Prof. Roberto Capone

Limiti e continuità delle funzioni reali

Corso di Matematica –mod. II
2013/2014

Corso di laurea in Scienze biologiche

Università degli Studi del Molise

Introduzione storica

Uno dei periodi più importanti della storia della matematica è stata quello che comprende i secoli durante i quali si sono gettate le basi del calcolo infinitesimale: dalla fine del 500, con i primi tentativi di proseguire l'opera di Archimede, alla redazione degli scritti indipendenti di Newton e Leibniz (XVII e XVIII sec.). Il concetto di limite si trova già presente, anche se in forma non esplicita, nella matematica greca, poiché molti risultati sui calcoli di aree e di volumi ricavati dai matematici greci (ad esempio Eudosso ed Archimede) erano, in sostanza, basati su un passaggio al limite (si pensi ad esempio, al ben noto Paradosso di Achille).

Introduzione storica

Dovevano, però, trascorrere molti secoli prima di giungere con Eulero nel 1755 ad una definizione abbastanza precisa di limite, anche se Eulero non la utilizza e non sviluppa la teoria dei limiti. Anche D'Alembert diede una formulazione del concetto di limite. Nell'articolo "limite", scritto per l'Encyclopédie egli chiamava una quantità limite di una seconda quantità (variabile) il valore con cui questa seconda quantità si avvicinava così tanto che la differenza fra le due quantità fosse inferiore a qualsiasi quantità data (senza effettivamente coincidere con essa). L'imprecisione di questa definizione la rese inaccettabile per i suoi contemporanei, infatti gli autori di manuali matematici dell'Europa continentale continuarono a usare fino alla fine del XVIII secolo il linguaggio e i concetti di Eulero.
Si deve a Cauchy e, soprattutto, alla successiva formalizzazione di Weierstrass, una definizione rigorosa di limite e, mediante essa, una costruzione rigorosa dell'analisi matematica. Cauchy assunse come fondamentale il concetto di limite di D'Alembert, ma gli conferì una maggiore precisione.

Introduzione storica

Egli formulò una definizione relativamente precisa di limite: "Quando i valori successivi attribuiti a una variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato così che finiscono con il differire da questo per una differenza piccola quanto si vuole, quest'ultimo viene detto il limite di tutti gli altri. Così per esempio un numero irrazionale è il limite delle diverse frazioni che ne forniscono i valori sempre più approssimati. In geometria la superficie del cerchio è il limite verso il quale convergono le superfici dei poligoni iscritti, man mano che il numero dei lati cresce."
La definizione di Cauchy, come leggiamo, faceva uso di espressioni come "valori successivi" o "avvicinarsi indefinitamente" o "così piccolo quanto si vuole". Per quanto suggestive queste definizioni sono prive di quella precisione che generalmente si esige dalla matematica. Ma su quella definizione Cauchy ha fondato la sua opera analitica, universalmente riconosciuta come basilare per l'analisi moderna. E' solamente con Weierstrass, però, che si arriva al concetto di limite nella forma ancora oggi ritenuta valida. La prima pubblicazione ufficiale avviene ad opera di Heine, un allievo dello stesso Weierstrass, in "*Elemente*", nel 1872, dove si assiste alla nascita delle formulazioni in termini di intorni, con gli ε e i δ, di Weierstrass e della sua scuola.

Nozioni di Topologia della retta

La nozione di intorno di un punto traduce il concetto intuitivo di zona circostante ad un punto. Più formalmente possiamo dare la seguente

DEF. 1 – Sia x_0 un punto della retta numerica R, un qualunque intervallo aperto e limitato di centro x_0 del tipo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ si dice intorno del punto x_0. Il numero reale positivo δ si chiama semidimensione dell'intorno e x_0 centro dell'intorno.

DEF. 2 – Siano x_0 un punto di R e X un sottoinsieme di R. Si dice che x_0 è di accumulazione per l'insieme X se ad ogni intorno di x_0 appartengono punti di X diversi da x_0.

PROPOSIZIONE – Un punto x_0 di R è di accumulazione per l'insieme $X \subseteq R$ (se e) solo se ad ogni intorno di x_0 appartengono infiniti punti di X. Conseguentemente, se esiste un punto di accumulazione per il sottoinsieme X di R, X è necessariamente infinito.

L'ipotesi di limitatezza dell'insieme infinito X è essenziale perché esista almeno un punto di accumulazione. Infatti N, pur essendo infinito, non è dotato di alcun punto di accumulazione
Si noti che x_0 può appartenere a X ma può anche non appartenervi.

TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS – Ogni sottoinsieme X infinito e limitato della retta numerica è dotato di almeno un punto di accumulazione.

DEF. 3 – Un punto $x_0 \in X \subseteq R$ ma che non sia di accumulazione, si dice punto isolato per X

Limite finito in un punto

Se f è una funzione reale definita nel sottoinsieme X di R e x_0 un punto di accumulazione al finito per X, è importante esaminare l'andamento dei valori f(x) che la funzione assume in punti $x \neq x_0$ presi via via sempre più vicini a x_0. La possibilità di considerare tali punti è garantita dal fatto che x_0 è di accumulazione per X.

DEF. 4 – Si dice che il numero reale l è il limite della funzione f in x_0 o anche che f(x) converge a l o che tende a l in x_0 e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

quando, comunque si consideri un numero reale ε>0 esiste un numero reale δ>0 tale che si abbia:

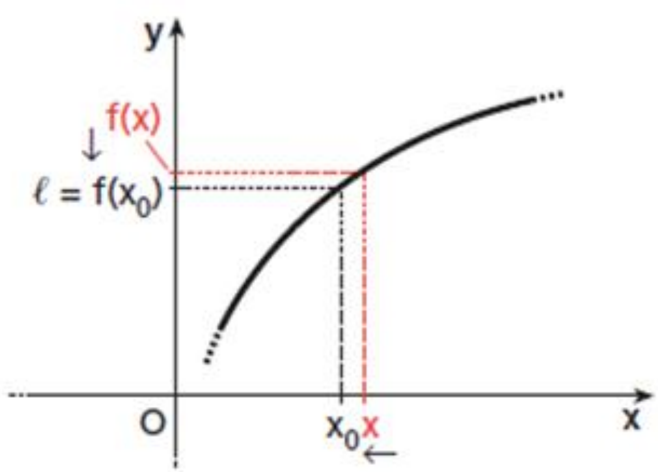
$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

o, ciò che è lo stesso,

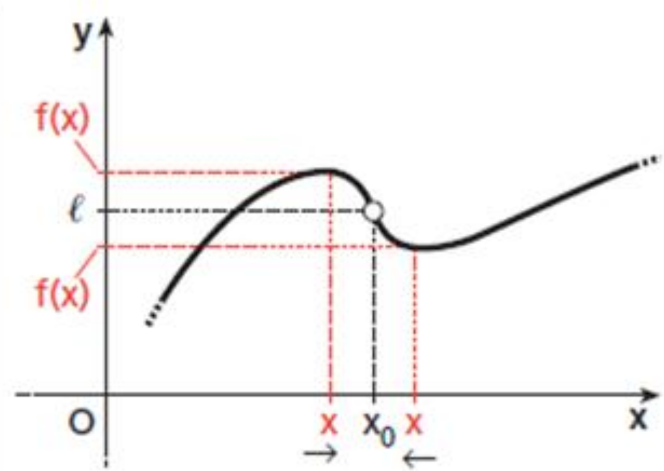
$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$\forall x \in X \; t.c. \; 0 < |x - x_0| < \delta$

Limite finito in un punto – significato geometrico



a. Nel caso di una funzione f come quella disegnata in figura vediamo che, se x si avvicina a x_0, allora $f(x)$ si avvicina a $\ell = f(x_0)$.



b. Possiamo porci la stessa domanda anche nel caso in cui x_0 è punto di accumulazione per D, ma $x_0 \notin D$ e quindi l'espressione $f(x_0)$ non ha significato. A quale valore ℓ si avvicina $f(x)$ quando x si avvicina a x_0?

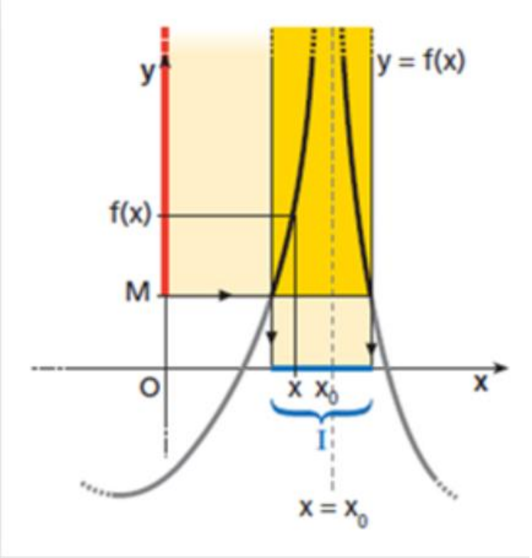
Limite infinito

DEF. 5 – Si dice che $+\infty$ è il limite della funzione f in x_0 o anche che f(x) diverge positivamente o che tende a $+\infty$ in x_0 e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se

$$\forall M > 0 \; \exists I_{x_0} \; t.c. f(x) > M$$

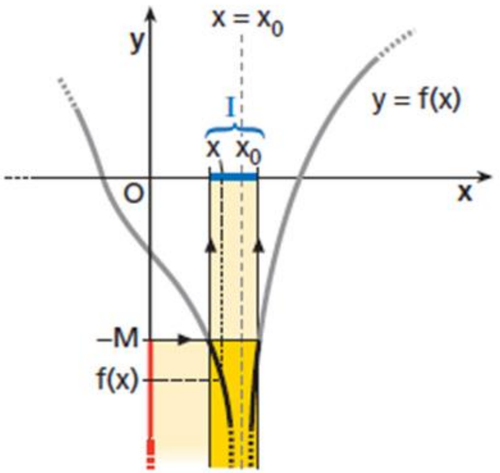


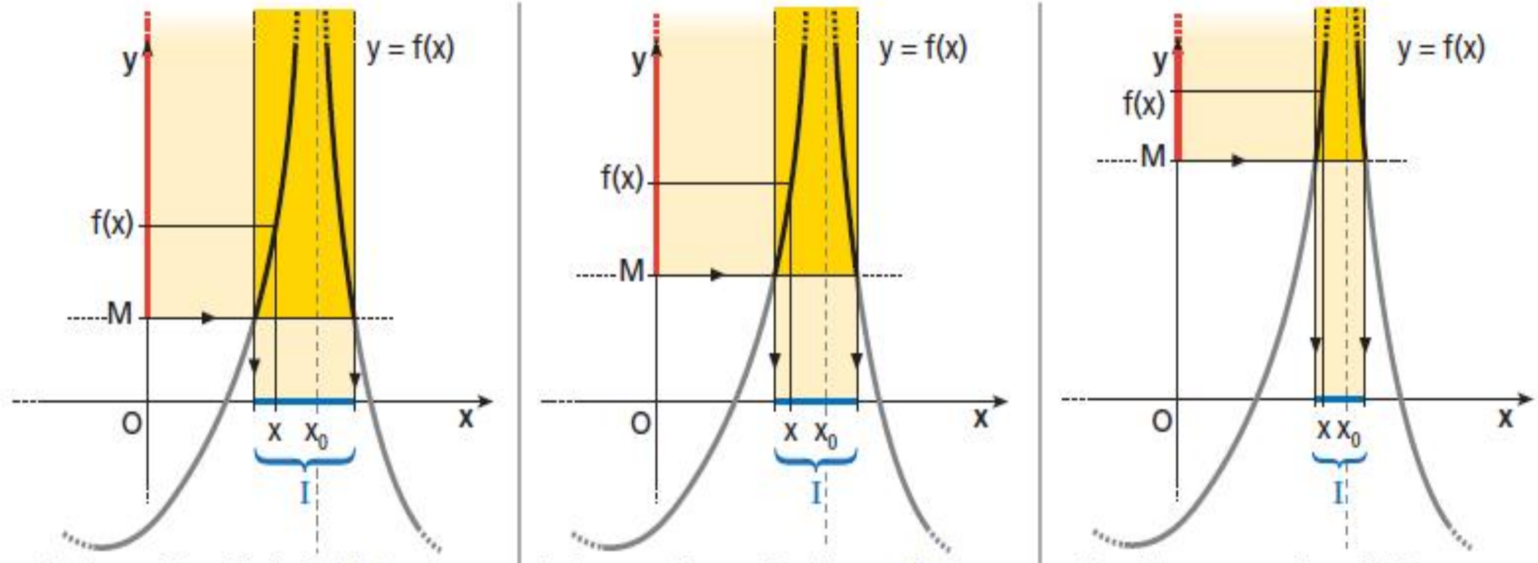
DEF. 6 – Si dice che $-\infty$ è il limite della funzione f in x_0 o anche che f(x) diverge negativamente o che tende a $-\infty$ e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se

$$\forall M > 0 \; \exists I_{x_0} \; t.c. f(x) < -M$$



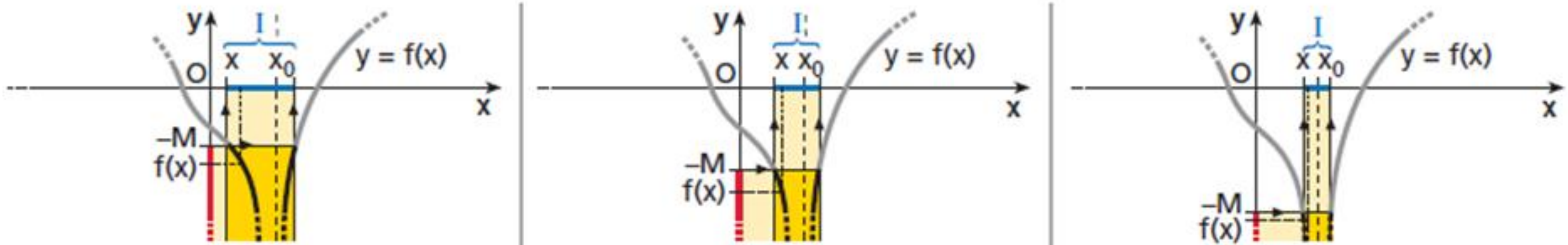


a. Fissiamo $M \in \mathbb{R}^+$. Individuiamo un intorno di x_0 tale che $f(x) > M$ $\forall x \in \ - \{x_0\}$.

b. Se prendiamo M più grande, esiste ancora e risulta, in genere, più piccolo.

c. Scegliamo un valore di M ancora più grande. Se è abbastanza piccolo, ossia se x è abbastanza vicino a x_0, allora $f(x)$ supera M.

Dire che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ significa dire che, considerando numeri reali x di X sempre più vicini a x_0, i punti del diagramma di f (x; f(x)) hanno ordinata via via più grande o anche che, comunque si consideri una retta orizzontale y=M con M>0, esiste un intorno I tali che i punti (x; f(x)) sono al di sopra di tale retta non appena x appartiene all'intorno. Si dice che la retta $x=x_0$ è un asintoto verticale per il diagramma di f.



a. Fissiamo $M \in \mathbb{R}^+$.
Individuiamo un intorno I di x_0 tale che $f(x) < -M \ \forall \ x \in I - \{x_0\}$.

b. Se prendiamo M più grande, ossia $-M$ minore, I esiste ancora e risulta, in genere, più piccolo.

c. Scegliamo un valore di M ancora più grande ($-M$ ancora minore).
Se I è abbastanza piccolo, ossia se x è abbastanza vicino a x_0, allora $f(x)$ è minore di $-M$.

Il significato geometrico è analogo se il limite è $-\infty$, per x che tende a x_0

Limite finito per x che tende a $+\infty$ (risp. $-\infty$)

DEF. 7 – Si dice che il numero reale l è il limite della funzione f in $+\infty$ (risp. in $-\infty$) o anche per x che tende a $+\infty$ (risp. $-\infty$) e si scrive:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \left(risp. \lim_{x\to-\infty} f(x) = l \right)$$

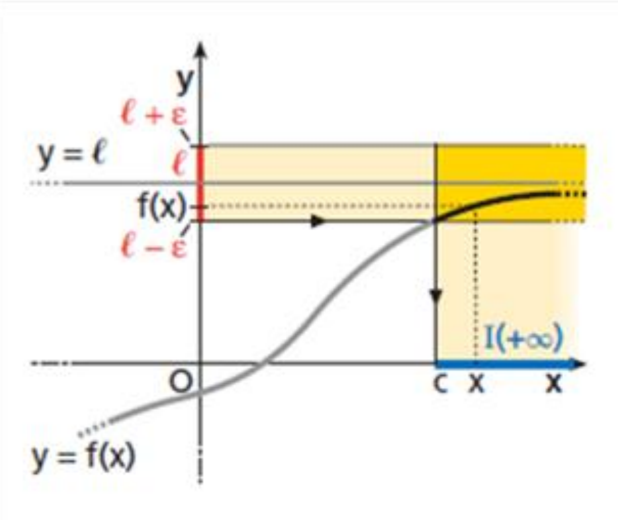
quando, comunque si consideri un numero reale ε>0 esiste un numero reale c>0 (risp. c<0) tale che si abbia:

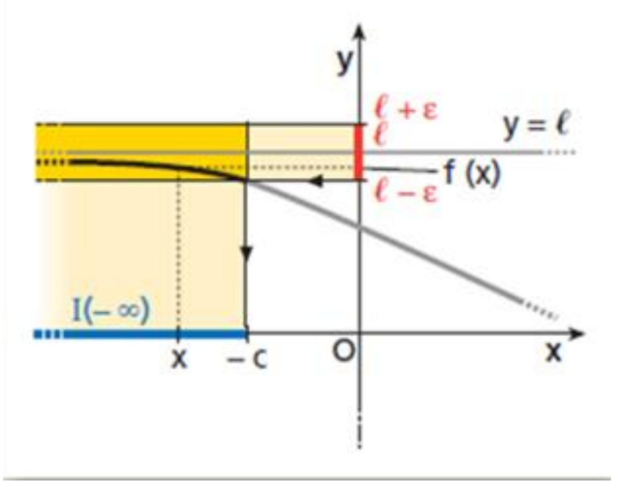
$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

o, ciò che è lo stesso,

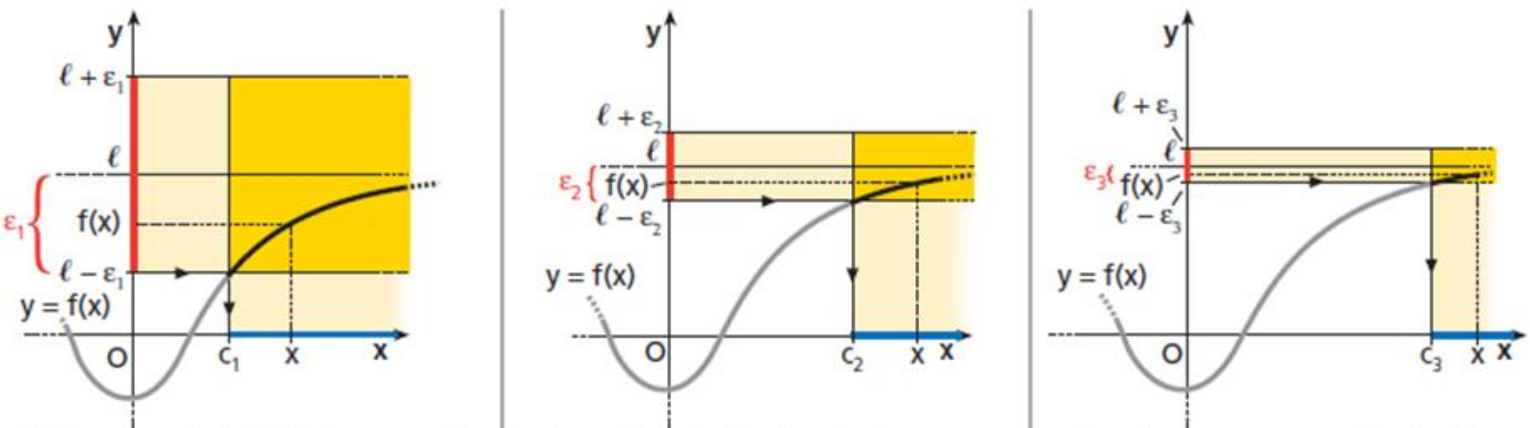
$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

non appena $x \in X$ e x>c (risp. x<c)





Limite finito per x che tende a $+\infty$ - significato geometrico



a. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Individuiamo $c_1 > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $x > c_1$, ossia per ogni punto dell'intorno di $+\infty$: $]c_1; +\infty[$.

b. Se ε diventa più piccolo, la disuguaglianza $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ è ancora vera, purché scegliamo valori di x più grandi di $c_2 > c_1$.

c. Scegliamo ε ancora più piccolo. In genere, perché $f(x)$ sia distante da ℓ meno di ε, dovremo prendere c_3 ancora più grande.

Se il limite per x che tende a $+\infty$ o a $-\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ è uguale a l, in entrambi i casi la retta di equazione y=l è un asintoto orizzontale per il diagramma

Limite infinito per x che tende a $+\infty$ (risp. $-\infty$)

DEFINIZIONE

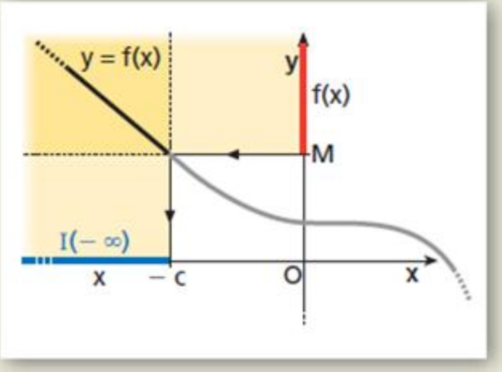
Limite $+\infty$ di una funzione per x che tende a $-\infty$

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x che tende a $-\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $-\infty$ tale che risulti:

$$f(x) > M \text{ per ogni } x \in I.$$



DEFINIZIONE

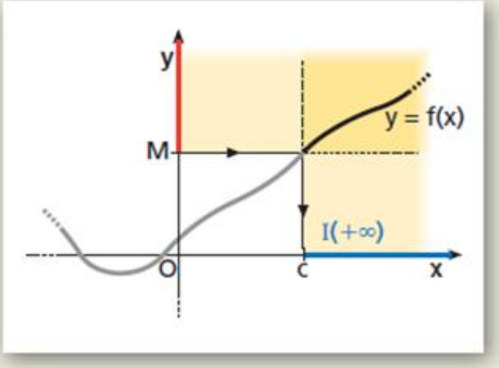
Limite $+\infty$ di una funzione per x che tende a $+\infty$

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che risulti:

$$f(x) > M \text{ per ogni } x \in I.$$



Teorema di unicità del limite

Se la funzione f ha nel punto x_0 come limite l (al finito o no) tale limite è unico

Dimostrazione:

Per assurdo, supponiamo che l non sia unico. Allora esiste un numero reale $l^{'}$ diverso da l tale che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l^{'}$$

Poiché esiste il limite per x che tende a x_0 e tale limite è l, allora:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_{x_0} \quad t.c. \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Ma anche $l^{'}$ è il limite di f(x) per x che tende a x_0. Pertanto:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I^{'}_{x_0} \quad t.c. \quad l' - \varepsilon < f(x) < l' + \varepsilon$$

$$\forall x \in I \cap I'$$

Si può supporre $\varepsilon < \frac{l^{'} - l}{2}$.

Dalle due definizioni si ha che:

$$l' - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \quad \rightarrow \quad l' - \varepsilon < l + \varepsilon \quad \rightarrow \quad \varepsilon > \frac{l^{'} - l}{2}$$

contrariamente alla supposizione iniziale. Dunque l'assunto.

Nozione di continuità per una funzione reale di una variabile reale

DEF. 8 – Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di R e sia x_0 un punto di accumulazione per X, appartenente a X. Si dice che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ossia se il limite di f in x_0 esiste ed è uguale al valore che la funzione assume in x_0.
Dire che tale limite esiste equivale a dire che per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che, non appena x appartiene a X e $|x - x_0| < \delta$ si ha

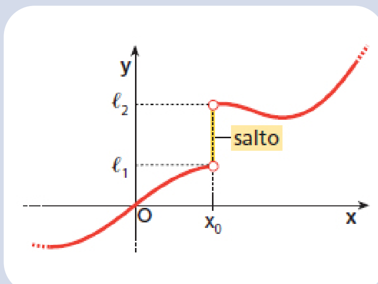
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

La nozione di funzione continua in un punto x_0 precisa dunque quella intuitiva di funzione per la quale a valori della variabile x via via sempre più vicini a x_0 corrispondono valori f(x) via via sempre più vicini a $f(x_0)$.

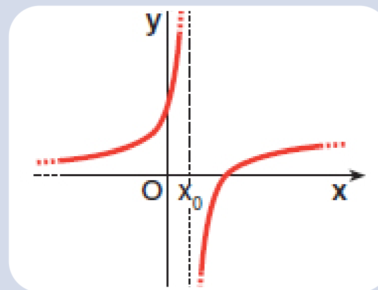
DEF. 9 – Una funzione reale f si dice continua in una parte Y del suo insieme di definizione X se è continua in ogni punto di Y.

Punti di discontinuità di una funzione

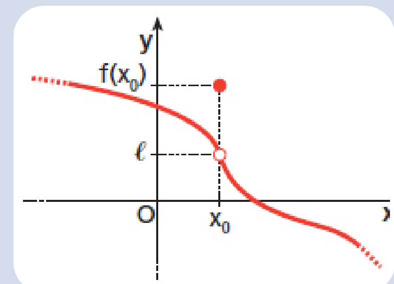
DEF. 10 – Siano f una funzione reale di una variabile reale definita nel sottoinsieme X di R, x_0 un punto di X per esso di accumulazione.
Se f non è continua in x_0, essa si dice anche discontinua nel punto x_0 oppure che presenta una discontinuità in x_0 e tale punto si dice di discontinuità per f.



Discontinuità di I specie o a salto



Discontinuità di II specie



Discontinuità di III specie o eliminabile