Prof. Roberto Capone

I vettori

Anno Scolastico 2012/2013
Liceo classico «F. De Sanctis»

Vettori e scalari

Vengono definite dal loro valore numerico.
Esempi: la lunghezza di un segmento, l'area di una figura piana; la temperatura di una stanza

Grandezze scalari

Grandezze vettoriali

Vengono definite dal loro valore numerico (intensità o modulo) da una direzione, da un verso:
Esempi: la velocità, la forza

Vettori e scalari

Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta…

L'informazione sullo spostamento è completa?

No, ne conosco solo l'entità.

Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo la strada per Potenza…

Ho aggiunto informazione sulla mia direzione.

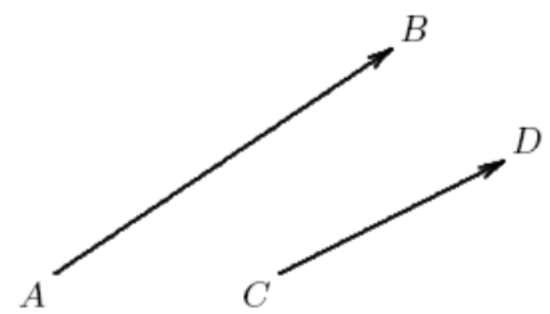
Domenica ho fatto venti chilometri in bicicletta lungo la strada per Potenza verso Matera

Questo dato completa l'informazione sul verso del mio spostamento.

I vettori

Una grandezza fisica è un vettore quando per definirla completamente è necessario fornire un modulo o intensità (= l'entità), una direzione e un verso.

$$\textbf{VETTORE}\begin{cases}\text{modulo}\\ \text{direzione}\\ \text{verso}\end{cases}$$

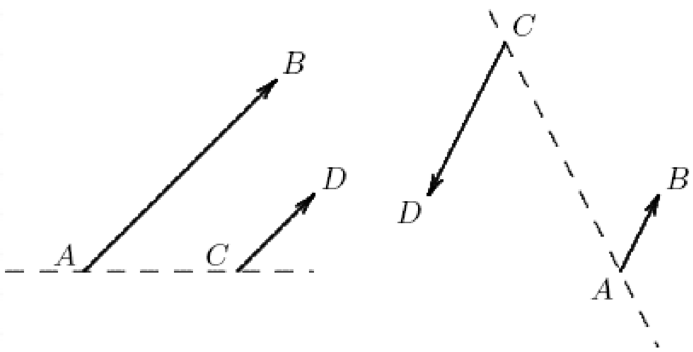


Modulo, direzione, verso

- Scelta un'unità di misura, ad ogni segmento [AB] si può associare un numero reale non negativo AB, la misura della lunghezza di [AB], che rappresenta il modulo o intensità del vettore.
- Il passo successivo consiste nel definire un segmento orientato come quel segmento di estremi A e B nel quale si sia assegnato un ordine e quindi si possa distinguere un punto iniziale ed uno finale. A tal fine si sceglie il simbolo convenendo di considerare A come il punto iniziale e B come quello finale. Graficamente ciò si esprime tramite una freccia che parte da A e giunge in B

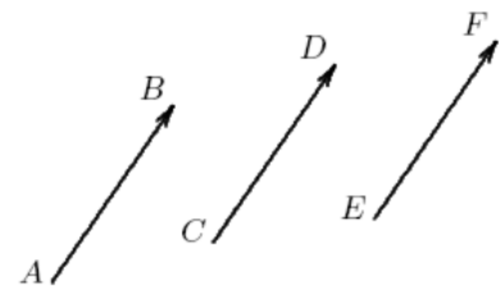
Vettori paralleli e perpendicolari

- A questi nuovi enti si possono in modo del tutto naturale estendere i concetti di parallelismo e perpendicolarità. In particolare risulta parallelo ad una retta *r* se lo sono le rette *r* e la retta *AB* cioè *r* // *AB*. Così i segmenti orientati e si dicono *collineari* (o paralleli, //) se esiste una linea retta *r* alla quale entrambi risultano paralleli.



Vettori equipollenti

- Un segmento orientato può quindi essere posto in corrispondenza con un altro segmento orientato per mezzo della sua
    1. lunghezza,
    2. collinearità,
    3. verso.



- Pertanto sull'insieme dei segmenti orientati del piano è possibile definire una relazione che associ con se e solo se

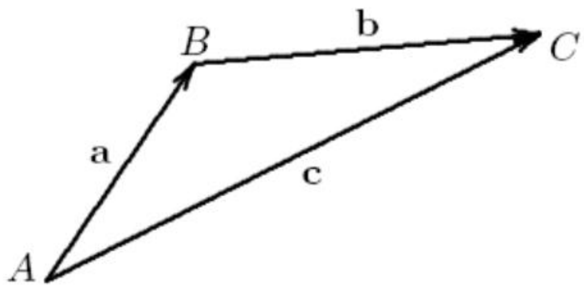
1. $\overrightarrow{AB} || \overrightarrow{CD}$ 2. $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ 3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Tale relazione prende il nome di relazione di equipollenza

Nuova definizione di vettore

- Definizione: ***Un vettore nel piano (o nello spazio) è definito come l'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti, ossia di tutti i segmenti orientati aventi la medesima direzione, verso e lunghezza.***

Operazioni con i vettori: metodo grafico



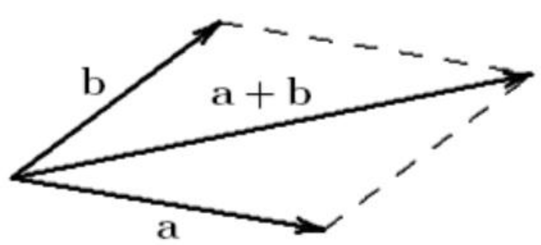
Definizione La somma di due vettori a e b è un vettore c = a + b la cui direzione e verso si ottengono nel modo seguente: si fissa il vettore a e, a partire dal suo punto estremo, si traccia il vettore b. Il vettore che unisce l'origine di a con l'estremo di b fornisce la somma c = a + b.

La somma vettoriale corrisponde a mettere i vettori uno dietro l'altro (metodo punta – coda)

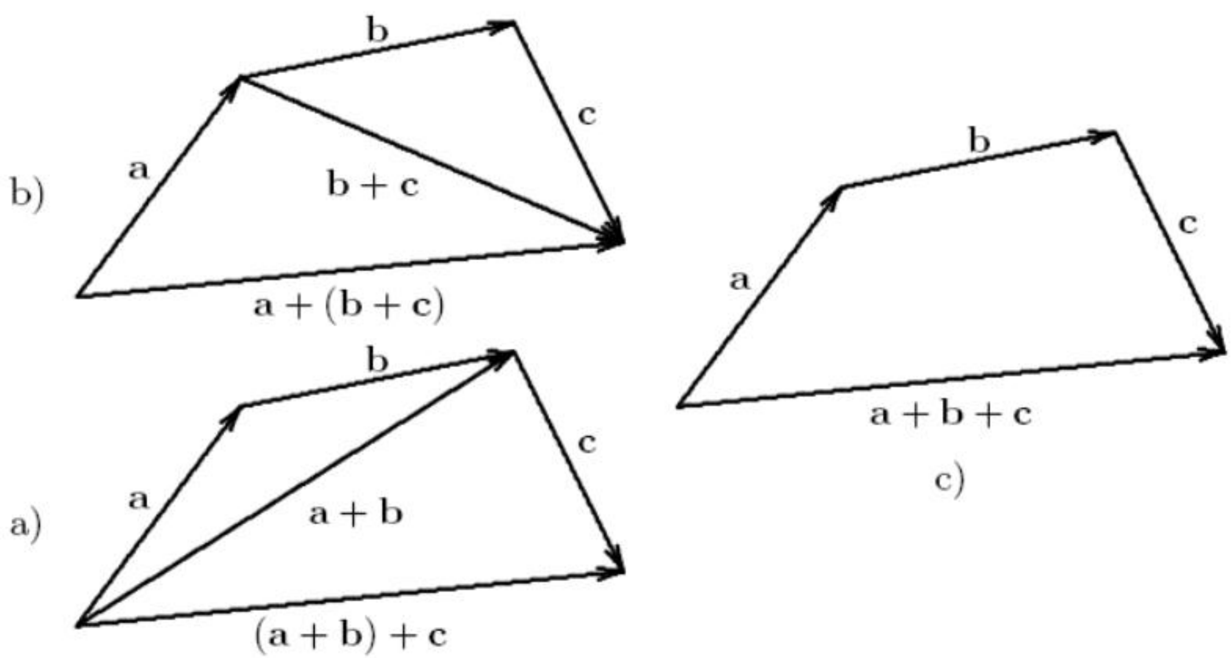
Proprietà della somma

- **Prop. commutativa:** $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- **Prop. associativa:** $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- **Elemento neutro:** $\mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}$

In particolare dalla proprietà commutativa discende una definizione alternativa della somma (o risultante) di due vettori ossia la *regola del parallelogramma*.

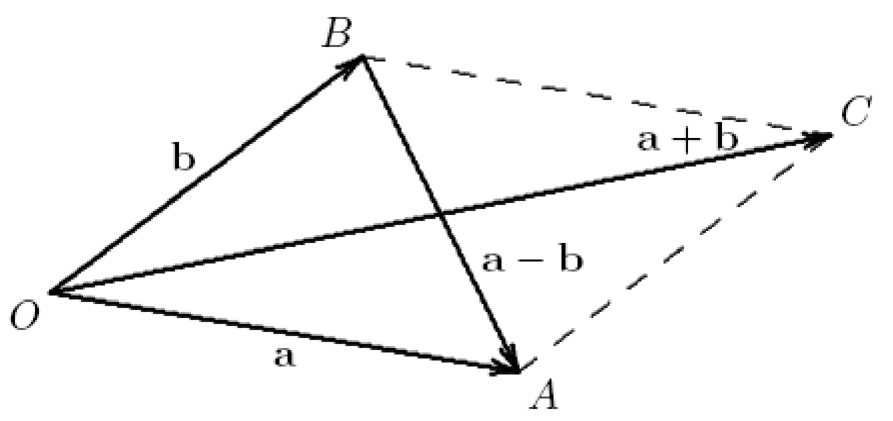


Regola della poligonale



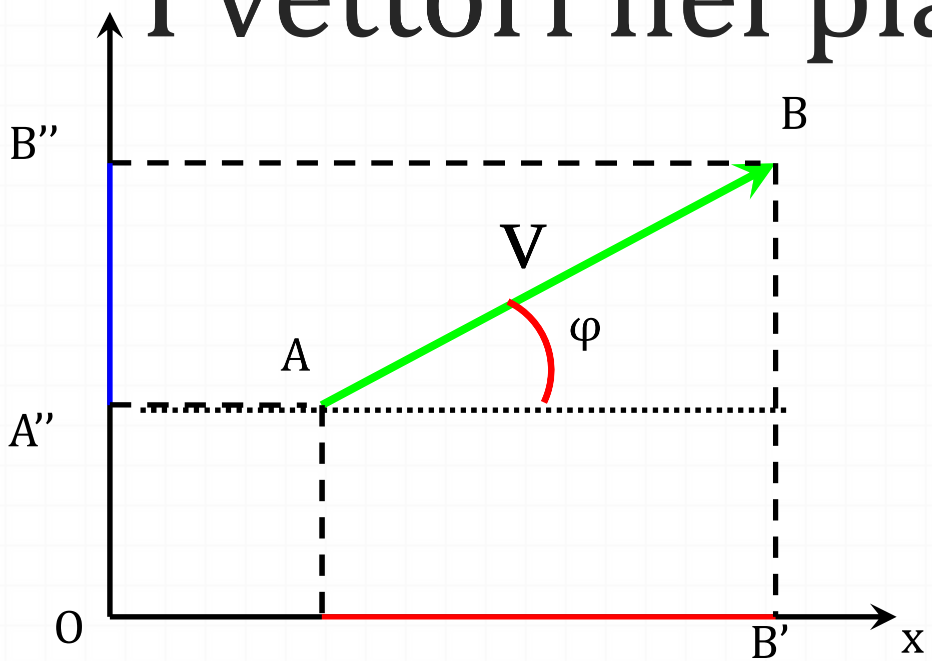
Differenza tra due vettori

- Definizione ***La differenza* a-b *di due vettori è la somma del vettore* a *con l'opposto del vettore* b *ossia* a - b = a + (- b)**



I vettori nel piano

HELP MATEMATICA



$$v = (v_x, v_y)$$

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{v_y}{v_x}$$

modulo di v = lunghezza del segmento AB

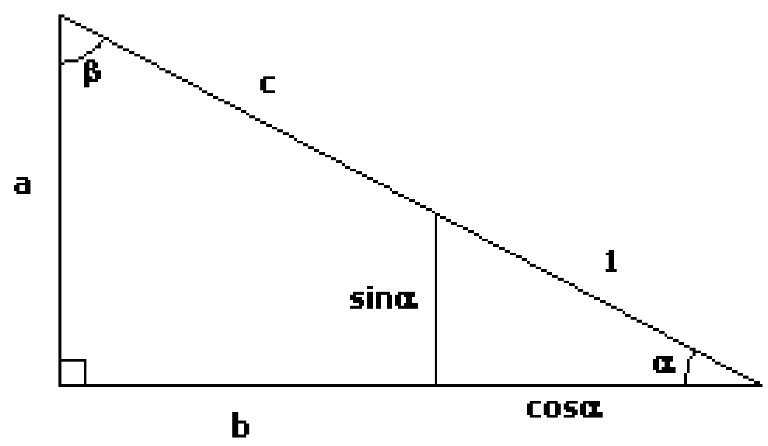
la direzione di v è definita dall'angolo φ

componente Vx = lunghezza di A'B'

componente Vy = lunghezza di A''B''

Teoremi sui triangoli rettangoli

In un triangolo rettangolo il cateto è uguale all'ipotenusa per sino dell'angolo opposto, all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente, all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto oppure alla cotangente dell'angolo adiacente.

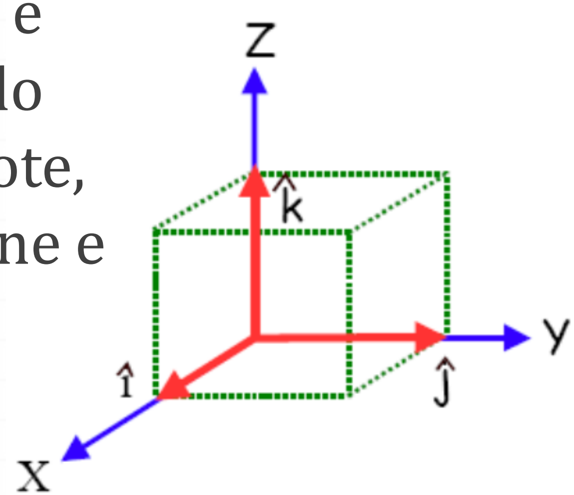


$a = c\sin\alpha \qquad a = c\cos\beta \qquad b = c\cos\alpha \qquad b = c\sin\beta$

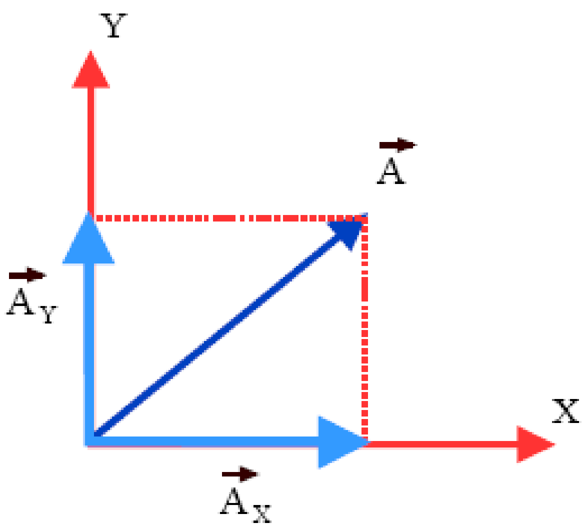
$a = b\tan\alpha \qquad b = a\tan\beta$

Versori

- Il versore è un vettore che ha modulo unitario ed ha la direzione e il verso dei semiassi positivi del piano cartesiano. Per convenzione il vettore unitario che ha la direzione e il verso dell'asse X positivo si indica con $\hat{\imath}$, mentre il vettore unitario che ha la stessa direzione e verso dell'asse Y lo si indicherà con $\hat{\jmath}$. Nello spazio dovendo introdurre l'asse delle quote, al vettore unitario che ha la stessa direzione e verso dell'asse positivo delle Z daremo il simbolo $\hat{k}$.



Rappresentazione cartesiana



Se

$$\vec{A} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y}$$

E teniamo presente la definizione di versore:

$$\hat{\imath} = \frac{\overrightarrow{A_x}}{A_x} \text{ e } \hat{\jmath} = \frac{\overrightarrow{A_y}}{A_y}$$

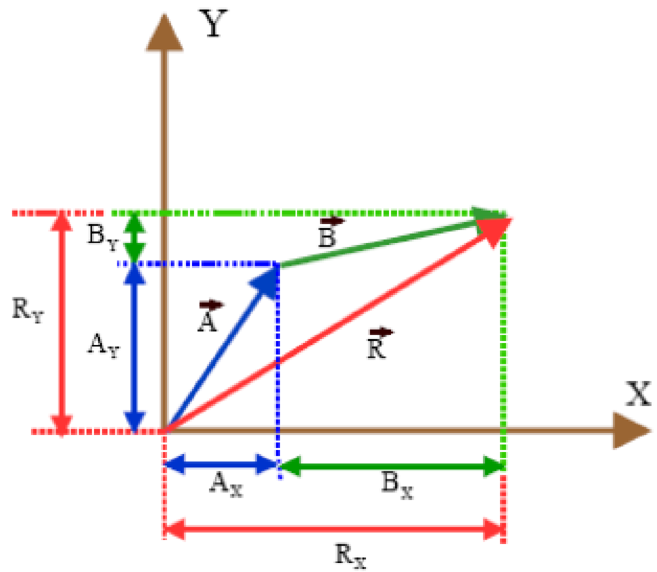
Si avrà che

$$\overrightarrow{A_x} = A_x\hat{\imath}$$
$$\overrightarrow{A_y} = A_y\hat{\jmath}$$

Allora il vettore $\vec{A}$ si potrà scrivere

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$

Somma di vettori



Le componenti di R sono la somma aritmetica delle componenti dei vettori A e B

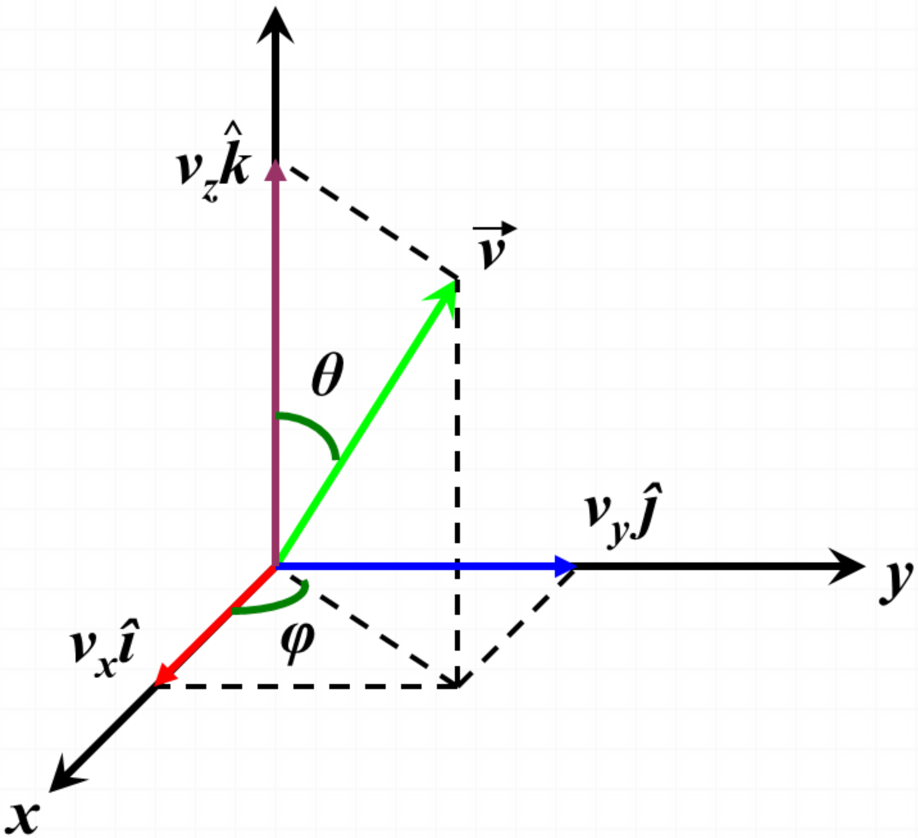
$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y$$

Per cui

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath}$$

Pertanto **la risultante di due o più vettori ha per componenti la somma delle componenti omologhe dei singoli vettori**

Vettori nello spazio



$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_x\hat{\mathrm{i}} + \mathrm{v}_y\hat{\mathrm{j}} + \mathrm{v}_z\hat{\mathrm{k}}$$

$$|\mathrm{v}| = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}$$

La direzione di v risulta definita dagli angoli θ e φ

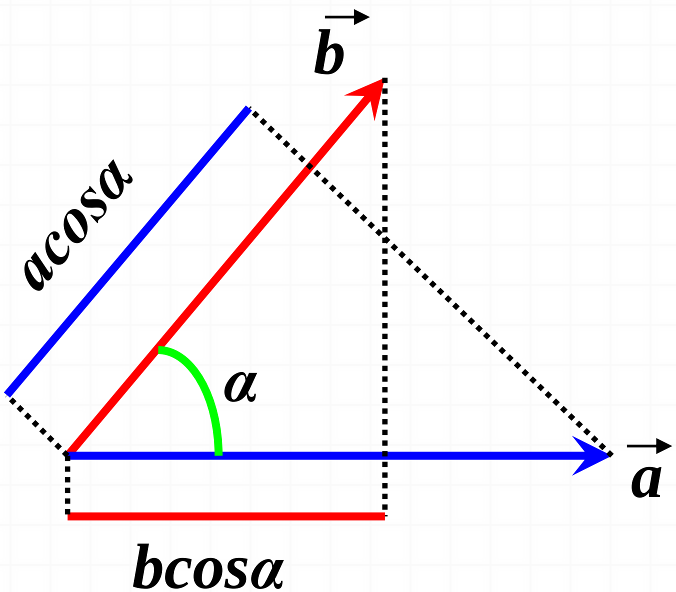
$$\theta = \arccos\frac{\mathrm{v}_z}{|\mathrm{v}|}$$

$$\varphi = \arctan\frac{\mathrm{v}_y}{\mathrm{v}_x}$$

Prodotto scalare

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il prodotto scalare tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è una grandezza scalare definita nel modo seguente:

$$a \cdot b = a\, b \cos\alpha$$



Il prodotto scalare tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un numero che è pari al prodotto del modulo di $\vec{a}$ per la componente di $\vec{b}$ lungo la direzione di $\vec{a}$

Ovviamente il prodotto scalare è anche pari al prodotto del modulo di per la componente di $\vec{b}$ lungo la direzione di $\vec{a}$

Prodotto scalare in componenti cartesiane

Tenendo conto del fatto che i versori degli assi cartesiani sono a due a due perpendicolari fra loro, si ha che:

$$
\begin{array}{lll}
\hat{i}\cdot\hat{i} = 1 & \hat{i}\cdot\hat{j} = 0 & \hat{i}\cdot\hat{k} = 0 \\
\hat{j}\cdot\hat{i} = 0 & \hat{j}\cdot\hat{j} = 1 & \hat{j}\cdot\hat{k} = 0 \\
\hat{k}\cdot\hat{i} = 0 & \hat{k}\cdot\hat{j} = 0 & \hat{k}\cdot\hat{k} = 1
\end{array}
$$

Di conseguenza, esprimendo i vettori in termini delle loro componenti cartesiane, si ha:

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{a} = \mathrm{a_x}\hat{\mathrm{i}} + \mathrm{a_y}\hat{\mathrm{j}} + \mathrm{a_z}\hat{\mathrm{k}} \\
\mathrm{b} = \mathrm{b_x}\hat{\mathrm{i}} + \mathrm{b_y}\hat{\mathrm{j}} + \mathrm{b_z}\hat{\mathrm{k}}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\mathrm{a}\cdot\mathrm{b} = \mathrm{a_x b_x} + \mathrm{a_y b_y} + \mathrm{a_z b_z}
$$

Caso particolare: $\vec{b} = \vec{a}$

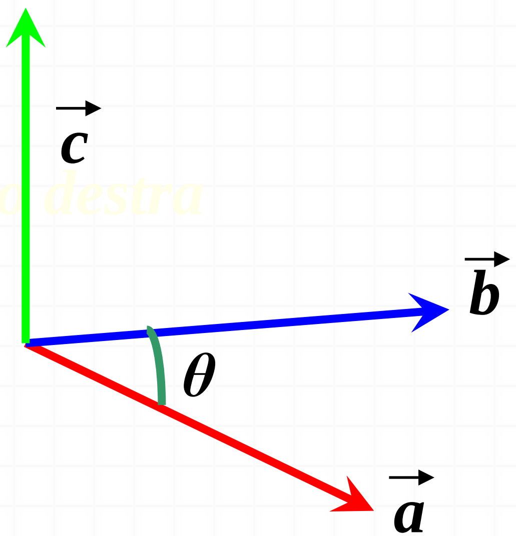
$$
\Rightarrow \quad \mathrm{a}\cdot\mathrm{a} = \mathrm{a_x^2} + \mathrm{a_y^2} + \mathrm{a_z^2} = |\mathrm{a}|^2
$$

Prodotto vettoriale

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il prodotto vettoriale $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ è un vettore che gode delle proprietà seguenti:

- il modulo di $\vec{c}$ è dato da $absin\theta$, dove θ è l'angolo minore di 180° compreso tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$
- la direzione di $\vec{c}$ è perpendicolare al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$
- il verso di $\vec{c}$ è calcolato applicando la

regola della mano destra



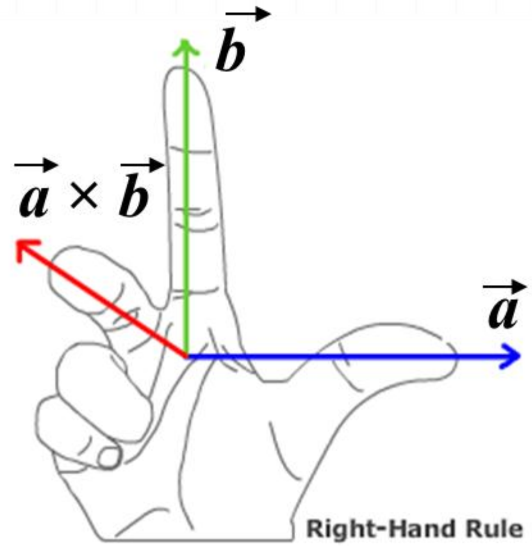
La regola della mano destra

Prima formulazione

Si dispone il pollice lungo il primo vettore

Si dispone l'indice lungo il secondo vettore

Il verso del medio individua il verso del prodotto vettoriale



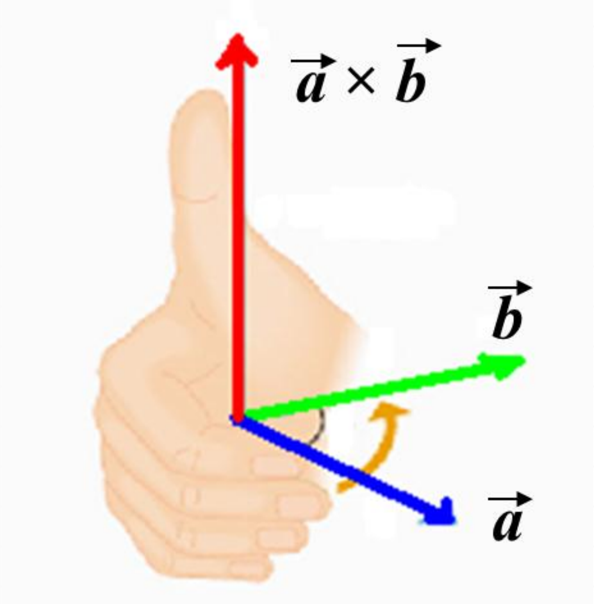
Regola della mano destra

Seconda formulazione

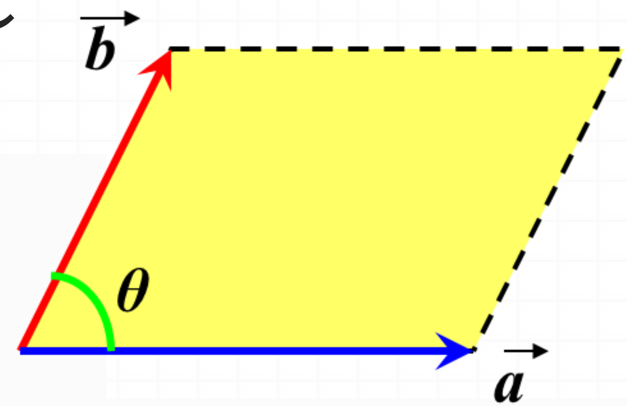
Si chiude a pugno la mano destra mantenendo sollevato il pollice

Le dita chiuse a pugno devono indicare il verso in cui il primo vettore deve ruotare per sovrapporsi al secondo in modo che l'angolo θ di rotazione sia minore di 180°

Il verso del pollice individua il verso del prodotto vettori



Proprietà del prodotto vettoriale

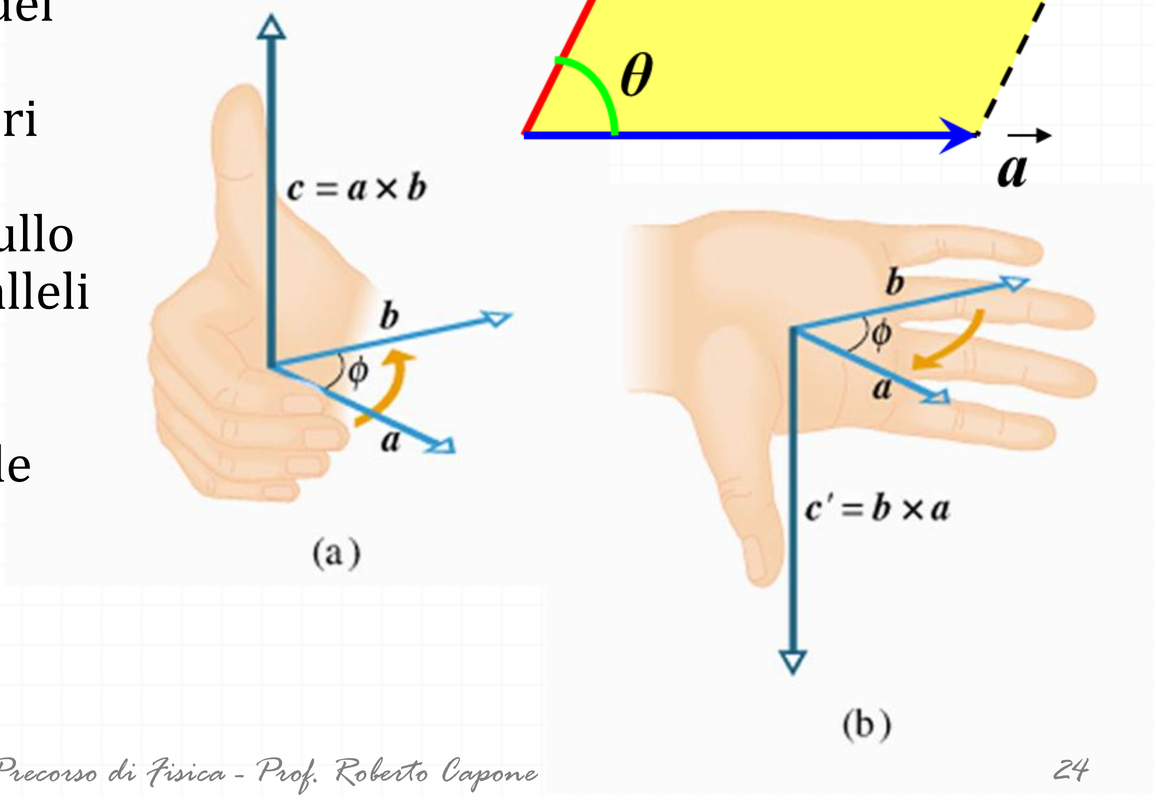


Il modulo del prodotto vettoriale è pari all'area del parallelogramma individuato dai due vettori

Il prodotto vettoriale è nullo se i due vettori sono paralleli (θ=0)

Il prodotto vettoriale gode della proprietà anticommutativa:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$



Prodotto vettoriale in componenti cartesiane

- Tenendo conto che i versori degli assi cartesiani sono a due a due perpendicolari fra loro, ed applicando la regola della mano destra, si hanno le seguenti relazioni:

$$
\begin{array}{lll}
\hat{i} \times \hat{i} = 0 & \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} & \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j} \\
\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} & \hat{j} \times \hat{j} = 0 & \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \\
\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} & \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} & \hat{k} \times \hat{k} = 0
\end{array}
$$

HELP MATEMATICA

Prodotto vettoriale

- Pertanto, esprimendo i vettori in termini delle loro componenti cartesiane, si ha che:

$$a \times b = \hat{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Determinante di una matrice

Regola di Sarrus
Regola di Laplace

Il determinante di una matrice 2 × 2 è pari a

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc.$$

Il determinante di una matrice 3 × 3 è pari a

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.$$

Esempi e applicazioni:

a × a = 0

Possiamo dimostrarlo seguendo due strade.

La più sintetica fa uso della proprietà anticommutativa per cui, commutando i fattori, deve essere a × a = - a × a. Ne segue che il vettore prodotto c è uguale al proprio opposto - c e ciò può essere vero solo per il vettore nullo 0.

L'altra si basa sullo sviluppo del determinante

$$c = a \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$c = a \times a = \left(a_y a_z - a_z a_y\right)\hat{\imath} + (a_z a_x - a_x a_z)\hat{\jmath} + \left(a_x a_y - a_y a_x\right)\hat{k} = = 0\text{i} + 0\text{j} + 0\text{k} = 0$$

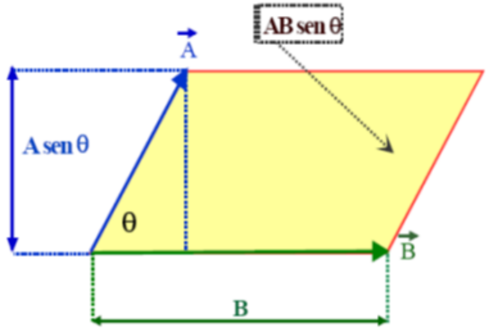
come si vede un determinante con due righe uguali si annulla.

- In modo analogo a quanto svolto nel precedente esempio, possiamo dedurre che se b = a ossia se i due fattori sono collineari, il loro prodotto vettoriale si annulla. Poiché, inoltre, vale pure l'implicazione opposta, abbiamo la possibilità di riscrivere la condizione di col linearità in modo alternativo; allora:

$$\text{a}||\text{b} \leftrightarrow \text{a} \times \text{b} = 0$$

Applicazione

- Il modulo del prodotto vettoriale è numericamente uguale all'area del parallelogramma individuato dai due vettori e le parallele che passano per gli estremi. Consideriamo la seguente figura che mostra due vettori che hanno la stessa origine e le parallele per essi.



- L' area di questo parallelogrammo si calcola moltiplicando la base (B) per l' altezza (Asenθ): Area=BAsenθ