicabile alle rimesse con le mani: i calciatori infatti, così come i lanciatori del disco e del giavellotto, solitamente utilizzano inclinazioni inferiori, tra i 30 e i 35°. I due ricercatori hanno analizzato centinaia di lanci, effettuati con inclinazioni diverse, misurandone potenza e lunghezza: un complesso sistema di equazioni ha consentito loro di determinare che l'inclinazione ottimale per un lancio lungo deve essere compresa tra i 20 e i 35°.

Ci vuole una fisica bestiale...
Per Linthorne e Everett, questa differenza tra le comuni regole della balistica e quelle della fisica sportiva risiede nella struttura scheletrica e muscolare dell'uomo, che rende più semplice applicare una maggior forza al pallone ad angoli bassi. I calciatori, pur non essendo, tranne rarissime eccezioni, esperti di fisica, giungono a questa conclusione semplicemente grazie all'esperienza: le rimesse di professionisti ma anche di semplici appassionati si discostano infatti pochissimo dall'angolo ottimale. (dalla rivista Focus)

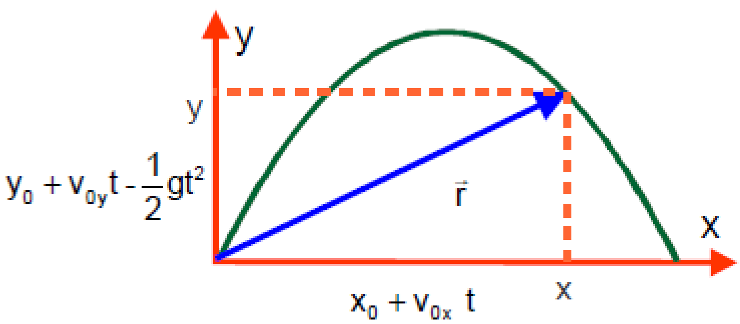


Abbiamo analizzato finora moti che avvengono lungo una sola direzione: il moto di un oggetto che si muove lungo una retta orizzontale, il moto di un oggetto che cade liberamente da una certa altezza h sono esempi di moto cosiddetto unidimensionale.
Nella vita di tutti i giorni si ha spesso a che fare con moti in due dimensioni: una palla da basket che viene lanciata nel tentativo di far canestro, un calcio d'angolo battuto durante una partita di calcio, un paracadutista che si lancia da un aereo in movimento, un proiettile sparato da un cannone sono solo alcuni dei numerosi esempi il cui studio cinematica richiede la conoscenza del moto in due dimensioni.
Durante il suo moto in due dimensioni, il mobile (che chiameremo per uso comune proiettile) subisce una accelerazione verso il basso dovuta alla accelerazione di gravità g che ovviamente si mantiene costante in modulo e diretta verticalmente verso il basso mentre non possiede accelerazione orizzontale. A un primo impatto lo studio del moto in due dimensioni potrebbe sembrare complicato ma possiamo semplificarlo analizzando singolarmente il moto lungo le due dimensioni.



Lungo la direzione orizzontale l'accelerazione è nulla e così la componente orizzontale della velocità rimane costante durante il moto (si tratta di un moto uniforme)

Il moto verticale è quello analizzato per il moto di caduta libera ovvero di un oggetto che si muove sottoposto ad una accelerazione g costante. Si tratta, pertanto, di un moto uniformemente accelerato.



Possiamo così schematizzare le leggi del moto:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \qquad [3]$$

Possiamo per semplicità porre l'origine degli assi coordinati nel punto di lancio del proiettile avendosi così $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ e possiamo rappresentare graficamente il moto. Dal grafico si può notare che la componente orizzontale della velocità rimane costante mentre quella verticale varia con continuità. La componente verticale della velocità si comporta come per una palla lanciata verticalmente verso l'alto. E' diretta inizialmente verso l'alto e la sua intensità diminuisce fino ad annullarsi quando il proiettile raggiunge la posizione più elevata della traiettoria. Poi la componente verticale della velocità inverte la sua direzione e la sua intensità va aumentando sempre più rapidamente.
Analizziamo ora il moto nel dettaglio.

EQUAZIONE DELLA TRAIETTORIA

Ci preoccupiamo inizialmente di trovare l'equazione della traiettoria.
Ricavo il tempo dall'equazione

$$x = v_{0x}t$$

Si ha

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

E sostituisco tale valore della equazione

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

ricavando

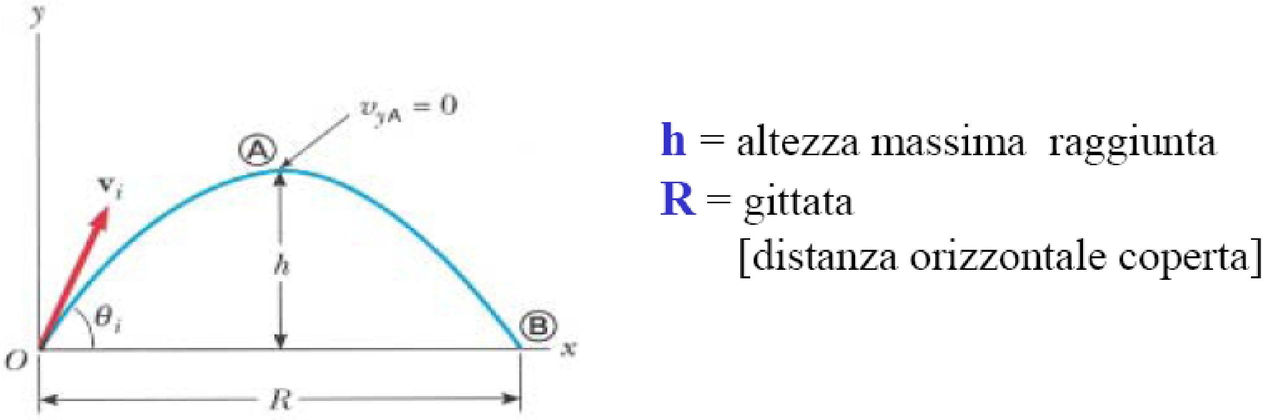
$$y = v_{0y}\frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{0x}^2}$$

Indico con b la quantità $\frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ e con a la quantità $\frac{1}{2v_{0x}^2}g$; entrambe le quantità sono costanti avendosi così l'equazione

$$y = -ax^2 + bx$$

che è l'equazione di una parabola che volge la concavità verso il basso.

LA GITTATA



Si dice gittata la distanza orizzontale tra il punto di lancio del proiettile e il punto in cui tocca nuovamente il suolo (alla stessa quota di partenza)

Quando il proiettile tocca il suolo la componente y della sua traiettoria si annulla. Dall'equazione di II grado ottenuta ponendo y=0 ricavo il tempo. Ricavo:

$t_1 = 0$ che rappresenta l'istante del lancio e $t_2 = \dfrac{2v_{0y}}{g}$

Questo valore di t prende anche il nome di tempo di volo.
Sostituendo il valore ottenuto nella equazione $x = v_{0x}t$ ricavo:

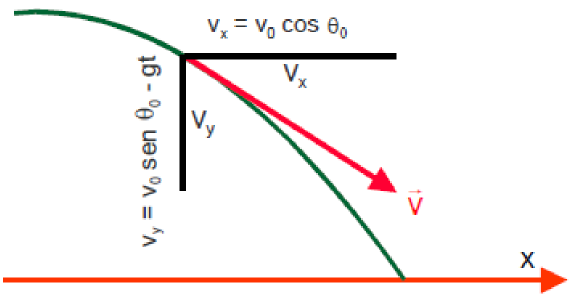
$x = \dfrac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$ che rappresenta il segmento cercato e detto Gittata R

LE CONDIZIONI INIZIALI

Molte volte conosciamo il cosiddetto angolo di lancio ovvero l'inclinazione rispetto all'asse orizzontale del lancio del proiettile.
Applicando le relazioni già note che legano un vettore e le sue componenti possiamo esprimere v_{0x} e v_{0y} come segue

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$

$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$



Se conosciamo l'angolo di alzo possiamo riscrivere la relazione che ci permette di calcolare la gittata G come segue

$$x = G = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

Si noti che la massima gittata si ha per $\alpha = 45°$

LA MASSIMA ALTEZZA RAGGIUNTA

Al vertice della traiettoria si ha $v_y = 0$ e cioè

$v_0 \sin\alpha - gt = 0$ da cui ricavo il tempo $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

La massima altezza raggiunta si ricava sostituendo nell'equazione della traiettoria il valore di t così ricavato avendosi:

$$y = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

La parabola di sicurezza

Come si vede, se una particella ha velocità iniziale costante (v_0), non è difficile ricavare l'altezza massima (y_{max}) e la gittata (x_{max}).
In generale, l'altezza massima può essere calcolata anche dalla funzione v (y), in quanto la velocità nella posizione di massima altezza ha componente verticale nulla.
Nell'ipotesi che $y_0 = 0$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$$

Ponendo $v_y^2 = 0$

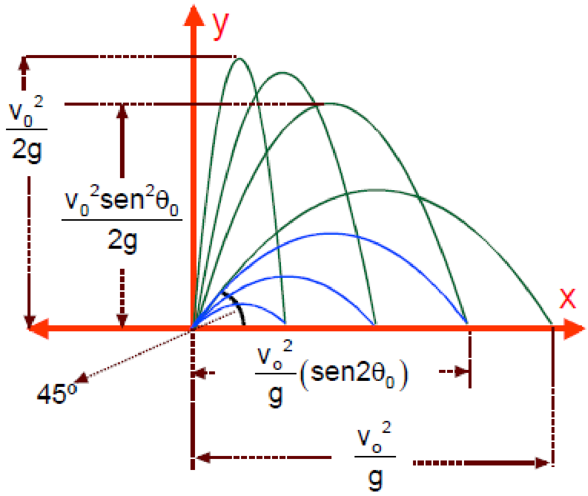
si ha

$$0 = v_{0y}^2 - 2gy_{max}$$

Da qui posso ricavare y_{max}

$$y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2\,(\sin\theta)^2}{2g}$$

Si noti che l'altezza massima dipende dall'angolo di elevazione.



Poiché la funzione seno assume i valori compresi tra 0 e 1, non tenendo conto dei valori negativi, allora il massimo valore dell'altezza si ottiene quando $\sin\theta = 1$ cioè quando $\theta = 90°$.
Invece la massima gittata si ottiene dalla funzione x(t).

L'espressione della gittata ottenuta è

$$x = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

Se esprimiamo la gittata in funzione dell'angolo di alzo, si ottiene

$$x = \frac{2v_0\cos\theta \cdot v_0\sin\theta}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$$

Il maggiore valore possibile della x si ottiene quando $\sin 2\theta = 1$

cioè quando

$2\theta = 90°$ ovvero quando $\theta = 45°$

Se invece vogliamo trovare l'angolo per il quale il proiettile colpisce un punto bel preciso dobbiamo procedere come segue:

Si parte dall'equazione della parabola ovvero dalla legge oraria che descrive il moto del proiettile (in cui si è tenuto conto che x_0=0 e y_0=0:

$$y = tg\theta_0 x - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\theta_0}$$

Tenendo conto dell'identità

$$\frac{1}{\cos^2\theta_0} = \mathrm{tg}^2\theta_0 + 1$$

Si ha

$$y = tg\theta_0 x - \frac{gx^2}{2v_0^2}(tg^2\theta_0 + 1)$$

$$y = tg\theta_0 x - \frac{gx^2}{2v_0^2} tg^2\theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Posso esplicitare l'espressione così ricavata rispetto a θ

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} tg^2\theta_0 - tg\theta_0 x + \frac{gx^2}{2v_0^2} + y = 0$$

Ottenendo un'equazione di secondo grado in $tg\theta_0$ a cui soluzione è:

$$tg\theta_0 = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(\frac{gx^2}{2v_0^2} + y\right)}}{2\frac{gx^2}{2v_0^2}} = \frac{v_0^2}{xg} \pm \frac{1}{x}\sqrt{\frac{v_0^4}{g^2} - x^2 - 2\frac{v_0^2 y}{g}}$$

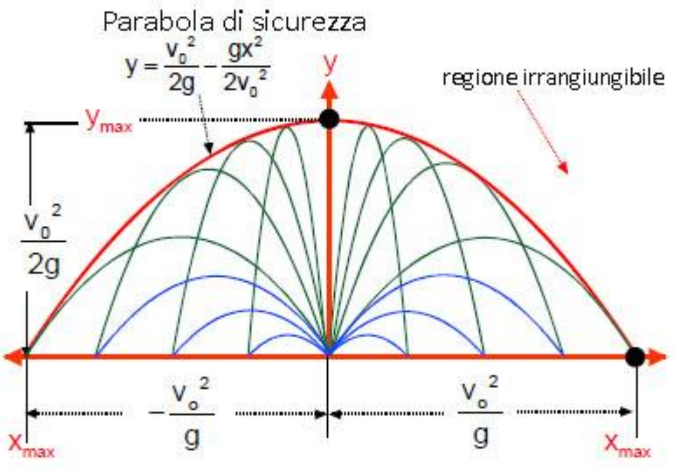
Si noti che l'equazione non ha soluzione quando la quantità sotto radice è negativa

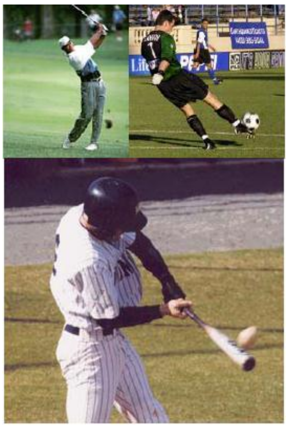
$$y > \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Ovvero quando

$$y > \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

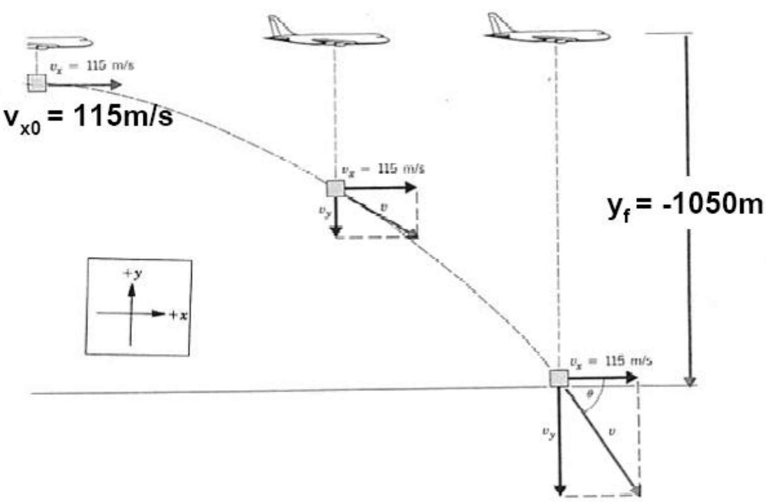
Questo significa che i punti del piano al di fuori della curva descritta dall'equazione $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$ non sono raggiungibili dal proiettile lanciato con quell'angolazione





Fisica e realtà: lancio di materiali da soccorso

Un aereo impiegato per il soccorso durante la guerra in Kosovo viaggia alla velocità di 115m/s e ad un’altezza dal suolo di 1050 metri. Il pilota deve lanciare un pacco contenente materiale per il pronto soccorso ma deve stare bene attento affinché il pacco arrivi proprio nell’accampamento distante circa 1600 metri dal punto in cui decide di sganciare il pacco. Riuscirà nell’ardua missione?



$$\begin{cases} x_f = x_i + v_{x0}\,t \\ y_f = y_i + v_{y0}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

moto orizzontale: rettilineo ed uniforme
moto verticale: uniformemente accelerato

In questo caso, la velocità iniziale ha solo la componente lungo x , mentre la componente lungo y è nulla
Dalla relazione scritta sopra è possibile ricavare il tempo che impiega il pacco di pronto soccorso per arrivare al suolo e a che distanza dal punto di lancio il pacco arriva

$$\begin{cases} x_f = x_i + v_{0x}t \\ y_f = y_i + v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Da cui si ottiene

$$\begin{cases} x_f = 0 + (115m/s)t \\ -1050m = 0 + 0t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 14,6s \\ x_f = 1679m \end{cases}$$

Esercizi svolti

1. **Una palla viene lanciata dal suolo verso l'alto con un angolo θ = 45° rispetto all'orizzontale e velocità in modulo pari a v_0 = 20 m/s.**
   Determinare:
   a. il tempo impiegato per raggiungere la quota massima;
   b. la quota massima raggiunta.

a) La palla raggiunge la massima quota quando la componente verticale v_y della velocità è nulla, cioè quando $v_y = v_{0y} - gt = 0$
da cui si ricava:

$$t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\theta}{g} = 1,4s$$

b) la quota massima si ottiene dalla legge del moto lungo y per $t = \dfrac{v_{oy}}{g}$:

$$y = y_o + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 = 0 + v_{0y} \cdot \frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{v_{oy}}{g}\right)^2 = \frac{v_{0y}^2 \cdot \sin^2\theta}{2g} = 10,2m$$

2. **Un proiettile sparato verticalmente verso l'alto, a partire da una torre alta h = 30 m, raggiunge un'altezza massima h_{max}=330 m rispetto al suolo.**
   a) Calcolare quanto vale la velocità a cui il proiettile viene sparato.
   b) Se il proiettile fosse sparato dalla stessa quota con la stessa velocità in modulo, ma con una angolazione di α=60° rispetto all'orizzontale, quanto varrebbe l'altezza massima raggiunta?
   c) Calcolare inoltre il tempo impiegato prima che il proiettile cada al suolo, e lo spazio percorso nella direzione x.

Le equazioni generali del moto del proiettile:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ v_x = v_{0x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

a) se il proiettile è sparato verticalmente verso l'alto, il moto si sviluppa solo lungo y calcolo la velocità iniziali utilizzando le equazioni in y con $y_0 = 30m, y = 330m, v_y = 0$

$$\begin{cases} y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ 0 = v_{0y} - gt \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ t = \frac{v_{0y}}{g} \end{cases}$$

$$y - y_0 = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2}g \cdot \frac{v_{0y}^2}{g^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_{0y}^2}{g} \quad \Rightarrow \quad v_{0y} = \sqrt{2g(y - y_0)} = 76{,}7m/s$$

b) supponiamo ora che il proiettile sia sparato con la stessa velocità in modulo (ossia v=76,6m/s) ma angolazione $\theta = 60°$ rispetto all'orizzontale
Calcolo l'altezza massima raggiunta utilizzando le equazioni generali del moto parabolico in y,

$v_{0y} = v\sin\theta$ e $v_y = 0$

$$\begin{cases} y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_{0y} = gt \end{cases}$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_{0y}^2}{g} = 255m$$

c) per calcolare il tempo impiegato dal proiettile prima che cada al suolo utilizzo l'equazione in y con $v_{0y} = v \cdot \sin\theta = 66{,}42m/s$ ed imponendo y=0

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}}{g} = \begin{cases} 14s \\ -0{,}43s \end{cases}$$

Il tempo impiegato è quindi 14s
Lo spazio percorso in x si ottiene
sostituendo il tempo impiegato appena calcolato, nella equazione del moto lungo x, con $x_0 = 0$ e $v_{0x} = v \cdot \cos 60$

$$x = x_0 + v_{0x}t = v_{0x}t = 537m$$

3. Un arciere vuole colpire con una freccia una mela su un albero ad altezza h=12m rispetto all'arciere. La distanza in linea d'aria tra arciere e bersaglio sia s=35m. L'angolo di mira dell'arciere sia $\alpha = 30°$ rispetto all'orizzontale. Si determini:

A1 - con quale velocità (in modulo) deve essere scoccata la freccia affinché colpisca il bersaglio;
A2 - in quanto tempo la freccia raggiunge il bersaglio;
A3 - l'altezza massima raggiunta dalla freccia.

B - Se la velocità massima con cui l'arciere è in grado di scoccare la freccia è $v_{max} = 45$ m/s, si determini il valore minimo dell'angolo di mira (rispetto all'orizzontale) che consente all'arciere di colpire il bersaglio.

C - All'istante t=0la mela si stacca dal ramo e cade, mentre l'arciere sta mirando in direzione della mela a un angolo di 17° rispetto all'orizzontale. Dato un tempo di reazione dell'arciere pari a $\Delta t = 0{,}2$ s si determini con quale velocità l'arciere deve scagliare la freccia per colpire in volo la mela.

- Calcoliamo innanzitutto la distanza lungo l'asse x dell'arciere dalla mela. Siccome distano in linea d'aria s=35m e verticalmente h=12m, otteniamo: $d = \sqrt{s^2 - h^2} \approx 32{,}88m$

  L'equazione del moto per la freccia considerata come punto materiale è quella di un moto uniforme lungo l'asse x ed uniformemente accelerato lungo l'asse y :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha \\ y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

  dove $\alpha = 30°$ è l'angolo di mira rispetto all'orizzontale e v_0 è il modulo incognito della velocità iniziale della freccia. Possiamo ricavare v_0 dalla prima equazione e sostituirlo nella seconda ottenendo:

$$v_0 = \frac{x(t)}{t\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad y(t) = x(t)\tan\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

Nell'istante t_f in cui la freccia colpisce la mela si ha $x(t_f) = d$ e $y(t_f) = h$ per cui l'equazione precedente ci permette di ricavare t_f e conseguentemente v_0:

$$h = d \cdot \tan\alpha - \frac{1}{2} g \cdot t_f^2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} t_f = \sqrt{\dfrac{2}{g}(d\tan\alpha - h)} \approx 1{,}19s \\ v_0 = \dfrac{d}{t_f \cos\alpha} \approx 31{,}82 m/s \end{cases}$$

L'istante di massima ascesa per la freccia si ricava annullando la velocità verticale v_y:

$$v_y(t_m) = v_0 \sin\alpha - g \cdot t_m = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_m = \frac{v_0}{g}\sin\alpha \approx 1{,}62s$$

Siccome però questo istante t_m è successivo all'istante t_f nel quale la freccia colpisce la mela, la freccia non vi arriva mai, e la massima ascesa è effettivamente h=12m.

Per risolvere il punto b) bisogna ricavare la traiettoria dalle equazioni del moto (eliminando il tempo) e considerare l'equazione risultante come funzione dell'angolo. Ricordando che

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$ e che v_0 è ora $v_{\max} = 45 m/s$ si ha:

$$t_f = \frac{d}{v_{\max}\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad h = d\tan\alpha - \frac{g \cdot d^2}{2v_{\max}^2} \cdot \left(1 + \tan^2\alpha\right)$$

Questa è una equazione di secondo grado in $\tan\alpha$ le cui soluzioni sono:

$$\tan\alpha = \frac{1}{gd} \cdot \left(v_{\max}^2 \pm \sqrt{v_{\max}^4 - 2v_{\max}^2 hg - g^2 d^2}\right) \approx \begin{cases} 12{,}09 \\ 0{,}462 \rightarrow \alpha \approx 24°77' \end{cases}$$

Ovviamente la soluzione da scegliere è quella per cui la tangente è minore. Si noti che per valori sufficientemente piccoli di $v_{\max}$ non esistono soluzioni (la freccia non è in grado di arrivare all'altezza della mela). Infine per risolvere il punto c) scriviamo le equazioni del moto per la freccia $(x_F(t), y_F(t))$, analoghe a prima ma traslate temporalmente di $\Delta t = 0{,}2$ s, ed anche per la mela $(x_M(t), y_M(t))$ che ora ha un moto di caduta libera:

$$\begin{cases} x_F(t) = v_0(t-\Delta t)\cos\alpha \\ y_F(t) = v_0(t-\Delta t)\sin\alpha - \frac{1}{2}g\cdot(t-\Delta t)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M(t) = d \\ y_M(t) = h - \frac{1}{2}g\cdot t^2 \end{cases}$$

Per risolvere poniamo $x_F(t_f) = x_M(t_f)$ il che ci permette di ricavare l'istante di impatto:

$$d = v_0(t_f - \Delta t)\cos\alpha \rightarrow t_f = \Delta t + \frac{d}{v_0\cos\alpha}$$

Sostituendo t_f nell'ulteriore vincolo $y_F(t_f) = y_M(t_f)$ possiamo ricavare v_0:

$$h - \frac{1}{2}g\cdot\left(\Delta t + \frac{d}{v_0\cos\alpha}\right)^2 = v_0\sin\alpha\cdot\frac{d}{v_0\cos\alpha} = \frac{1}{2}g\cdot\left(\frac{d}{v_0\cos\alpha}\right)^2$$

nell'equazione precedente i termini quadratici in d si semplificano. Inoltre possiamo riconoscere la velocità $v' = -g\Delta t$ che la mela assume e la posizione $h' = h - \frac{1}{2}g\Delta t^2$ in cui la mela si trova dopo il tempo Δt:

$$h' + \frac{v'd}{v_0\cos\alpha} = d\tan\alpha$$

ricavare il v_0 richiesto da quest' ultima è immediato, ricordando che ora $\alpha = 17°$:

$$v_0 = \frac{v'd}{d\tan\alpha - h'}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} \approx 38{,}51 m/s$$

infine verifichiamo che l'altezza alla quale avviene il contatto è maggiore di zero (ovvero che effettivamente la mela viene colpita prima di toccare terra):

$$y_M(t_f) = h - \frac{1}{2}g\cdot\left(\Delta t + \frac{d}{v_0\cos\alpha}\right)^2 \approx 6{,}14m$$

4. **Una biglia imbocca una rampa di scale con velocità $v_0 = 4{,}0m/s$. Considerando che ogni gradino è alto h=0,15m e profondo p=0,2m, determinare il primo gradino colpito dalla buca.**

Scriviamo la legge oraria della biglia (si tratta ovviamente di un moto parabolico in due dimensioni)

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2}g\cdot t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{v_0} \\ y = \frac{1}{2}g\cdot\frac{x^2}{v_0^2} \end{cases}$$

La retta tangente ai gradini ha equazione

$$y = \frac{h}{p}x$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2} \cdot x^2 \\ y = \frac{h}{p} \cdot x \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 g}{2v_0^2} = \frac{h}{p} \cdot x$$

Da cui ricavo *x=2,45m* e dunque il numero dei gradini sarà *n=(2,45/0,2)+1*

Fisica e realtà:

Esercizio n°1: Calcio d'angolo

Un giocatore di calcio colpisce la palla ad un angolo di 30° con l'orizzontale con una v_0 = 20 m/s . Supponendo che la palla si muova in un piano verticale. Trovare:
a) L'istante in cui la palla raggiunge il più alto punto della sua traiettoria.
b) Qual è l'altezza massima raggiunta dalla palla?
c) Qual è lo spostamento orizzontale della palla e per quanto tempo la palla rimane in aria ? Qual è la velocità della palla quando raggiunge il suolo?

Esercizio n°2

Una pietra viene scagliata con un angolo di 30° con velocità 20 m/sec da un edificio alto 45 m.

a) Quanto tempo la pietra rimane in volo?

b) Quale è la velocità con cui la pietra tocca il suolo?

c) In che punto la pietra tocca il suolo?

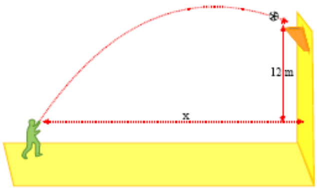
Esercizio n°3: esercizio del cactus

Un uomo si lancia da un aereo in fiamme che viaggia alla velocità di 1200Km/h. Riesce ad aprire il paracadute e a salvarsi ma forse non riesce ad evitare gli enormi cactus che crescono nella zona. Dopo quanto tempo lo sventurato toccherà il suolo?
Se la piantagione di cactus si trova a 250m dal luogo del lancio, riuscirà ad evitare i cactus? Con che velocità toccherà il suolo? (Si consideri trascurabile la resistenza dell'aria)

Esercizio n°4

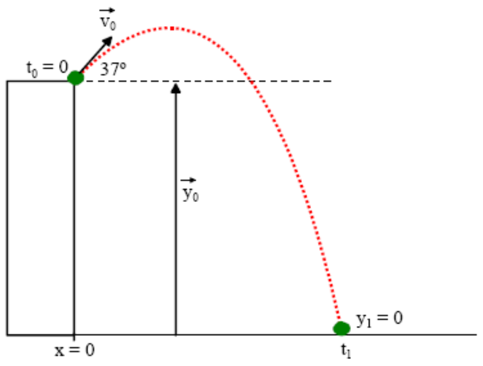
Un cannone spara un proiettile alla velocità di 100 m/s ad un certo angolo con il piano orizzontale. Si calcoli l'angolo che causa la gittata massima e il valore della gittata. Si calcoli inoltre l'angolo necessario per colpire un bersaglio a 500 m di distanza.

Esercizio n°5: nel campo di pallacanestro

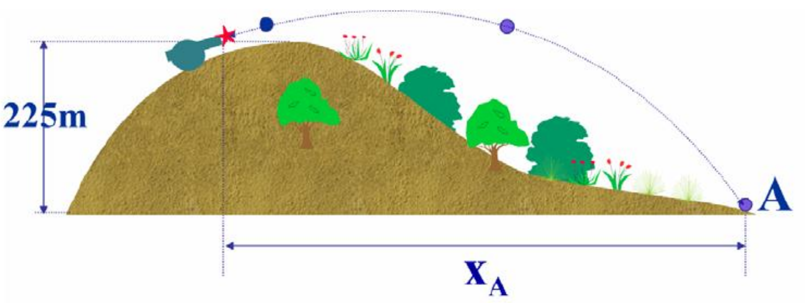


1. Carlo cerca di fare canestro e lancia la palla formando un angolo di 53° rispetto all'orizzontale e con una velocità iniziale di 20m/s. A che distanza dal canestro si deve posizionare considerando che l'altezza tra la sua mano e il canestro è 12m? *[x=23,75]*

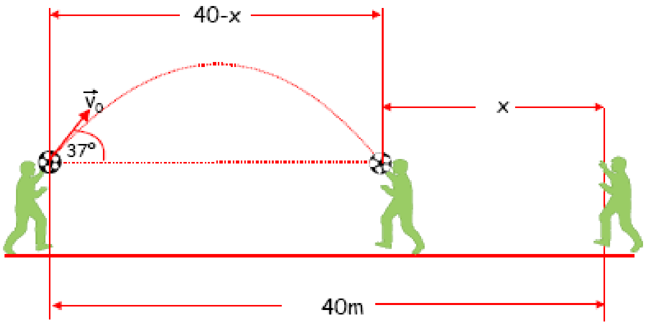
2. Da un edificio alto 125m viene sparato un proiettile con una velocità iniziale di 720Km/h che forma un angolo di 37° rispetto all'orizzontale. Si calcoli:
   a) il tempo che impiega il proiettile per arrivare al suolo
   b) la posizione e la velocità 24 secondi dopo lo sparo
   c) la distanza del proiettile dal punto di lancio



3. Un cannone spara un proiettile dalla cima di una collina alta 225m, con una velocità iniziale di 100m/s; il proiettile toccherà il suolo nel punto A(x,0) dopo 15 secondi. Si determini:
   a) l'angolo di elevazione del cannone;
   b) la distanza orizzontale totale percorsa dal proiettile
   c) la velocità con cui il proiettile toccherà il suolo



4. Una persona lancia un pallone (si assimila il pallone ad un punto materiale) con una velocità iniziale di 16,7m formando un angolo di 37° rispetto all'orizzontale. All'istante in cui il pallone viene lanciato, una seconda persona che si trova a 40m di distanza inizia a correre verso il pallone di prenderlo. Supponendo che la prenderà alla stessa altezza a cui è stata lanciata, si determini:
   a) il tempo che impiega per prendere il pallone
   b) la distanza percorsa dalla seconda persona
   c) l'accelerazione della seconda persona
   d) la velocità del pallone nel momento in cui viene preso



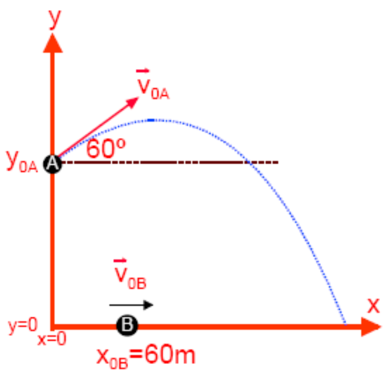
5. Due proiettili vengono lanciati verticalmente verso l'alto con due secondi di differenza l'uno dall'altro, il primo con velocità iniziale di 40m/s e il secondo con la velocità di 60m/s

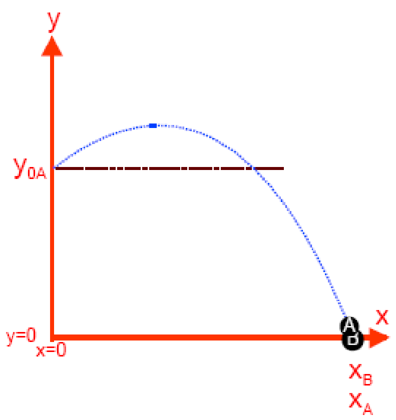
a) dopo quanto tempo i due proiettili raggiungeranno la stessa altezza?
b) Quale velocità avrà ciascun proiettile in quell'istante?

6. Dall'alto di un edificio di 100m si spara un proiettile con velocità iniziale di 100m/s con un angolo di elevazione di 37°. Si deterrmini:
   a) il tempo che il proiettile impiega per arrivare al suolo
   b) la distanza orizzontale dall'edificio fino al punto di impatto
   c) l'altezza massima che il proiettile raggiunge

7. Un punto materiale A è lanciato con una velocità iniziale v_{0A} e con un angolo di 60° rispetto all'orizzontale. Il lancio avviene da un'altezza h rispetto al piano orizzontale e contemporaneamente un altro oggetto B si muove con velocità costante di 20m/s. nell'istante in cui l'oggetto A viene lanciato, l'oggetto B ha già percorso 60m. La particella A urta B 12 secondi dopo il lancio.

   Calcolare la velocità iniziale v_{0A}
   Calcolare l'altezza da cui viene lanciata A





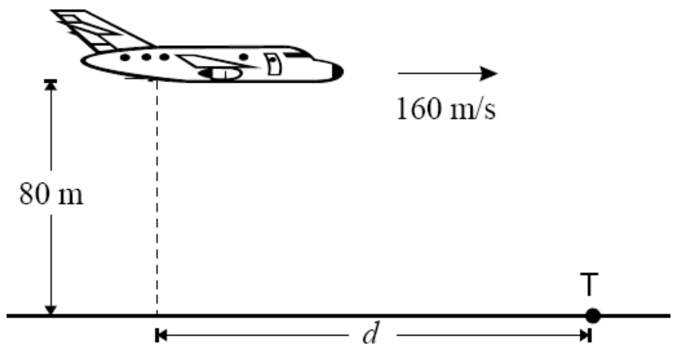
8. Si lanci una pietra con una velocità iniziale di 60m/s e con un angolo di 30° rispetto alla direzione orizzontale dall'alto di un edificio di 30m. Si determini:
   a) l'altezza massima raggiunta dalla pietra
   b) il tempo di volo
   c) la velocità della pietra quando sta per toccare terra
   d) la gittata

9. Si lancia un proiettile dall'alto di una torre in direzione orizzontale e con la velocità di 40m/s. Si calcoli nell'istante t=3,1s le componenti orizzontale e verticale della velocità e l'angolo formato con l'asse positivo delle x

10. Un proiettile viene sparato da una torre alta h = 30 m con una angolazione di α=30° rispetto all'orizzontale. Dopo un tempo t = 2 s il proiettile raggiunge la quota massima. Calcolare:
    a) il modulo v_0 della velocità con cui il proiettile è stato sparato e la quota massima raggiunta;

b) il tempo impiegato prima che il proiettile cada al suolo.
c) la distanza orizzontale x massima raggiunta dal proiettile.

11. Dalle Olimpiadi della fisica

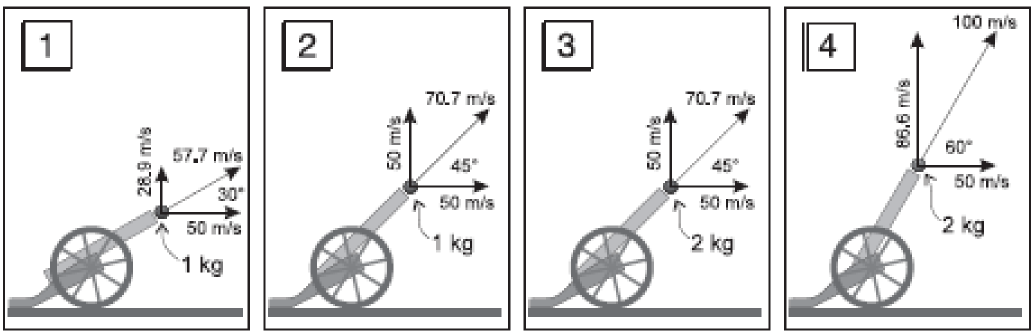


Un aereo vola orizzontalmente alla velocità di 160m/s a 80m di altezza dal suolo; quando si trova sulla verticale di un punto a distanza d dal punto prefissato T, sgancia un contenitore. Assumendo che l'accelerazione di gravità valga $10 \mathrm{m/s^2}$ e che la resistenza dell'aria sia trascurabile, il contenitore cadrà esattamente nel punto T se d vale

A 40 m B 160 m C 320 m D 640 m E 2560 m

12.**(Dalle Olimpiadi della Fisica 2006)**

La figura mostra quattro cannoni che stanno sparando proiettili di massa diversa e con diversi angoli di alzo (angolo tra l'orizzontale e la direzione di sparo) raggiungendo diverse gittate. Nei quattro casi la componente orizzontale della velocità dei proiettili è uguale. Si supponga trascurabile la resistenza dell'aria. In quale caso la gittata del cannone è massima?



13. Quanto tempo prima un aereo che vola a 700 metri di altezza e alla velocità di 200Km/h deve sganciare una bomba per colpire il bersaglio? E se vola alla velocità di 400Km/h?

14. Se si lancia orizzontalmente un oggetto dall'alto di una torre con una velocità di 40m/s. Si calcoli, dopo 3,1 secondi dal lancio:
a. Le componenti orizzontale e verticale della velocità
b. L'angolo formato rispetto all'asse x

a) v_x 40 m/s; v_y 31 m/s b) − 37,78º

15. Da un punto situato 100 metri sopra il livello del mare viene lanciato un oggetto orizzontalmente con una velocità iniziale di 400m/s. Si calcoli:
a. il tempo che l'oggetto impiegherà per arrivare in acqua;
b. a che distanza arriva rispetto al punto di lancio;
c. con che velocità arriverà in acqua.

a) 4,47 s b) 1778 m c) $(400i\ 44,7j)$ m/s

16. Da un'altezza di 50 metri viene lanciato un oggetto con una velocità iniziale di 40m/s e con un angolo di 30° rispetto all'orizzontale. Si determini:
a. l'istante in cui l'oggetto giungerà su un'altura di fronte alta 10 metri;
b. La velocità quando ha percorso una distanza orizzontale di 60m;
c. La distanza orizzontale percorsa dal punto di lancio al punto di arrivo al suolo

a) 5,46 $[s]$ b) $(34,6\hat{i}\ 2,7\hat{j})$ m/s c) 198,8 $[m]$

17. Un proiettile viene lanciato con una velocità iniziale di 50m/s formando una direzione di 37° rispetto all'orizzontale. Si determini:
a. La massima altezza a cui arriverà il proiettile;
b. La posizione e la velocità dopo 2 secondi;
c. Il tempo di volo

a) 45 $[m]$ b) r = (80i + 40j) m v = (40i 10j)m/s c) 6[s]

18. Da un edificio alto 125 metri viene lanciato un proiettile inclinato di 37° con una velocità di 720Km/h. Si determini:
a. Il tempo che impiega il proiettile per raggiungere il suolo;
b. La distanza orizzontale dall'edificio fino al punto di impatto al suolo;
c. L'altezza massima raggiunta

a) 25 $[s]$ b) 4000 $[m]$ c) 845 $[m]$

19. Un motociclista vuole battere il record di salto sollevandosi sopra una rampa inclinata di 30° e lunga 30 metri a 108Km/h. Che distanza orizzontale percorrerà dal punto in cui lascia la rampa fino al punto in cui tocca il suolo?

98,46m

20. Un cannoncino spara coriandoli è inclinato di 45°. Supposto uno dei coriandoli assimilabile a un punto materiale si calcoli la sua massima altezza e la gittata

21. Un aereo da guerra si muove orizzontalmente a 1500 metri di altezza con una velocità di 500Km/h quando sgancia una bomba. Quanto tempo impiega la bomba a raggiungere il suolo? 17,3s

22. Si innesca un colpo di mortaio con un angolo di elevazione di 30 ° e una velocità iniziale di 40 m/s su un terreno orizzontale.
Si calcoli:
a) Il tempo necessario per raggiungere il suolo.
b) La natura del moto.
c) L'angolo che il vettore velocità forma con l'orizzontale al momento dell'impatto con il suolo.

a) 4s b) 138,56m c) – 30°

23. Un cannone spara un proiettile con un angolo di elevazione di 45° e una velocità iniziale di 150m/s su un terreno orizzontale. Sapendo che ad una distanza di 2200 metri rispetto al punto di lancio, si trova una parete verticale, si determini a che altezza della parete si ha l'impatto del proiettile

48,89[m]

24. Un atleta si cimenta nel lancio del peso, lanciando un peso con un'angolatura dell'avambraccio di 53° e imprimendo una velocità iniziale di 20m/s. A che distanza dal punto di lancio giunge il peso tenuto conto che l'altezza massima raggiunta è di 12 metri? 23,91 metri

25. Se si lancia un proiettile in modo tale che la sua gittata sia il triplo della sua altezza massima, qual è il suo angolo di lancio? 53,1°

26. Qual è la velocità minima affinché un oggetto giunga dall'altra parte di un ponte largo 7,5m? Quanto tempo impiegherà per giungere dall'altra parte? 8,66m/s. 1,22s

27. Un cannone spara proiettili con un angolo di elevazione di 50° e una velocità di 400 m/s da un'altura di 10m. Quanto in alto su una scogliera a 0,5 km di distanza il proiettile subisce l' impatto? 586,97m

28. Un oggetto viene lanciato con una velocità di 20 m/s e con un angolo di 53 °. Ad una distanza di 36 metri entra in una finestra che si trova a 2 metri di altezza e a 2,7m rispetto al tetto? Quando raggiunge l'edificio è in fase di salita o di discesa?

29. Un oggetto viene lanciato con una velocità iniziale v_0 formando un certo angolo con l'orizzontale. Se il volo dura 2,2s, si calcoli la massima altezza raggiunta. 6.05m

30. Una pietra è stata lanciata in direzione orizzontale; all'istante t = 0,5s la velocità della pietra è 1,5 volte il valore della velocità iniziale. Determinare l'entità del velocità iniziale della pietra. 4,47m/s

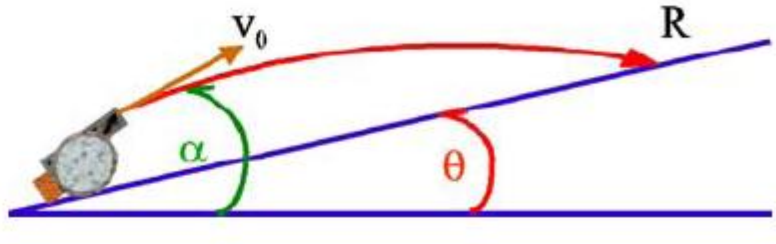
31. Dimostrare che se la velocità iniziale con cui viene lanciato un proiettile è v0 la massima gittata si ottiene per un angolo di elevazione di 45°

32. Un cannone spara un colpo con una velocità di 200 m/s. Il cannone si trova sulla sommità di una collina di 500m di altezza rispetto al piano orizzontale. L'angolo di elevazione è di 15 ° rispetto all' orizzontale; si determini:
    a) La distanza orizzontale
    b) La velocità al momento dell'impatto.

a. 3174,03m b. v = 193,2i-112,5j

33. Un motociclista scende una rampa di 40 [m] inclinata con un angolo di 37 ° e salta con una velocità di 40 m/s. Si Calcoli la distanza orizzontale fino a che tocca il suolo. 179,14 [m]

34. Un cannone è posto alla base di una collina il cui angolo di inclinazione rispetto all'orizzontale è θ. Se la canna fa un angolo α rispetto al piano orizzontale e spara un proiettile con velocità v_0, trovare a che distanza misurata lungo la collina il proiettile cadrà.



$$R = \frac{2v_0^{\,2}\left[tg(\alpha) - tg(\theta)\right]\sqrt{1+tg^2(\theta)}}{g\left[1+tg^2(\alpha)\right]}$$