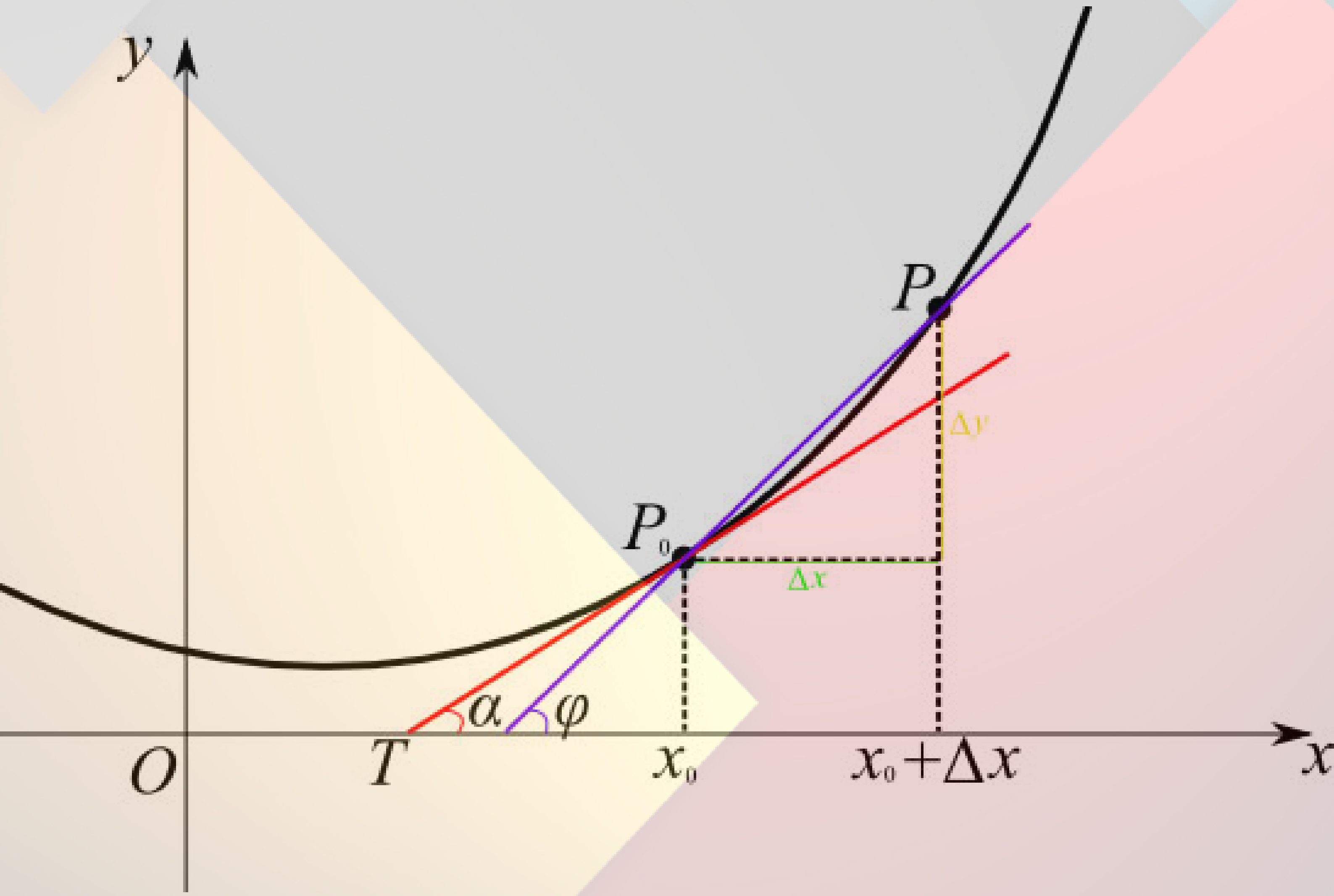
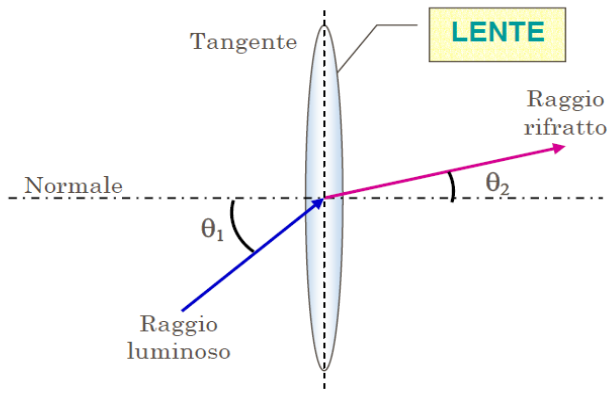
Le derivate



1. Introduzione

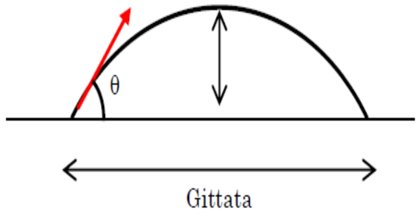
I due fondamentali capitoli dell'Analisi Matematica sono il calcolo differenziale e il calcolo integrale. Il calcolo differenziale nacque nel XVII secolo ad opera di Newton e Leibnitz. Alle idee basilari e allo sviluppo del calcolo differenziale si giunse attraverso l'esigenza di risolvere due tipi di problemi: problemi di tipo fisico legati alla nozione di velocità istantanea e alla risoluzione di problemi di ottica geometrica e problemi di tipo geometrico legati alla determinazione della tangente ad una curva in un punto.

L'interesse degli studiosi del tempo si riversava in modo particolare sull'ottica e sugli studi astronomici che ne derivavano: le osservazioni astronomiche, infatti, necessitavano di sistemi ottici precisi e attendibili, ottenuti dalla composizione di lenti di cui se ne conoscessero tutte le caratteristiche.
D'altronde, per studiare il passaggio della luce attraverso una lente, era necessario conoscere l'angolo secondo cui il raggio colpiva la superficie della lente, per poter poi applicare la Legge di Rifrazione.
L'angolo che interessava era quello formato dal raggio luminoso e dalla normale alla curva.
Poichè la normale ad una curva si definisce attraverso la retta tangente, il problema si riconduceva alla ricerca di quest'ultima.

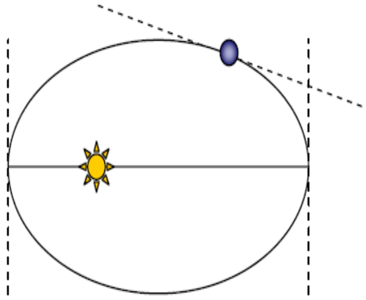


La necessità di definire la tangente ad una curva si riscontrava anche nello studio dei moti: com'è noto, la direzione del moto di un corpo coincide, in ciascun punto della sua traiettoria, con la tangente alla traiettoria nel punto.
Un ulteriore problema affrontato in questo secolo fu quello correlato alla ricerca dei MASSIMI e dei MINIMI di una funzione: in pratica, esso si traduceva nella ricerca dell'angolo che forniva la gittata massima e nel calcolo della mssima distanza assunta da un pianeta rispetto al Sole, durante il suo moto ri-

voluzionario.

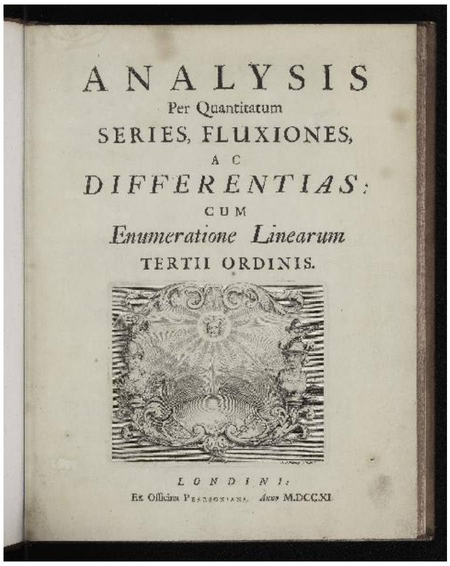


Moto parabolico



Traiettoria della Terra intorno al Sole

Una delle menti più geniali del XVII secolo fu, senza dubbio, quella dell'inglese Isaac NEWTON; egli fu in grado di individuare le idee più valide nella gran massa di dichiarazioni fatte dai suoi predecessori e di svilupparle a tal punto da ottenere incredibili risultati nel campo della ricerca scientifica del '600. Spinto ed incoraggiato da grandi personaggi come il suo professore Barrow e l'astronomo Halley, Newton si dedicò dapprima allo studio delle serie infinite, scoprendo che la loro algebra era regolata dalle stesse leggi generali dell'algebra che operava con quantità finite.
Newton redasse e pubblicò un gran numero di esposizioni della sua analisi infinita.

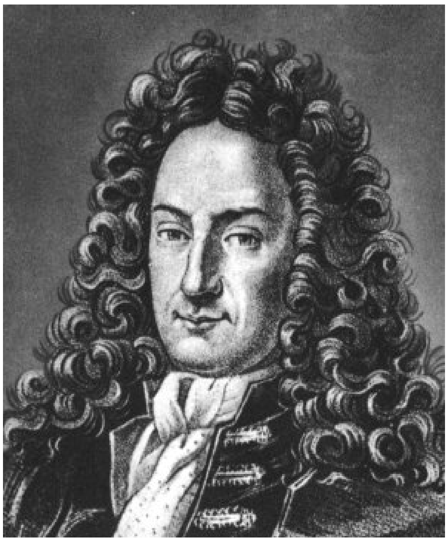


ANALYSIS
Per Quantitatum
SERIES, FLUXIONES,
AC
DIFFERENTIAS:
CUM
Enumeratione Linearum
TERTII ORDINIS.

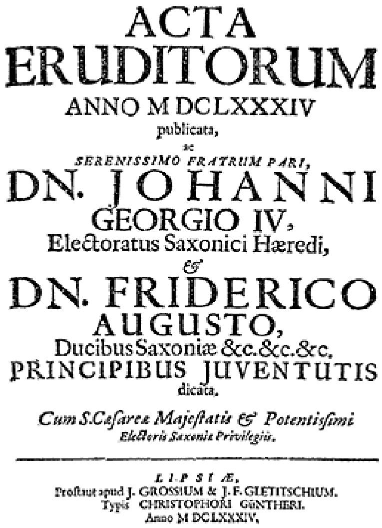
LONDINI:
Ex Officina Pearsoniana. Anno M.DCCXI.

La prima esposizione sistematica del calcolo infinitesimale è contenuta nel De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas, composto nel 1669 sulla base di idee maturate nel 1666, ma pubblicato soltanto nel 1711. Nel 1666 Newton non aveva ancora elaborato la sua teoria delle "flussioni", sebbene avesse già formulato un metodo sistematico di differenziazione non molto diverso da quello pubblicato da Barrow nel 1670.

Leibniz introduce il calcolo differenziale nel suo lavoro intitolato Nuovo metodo per trovare i massimi e minimi, e anche le tangenti, non ostacolato da quantità frazionarie e irrazionali e un unico genere di calcolo per quei problemi, che si ritrova negli Acta Eruditorum del 1684.
Come per Newton, anche per Leibniz svolsero un ruolo importante le serie infinite, ma fu leggendo la lettera di Amos Dettonville sul "Traitè des sinus du quart de cercle" che Leibniz, a quanto egli stesso riferisce, fu colpito da un'intuizione improvvisa.
Nel 1673, intuì che la determinazione della tangente ad una curva dipendeva dal rapporto tra le differenze delle ordinate e



delle ascisse, quando queste diventavano infinitamente piccole, e che le quadrature dipendevano dalla somma delle ordinate, ossia dei rettangoli infinitamente piccoli che formavano l'area. Intuì così che in geometria i problemi della quadratura e della tangente, che dipendevano rispettivamente da somme e da differenze, erano l'uno l'inverso dell'altro.
Così pochi anni più tardi, nel 1676 Leibniz giunse alla stessa conclusione di Newton, indipendentemente dal lavoro di quest'ultimo: in pratica era in possesso di un metodo generale, secondo il quale, data una "funzione" - razionale o irrazionale, algebrica o trascendente (termine coniato dallo stesso Leibniz) - potevano essere sempre applicate le operazioni del suo metodo per trovare somme e differenze.
Spettava quindi a lui elaborare un linguaggio e una notazione confacenti a questa nuova branca della matematica.
Del resto Leibniz aveva sempre avvertito l'importanza di una buona notazione come utile strumento per il pensiero.



ACTA ERUDITORUM
ANNO M DCLXXXIV
publicata,
ac
SERENISSIMO FRATRUM PARI,
DN. JOHANNI
GEORGIO IV,
Electoratus Saxonici Hæredi,
&
DN. FRIDERICO
AUGUSTO,
Ducibus Saxoniæ &c.&c.&c.
PRINCIPIBUS JUVENTUTIS
dicata.
Cum S.Cæsareæ Majestatis & Potentissimi
Electoris Saxonici Privilegiis.

LIPSIÆ,
Prostant apud J. GROSSIUM & J.F. GLETITSCHIUM.
Typis CHRISTOPHORI GÜNTHERI.
Anno M DCLXXXIV.

Se Newton può considerarsi uno scienziato a tutti gli effetti, Leibniz risulta più estraneo all'ambiente accademico matematico.
Brillante uomo di legge, matematico e filosofo, una delle menti più attive e versatili del secolo, Leibniz apprese la nuova matematica in un tempo relativamente breve dal fisico Huygens, mentre si trovava a Parigi in missione diplomatica; poco dopo pubblicò dei risultati che contenevano il nucleo del calcolo moderno.
Newton, le cui scoperte erano state molto precedenti, era contrario a pubblicarle: ciò avvenne solo nel 1687, ossia 22 anni dopo aver ottenuto i primi importanti risultati. Infatti, pur essendosi originariamente servito dei metodi del calcolo per determinare molti dei risultati del suo capolavoro, i Principia, quasi nessuna traccia vi appare esplicitamente.
Sia a Newton che a Leibniz bisogna attribuire il merito di aver visto nel calcolo infinitesimale un calcolo generale applicabile a molti tipi di funzione. La distinzione fondamentale fra l'opera dei due grandi matematici consiste:

- da parte di Newton, nel rifiuto delle quantità infinitesime, o indivisibili, che fino ad allora erano state utilizzate, per proclamarsi favorevole alle quantità evanescenti divisibili, che pertanto potevano essere diminuite infinitamente.
- da parte di Leibniz, invece, nell'operare direttamente con gli incrementi infinitamente piccoli di x e di y per poi determinarne le relazioni.

Se Newton, in quanto fisico, risulta più empirico e concreto,

Leibniz appare più speculativo, portato alle generalizzazioni e più propenso alla diffusione dei suoi risultati.
Mentre Newton non si preoccupò di formulare regole di calcolo, Leibniz stabilì i canoni del calcolo infinitesimale, cioè il sistema delle regole e delle formule.
Infine Leibniz passò molto tempo a scegliere una notazione suggestiva mentre Newton non attribuì alcuna importanza a tale problema.
Le note controversie fra i due matematici cominciarono nel 1695, quando Newton apprese dal matematico Wallis che in Olanda il calcolo infinitesimale era considerato una scoperta di Leibniz. Infatti, egli pubblicò un'esposizione del suo calcolo negli Acta Eruditorum, periodico mensile scientifico fondato due anni prima.
In una relazione alla Royal Society, gruppo inglese di studiosi interessati particolarmente alla matematica e all'astronomia, un matematico suggerì che Leibniz potesse aver appreso ciò durante la sua permanenza a Londra; pertanto Leibniz fu accusato di plagio. La sua replica giunse nel 1704, quando rivendicò il diritto alla priorità nella pubblicazione elevando una protesta alla Royal Society contro l'accusa di plagio.
Nel 1708 Keill, un professore di Oxford, fece una difesa vigorosa delle pretese di Newton contro quelle di Leibniz in un articolo pubblicato in un giornale; i ripetuti appelli di Leibniz alla Royal Society indussero finalmente quell'accademia a nominare una commissione incaricata di studiare la questione e farne un rapporto. Tale rapporto fu pubblicato nel 1712 col titolo "Commercium Epistolicum", ma non fece alcun passo avanti nella questione.
Il comitato era giunto alla conclusione che Newton fosse il primo inventore, ma non stabiliva se Leibniz, durante il soggiorno a Londra, avesse avuto la possibilità di vedere gli studi di Newton. Le ricerche fatte anche dopo molto tempo dalla morte di entrambi, dimostrano tuttavia che Leibniz maturò indipendentemente le principali idee del calcolo infinitesimale, sebbene Newton avesse portato a termine la maggior parte delle sue ricerche prima che Leibniz compisse le sue.
L'importanza storica della controversia non sta nel decidere chi fosse il vincitore, piuttosto nel fatto che i matematici si divisero in due partiti:
quelli continentali dalla parte di Leibniz (fratelli Bernoulli);
quelli inglesi dalla parte di Newton.
I due gruppi svilupparono una forte ostilità e si accanirono l' no contro l'altro, tanto da cessare di scambiarsi le loro idee.
Questo costituisce un esempio poco felice di come si possano montare questioni di precedenza

La nozione di derivata

Definizione.
Siano f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di R, sia x_0 un punto di X per esso di accumulazione. supposto che esista, finito o no, il limite in x_0 del rapporto incrementale di f relativo al punto x_0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tale limite si chiama derivata della funzione f in x_0 e si denota con uno dei seguenti simboli.

$$f'(x_0)$$

tale notazione è dovuta a Lagrange

$$Df(x_0)$$

Tale notazione risale a Cauchy

$$\dot{f}(x_0)$$

Tale notazione è dovuta a Newton (oggi è utilizzata soprattutto nella meccanica razionale, idraulica e altra scienze applicate)

$$\frac{df(x_0)}{dx}$$

Tale notazione risale a Leibnitz

La funzione f si dice derivabile in x_0 se è ivi dotata di derivata finita

Legame tra derivabilità e continuità

Teorema: ogni funzione reale derivabile in un punto del suo insieme di definizione è necessariamente continua in quel punto.

Dimostrazione: detto x_0 il punto in cui f è derivabile, $\forall x \neq x_0$ appartenente all'insieme di definizione di f si ha

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$$

Passando al limite in tale relazione per x tendente a x_0, il secondo membro tende a f' (x_0)·0=0 e quindi per il primo membro si ha anche

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$$

Tale relazione è equivalente all'altra

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

dunque la f è continua in x_0.

Si noti che la proposizione inversa non è vera: infatti una funzione continua in un punto può non essere ivi derivabile. Un semplicissimo esempio è fornito dalla funzione $y=|x|$.

Tale funzione non è derivabile in 0, pur essendo ivi continua. Infatti

$$\forall x \in R-\{0\}$$

si ha:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1\\-1\end{cases}$$

E perciò il limite del rapporto incrementale della f relativo al punto 0 non esiste.

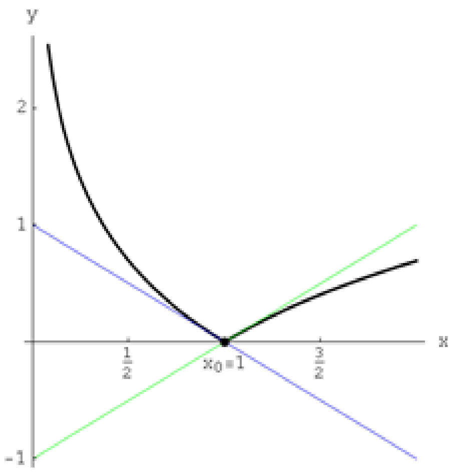
Punti di NON DERIVABILITA'

Definizione: siano f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di R, x0 un punto di accumulazione a sinistra. Supposto che esista, finito o no, il limite sinistro in x0 del rapporto incrementale di f relativo a x0,

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tale limite si chiama derivata sinistra in x_0 di f e si indica con $f'_-(x_0)$. Conseguentemente, se esiste il limite sinistro, si dice che la funzione f è dotata di derivata sinistra in x_0.
Analogamente si definisce la derivata destra.

Se una funzione y=f(x) è non derivabile in un punto, possono verificarsi i seguenti tre casi:



Se la derivata sinistra e la derivata destra in un punto x_0 sono entrambe finite ma diverse, allora x_0 è un punto angoloso.

Esempio: il diagramma cartesiano di f(x)=|lnx| ha un punto angoloso in P(1,0)
Infatti:
Esplicitiamo l'espressione analitica di f (x):

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, x \in [1; +\infty] \\ -\ln x, x \in]0;1[\end{cases}$$

Quindi la derivata prima è:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \in [1; +\infty] \\ -\frac{1}{x}, x \in]0;1[\end{cases}$$

Il punto $x_0 = 1$ è una discontinuità di prima specie per f'(x).

$$f'_+(1) = +1$$
$$f'_-(1) = -1$$

per cui il punto P0 (1, 0) `e un punto angoloso.

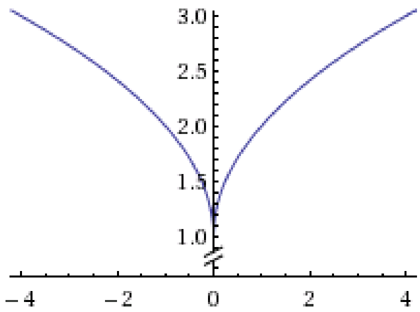
Se i limiti sono diversi e tendono rispettivamente a +∞ e a -∞, allora si ha una cuspide. In particolare se la derivata sinistra tende a +∞ e la derivata destra tende a -∞, si ha una cuspide rivolta verso il basso; se la derivata sinistra tende a -∞ e la derivata destra tende a +∞, si ha una cuspide rivolta verso l'alto

si ricordi che tale funzione è la traslazione di un vettore di lunghezza 1 lungo y della funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ detta parabola di Neile

Esempio: la funzione

$$f(x) = \sqrt{|x|} + 1$$

presenta una cuspide nel punto 0



Infatti:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty, \ \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \mp\infty$$

> Se i limiti sinistro e destro tendono entrambi a $+\infty$ si ha un flesso a tangente verticale

PUNTO ANGOLOSO	Se f '(x)= m e f '(x)= l con m≠l allora x_0 è un punto angoloso.
CUSPIDE	Se $f_+'(x)=+\infty$ e $f_-'(x)=-\infty$ allora x_0 è una cuspide con vertice in alto. Se $f_+'(x)=-\infty$ $f_-'(x)=+\infty$ allora x_0 è una cuspide con vertice in basso.
FLESSO A TANGENTE VERTICALE	Se $f'(x)=+\infty$ allora x_0 è un flesso a tangente verticale crescente. Se $f'(x)=-\infty$ allora x_0 è un flesso a tangente verticale decrescente.

EQUAZIONE DELLA RETTA TANGENTE A UNA CURVA IN UN PUNTO

Teorema: una funzione reale f è derivabile in un punto x_0 del suo insieme di definizione sse il suo diagramma è dotato nel punto $p_0=(x_0,f(x_0))$ di retta tangente non verticale. Quando una di queste condizioni sia soddisfatta, la derivata di f in x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente in p_0 al diagramma di f e la tangente ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

TEOREMA DI ROLLE

Sia f una funzione reale continua nell'intervallo chiuso e limitato [a;b], derivabile in tutti i punti ad esso interni. Allora, se f(a) = f(b) esiste almeno un punto ξ interno ad [a;b] tale che f^' (ξ)=0

La dimostrazione del teorema di Rolle è dovuta a U. Dini e risale al 1878

Dimostrazione.

Distinguiamo due casi.

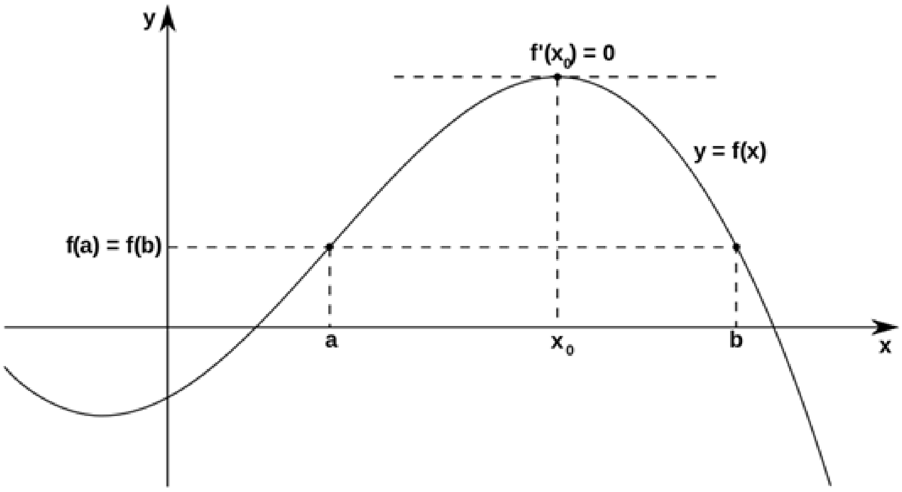
1. Se f è costante, il teorema è banalmente vero in quanto la derivata di f si annulla ovunque
2. Se f non è costante, essendo continua, a norma del teorema di Weierstass, f è dotata in [a;b] di minimo e di massimo; siano xm e xM tali punti. Di tali punti almeno uno è interno ad [a;b]; infatti se ciò non fosse, dovrebbe essere f(a)=f(b) e dunque la funzione sarebbe costante. Supponiamo che sia xm interno ad [a;b]. E' facile verificare che f'(xm)=0. Infatti, poiché la f in xm assume valore minimo, si ha che f(x) è maggiore o uguale a f(xm) e quindi il rapporto

$$\frac{f(x) - f(x_m)}{x - x_m} \quad \text{è} \quad \begin{cases} \geq 0, \forall x > x_m \\ \leq 0, \forall x < x_m \end{cases}$$

Conseguentemente, in virtù del teorema della permanenza del segno, il limite per x che tende a xm di tale rapporto ovvero f'(xm)=0

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL TEOREMA DI ROLLE

Dal punto di vista geometrico, se un arco di curva continua è dotata di retta tangente in ogni suo punto, esclusi al più gli estremi, ed ha uguali le coordinate degli estremi, allora esiste almeno un punto interno all'arco in cui la tangente è parallela all'asse x.



TEOREMA DI LAGRANGE O DEL VALOR MEDIO

Sia f una funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato [a;b], derivabile in tutti i punti ad esso interni, allora esiste almeno un punto ξ interno ad [a;b] nel quale si verifica l'uguaglianza

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f^{'}(\xi)$$

Dimostrazione

Si consideri la retta passante per i punti (f;f(a)) e (b;f(b)). L'equazione di tale retta può essere scritta come:

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Si può pertanto considerare la funzione ausiliaria:

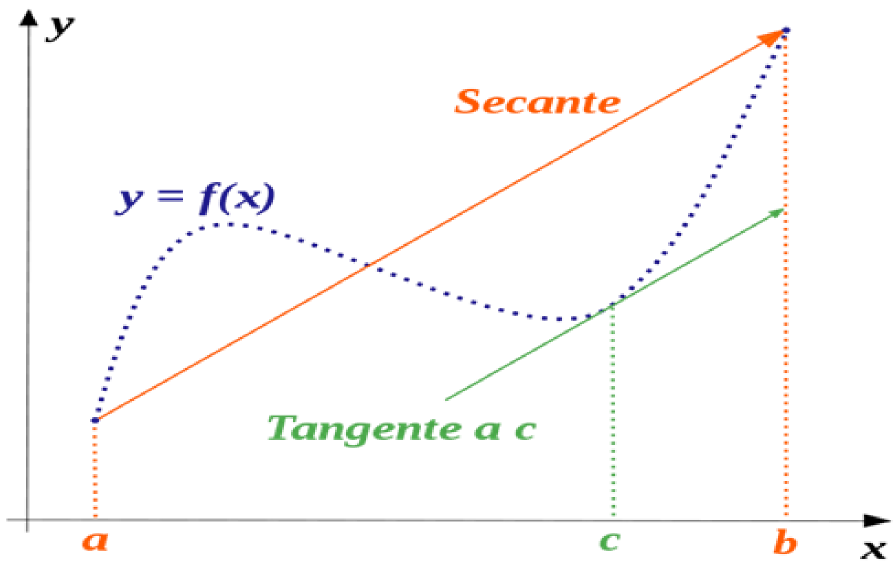
$$\varphi(x)=f(x)-f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

avendo indicato y=f(x).
La funzione $\varphi(x)$ così definita è continua in [a;b], ivi derivabile, così come f(x). Conseguentemente, a norma del teorema di Rolla esiste almeno un punto ξ interno ad [a;b] tale che

$$\varphi^{'}(\xi)=f^{'}(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL TEOREMA DI LAGRANGE

Presso alcuni autori, la formula di Lagrange viene detta di Cavalieri cui risale l'osservazione geometrica:
Se un arco di curva continua è dotato di tangente in ogni suo punto, esclusi al più gli estremi, esiste almeno un punto interno all'arco nel quale la tangente è parallela alla corda che congiunge i punti estremi dell'arco.



Da notare che se f(a)=f(b) si ricade nel teorema di Rolle, concordemente con la situazione geometrica secondo la quale la congiungente (f;f(a)) e (b;f(b)) è in tal caso parallela all'asse x

TEOREMA DI CAUCHY O DEGLI INCREMENTI FINITI

Se f e g sono due funzioni reali continue nell'intervallo chiuso e lia;b],derivabili nei punti ad esso interni, esiste almeno un punto ? interno ad [a;b] per il quale si verifica l'uguaglianza

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Sempre che $g(a)\neq g(b)$ e $g'(x)\neq 0, \forall x\in \left]a;b\right[$

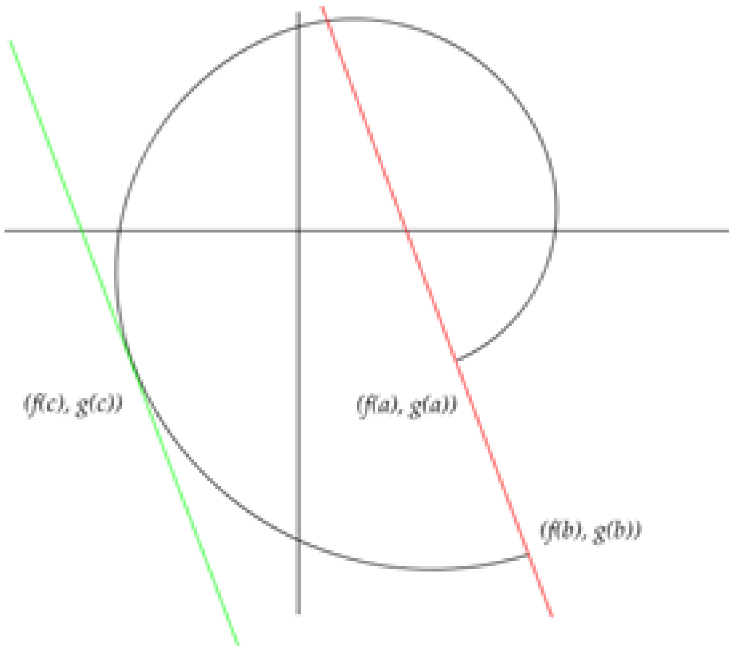
Dimostrazione.

Si conduce in modo analogo a quella del teorema di Lagrange, considerando la funziona ausiliaria
$\varphi(x)=(f(x)-f(a))(g(b)-g(a))-(f(b)-f(a))(g(x)-g(a)$

Annullando la derivata di $\varphi(x)$ in un punto interno ad a;b[e dividendo per g(b)-g(a) e per g'(ξ), si ottiene l'uguaglianza voluta.

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL TEOREMA DI CAUCHY

Geometricamente l'uguaglianza espressa col teorema di Cauchy dice che se una curva piana è dotata ovunque di retta tangente tra due suoi punti a e b, allora almeno una di queste rette tangenti è parallela alla corda AB.
Questa proprietà vale non soltanto quando la curva è il grafico di una funzione, ma anche per curve più in generale, come quella della figura.



Si noti che il teorema di Cauchy restituisce quello di Lagrange ponendo g(x)=x, . In tal caso, infatti, si ha g'(x)=1 e g(b)-g(a)=b-a

TEOREMA DI FERMAT (sulle funzioni con derivata nulla)

> Una funzione definita su un intervallo aperto I = (a, b), ivi derivabile e con derivata nulla in ogni punto di tale intervallo è una costante.

Dimostrazione.