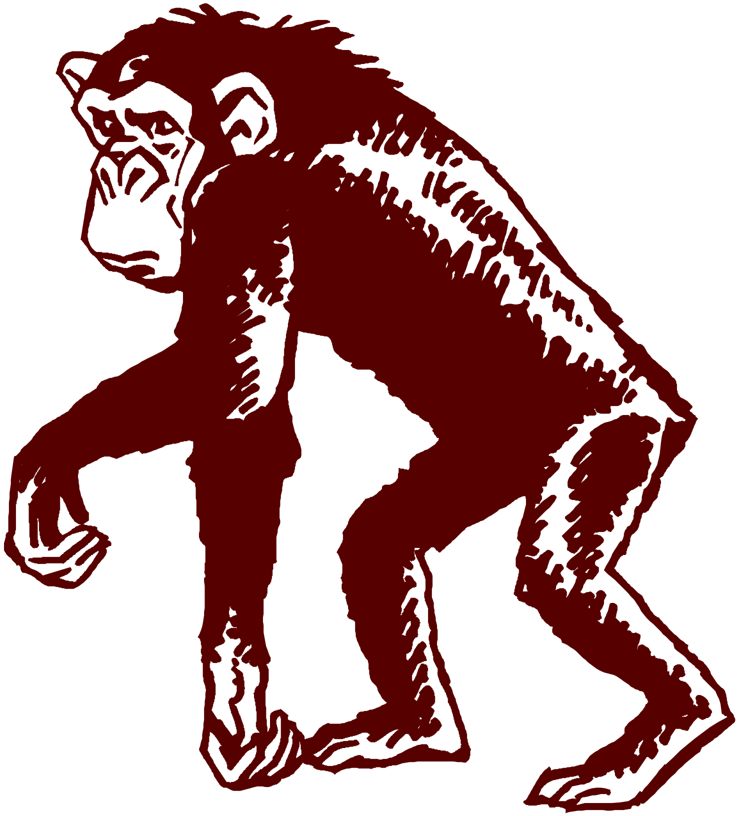
Il linguaggio della Matematica: Gli Insiemi

Prof. Roberto Capone

Il concetto di insieme è un

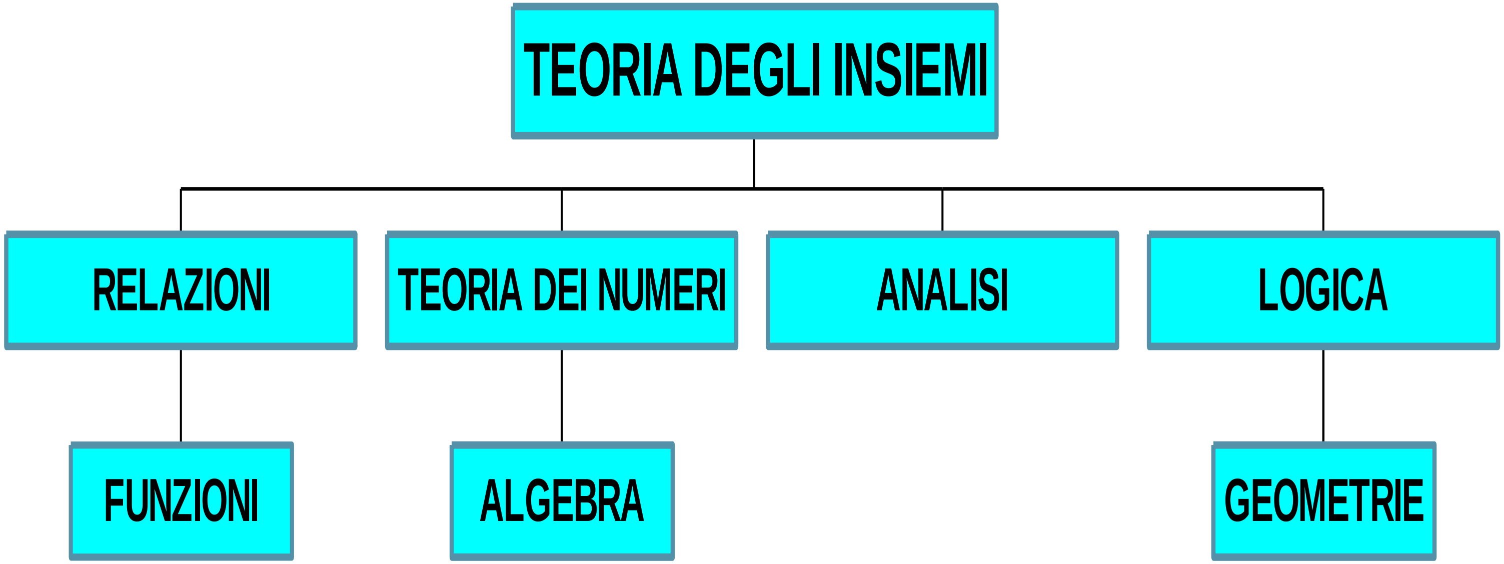
CONCETTO PRIMITIVO proprio come i concetti di punto, retta e piano introdotti nella geometria



Il termine “insieme” in matematica indica una collezione di oggetti , più o meno come nel linguaggio comune

Si tratta di un concetto molto importante perché su di esso si fonda tutto l’edificio della matematica

La TEORIA DEGLI INSIEMI è strettamente connessa con molti settori della matematica



Affinché si possa parlare di insieme in senso matematico occorre poter stabilire senza ambiguità se un oggetto appartiene o meno all'insieme

Perciò in matematica si considerano insiemi solo quei raggruppamenti di oggetti per cui è possibile stabilire, secondo un criterio oggettivo, se un oggetto appartiene o meno al raggruppamento

- Ad esempio è un insieme matematicamente corretto l’insieme delle città della Lombardia.

  Infatti tutti sanno riconoscere le differenti città della regione

- Non è un insieme matematicamente corretto l’insieme dei ragazzi simpatici della classe.

  Ciò perché la simpatia di un compagno o di un altro è soggettiva

Insiemi numerici

N l’insieme dei numeri naturali
Z l’insieme dei numeri interi
Q l’insieme dei numeri razionali
R l’insieme dei numeri reali

Tali insiemi si chiamano anche insiemi numerici

Un insieme privo di elementi si chiama INSIEME VUOTO e si indica col simbolo $\emptyset$

Insiemi finiti ed infiniti

E’ un insieme che ha un numero limitato di elementi

- Insieme finito

- L’insieme delle lettere dell’alfabeto
- L’insieme dei divisori di 6

E’ un insieme che un numero illimitato di elementi

- Insieme infinito

- Gli insiemi numerici N, Z,Q,R, C
- L’insieme dei punti del piano

Simbologia

∈	Appartenenza
∉	Non appartenenza
∪	Unione tra insiemi
∩	Intersezione tra insiemi
–	Differenza tra insiemi
|	Tale che
∅	Insieme vuoto

Il simbolo di appartenenza

- Considera l'insieme A delle lettere dell'alfabeto che costituiscono la parola "mamma".

- Le lettere a, m appartengono a tale insieme e si scrive in simboli: $a \in A$, $m \in A$

- Le lettere b e c non appartengono all'insieme e si scrive $b \notin A$, $c \notin A$ ...

Rappresentazione di un insieme

Con i diagrammi di Eulero Venn:

Per rappresentare un qualsiasi insieme possiamo utilizzare tre diversi metodi. Si voglia ad esempio rappresentare l'insieme che chiameremo "A" di tutti gli amici
di Marco che sono: Andrea, Marta, Simone, Matteo, Anna, Martina.

Attraverso la rappresentazione tabulare (estensiva):

Enunciando la proprietà caratteristica (intensiva):

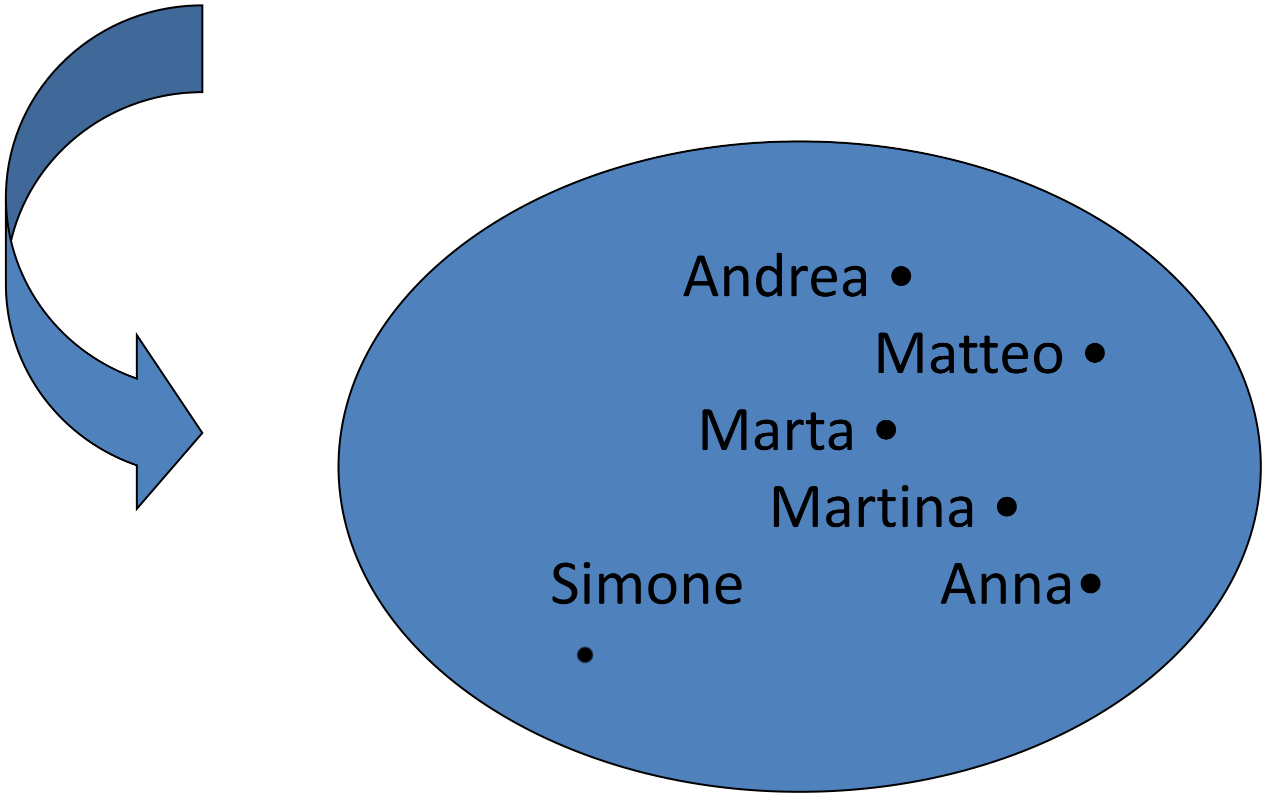
1) Rappresentazione tabulare

A = {Marta; Andrea; Matteo; Martina; Simone; Anna}

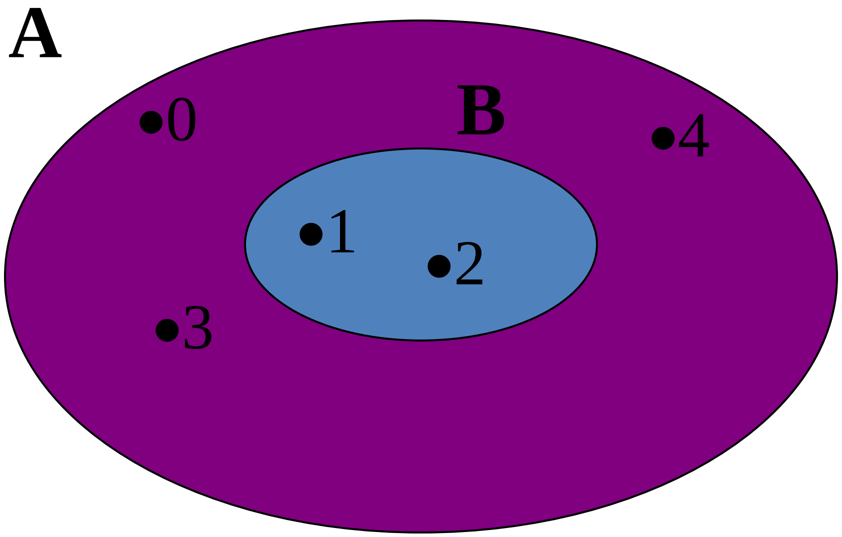
2) Rappresentazione per caratteristica

A = {x | x è amico di Marco}

3) Rappresentazione con diagrammi di Eulero-Venn



Un insieme può essere contenuto in un altro



Si dice allora che B è un sottoinsieme di A:

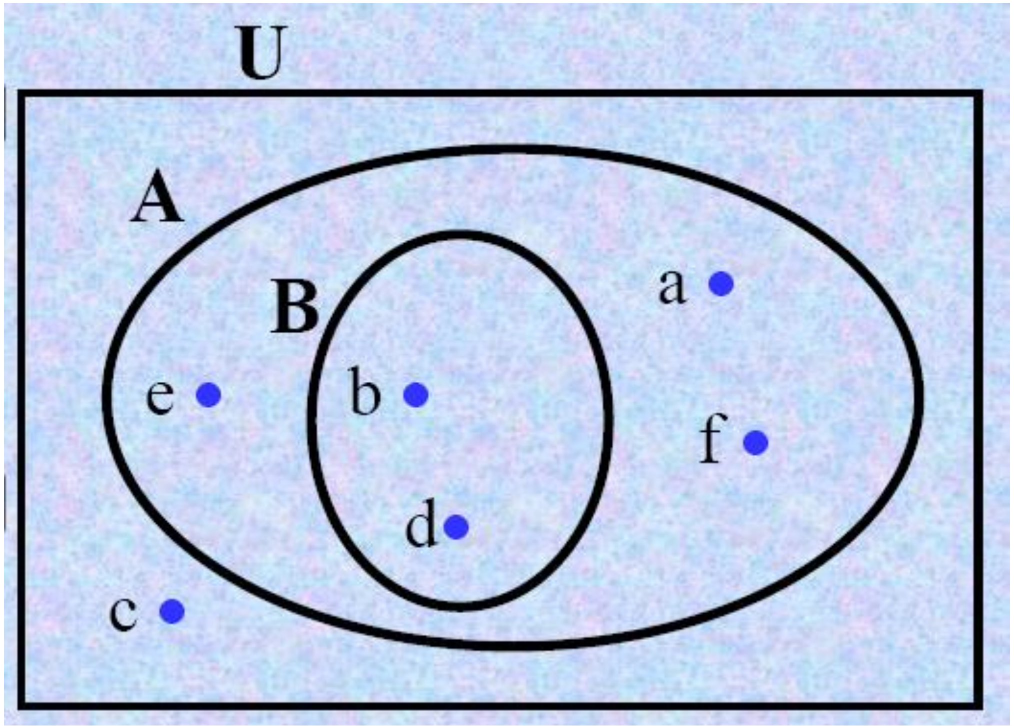
$$\mathbf{B \subseteq A}$$

Esempi

B = {b; d}

A = {a; b; d; e; f}

U = {a; b; c; d; e; f}



$\mathbf{a} \in \mathbf{A},\ \mathbf{a} \in \mathbf{U},\ \mathbf{a} \notin \mathbf{B},$

$\mathbf{b} \in \mathbf{B},\ \mathbf{b} \in \mathbf{A},\ \mathbf{b} \in \mathbf{U}$

$\mathbf{c} \in \mathbf{U},\ \mathbf{c} \notin \mathbf{B},\ \mathbf{c} \notin \mathbf{A}$

Esempi

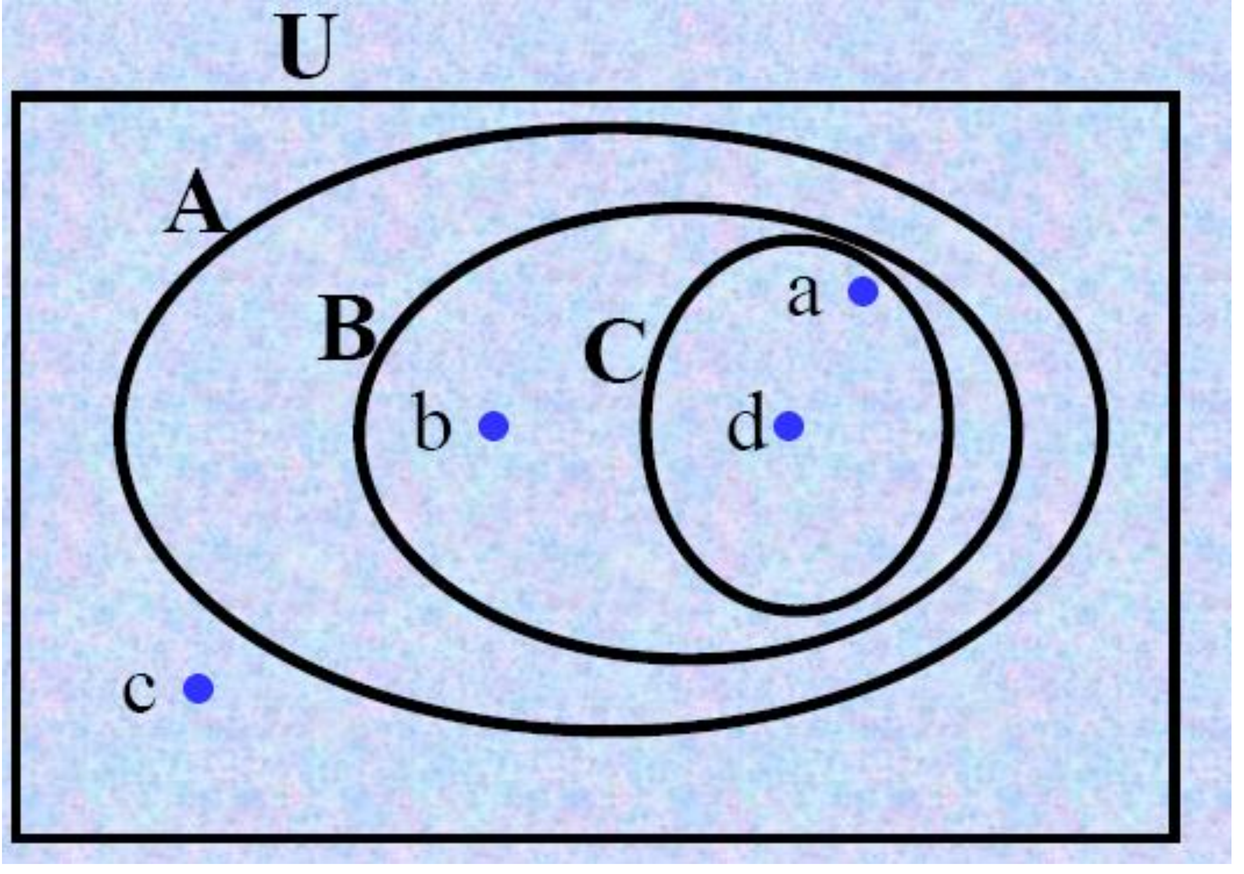
B è un SOTTOINSIEME IMPROPRIO di A

Ogni insieme è un SOTTOINSIEME (IMPROPRIO) di sé stesso

L'insieme vuoto è un SOTTOINSIEME (IMPROPRIO) di ogni insieme

A è un SOTTOINSIEME DI U

C è un SOTTOINSIEME DI B



$B \subseteq A$

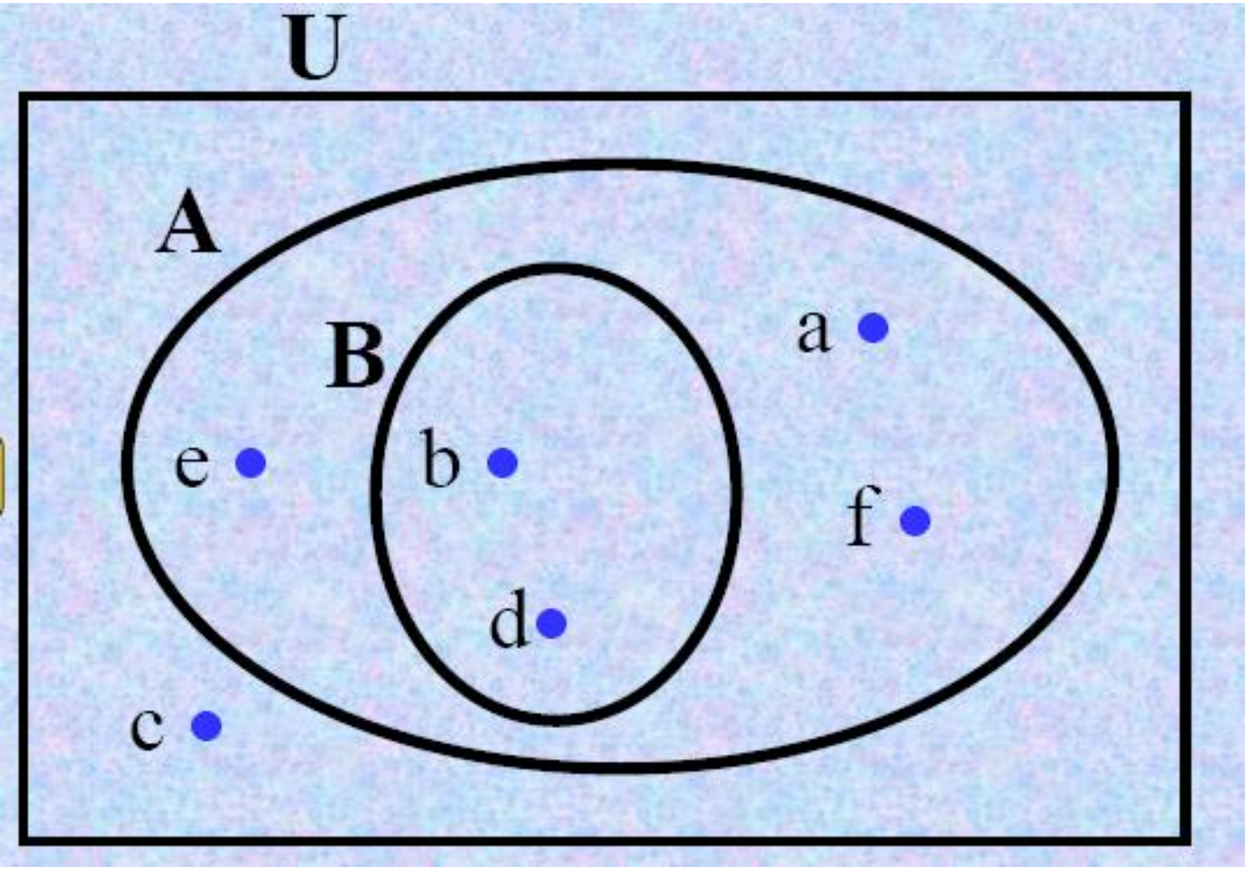
$\varnothing \subseteq C, \varnothing \subseteq B, \ldots..$

$A \subseteq A, B \subseteq B, \ldots..$

$A \subset U$

$C \subset B$

Esempi



$U = \{a; b; c; d; e; f\}$

$A = \{a; b; d; e; f\}$

$B = \{b; d\}$

$\{b; d\} \subseteq B$

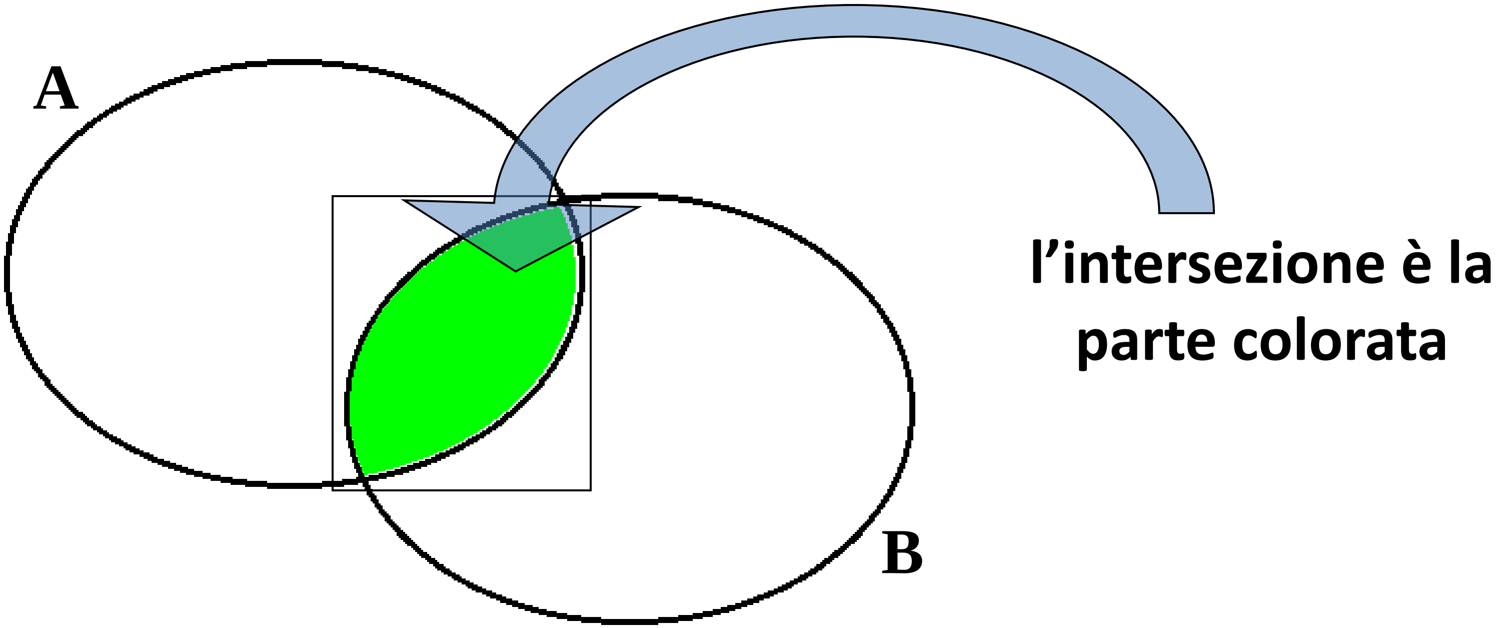
$\{a; b; d\} \subset A$

$\{d\} \subset B$

OPERAZIONI TRA INSIEMI

- Intersezione
- Unione
- Differenza
- Prodotto cartesiano

Si definisce **intersezione** di due insiemi A e B, l'insieme formato dagli elementi comuni ad A e B.



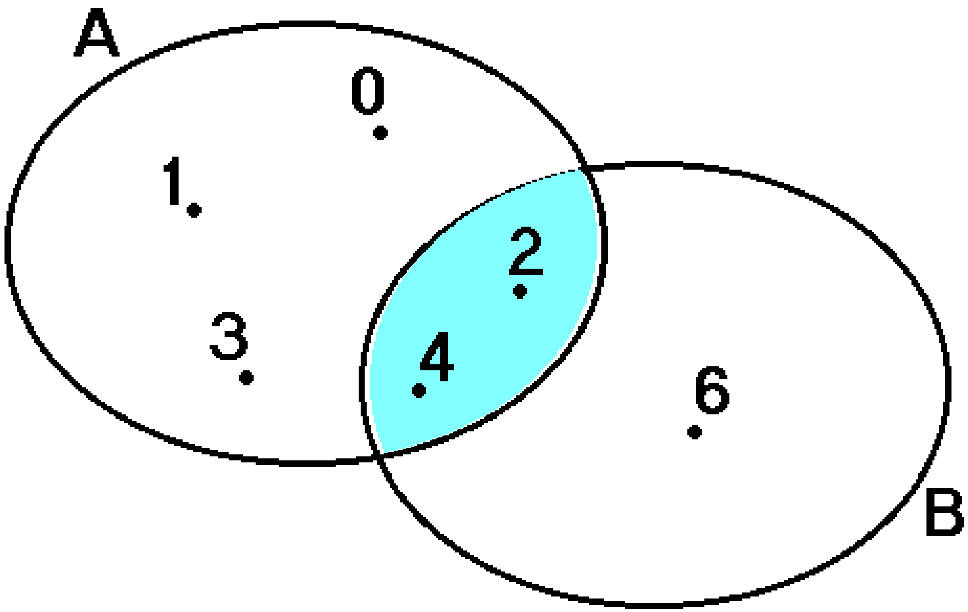
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \; e \; x \in B\}$$

Dati ad esempio i due insiemi
A = {0,1,2,3,4} e **B = {2,4,6}**, l'intersezione tra **A** e **B** è data dal seguente insieme:

$$\mathbf{A \cap B = \{2, 4\}}$$

Il simbolo $\cap$ è il simbolo che caratterizza l'operazione. Si può leggere "**A** intersecato **B**" oppure "**A** e **B**".

Con i diagrammi di Venn, il risultato dell'esempio precedente sarà indicato così:

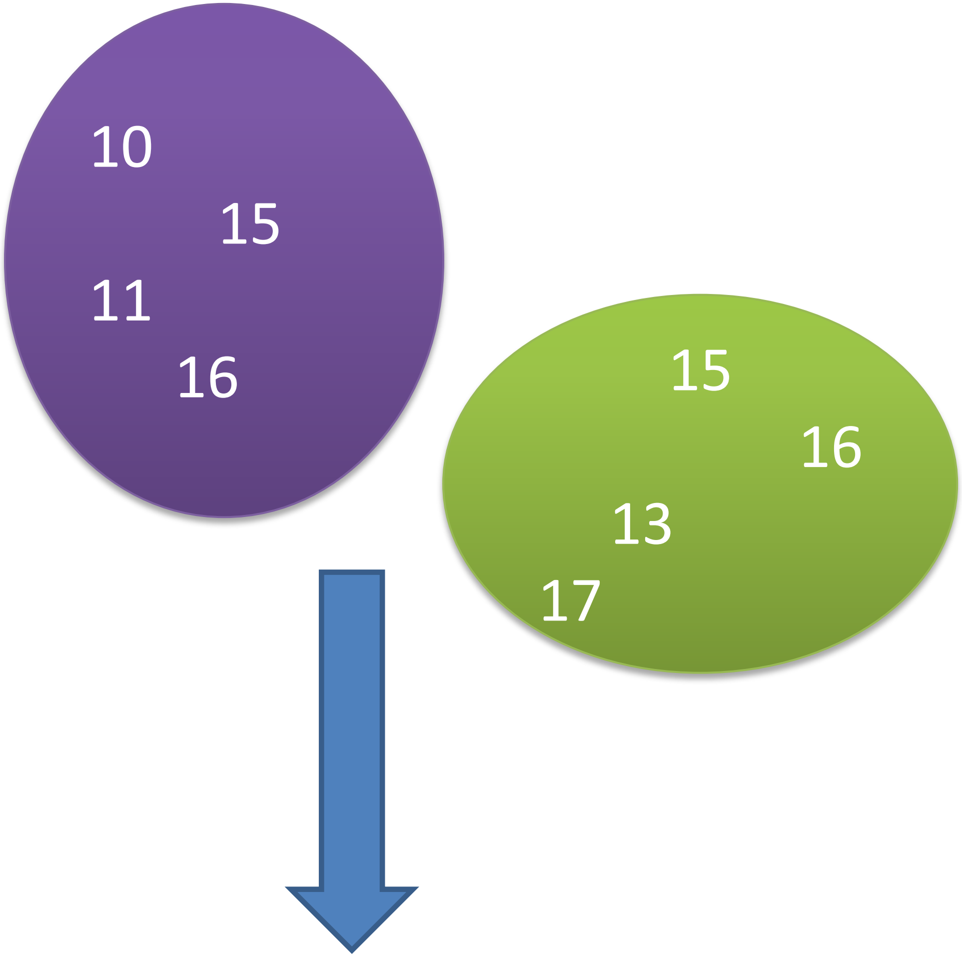


Esempio……

Siano E={10, 11, 15, 16},

F={13, 15, 16, 17},

Allora I = E ∩ F = {15, 16}



. . . .

CASI PARTICOLARI DELL'INTERSEZIONE

$$A \cap A = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

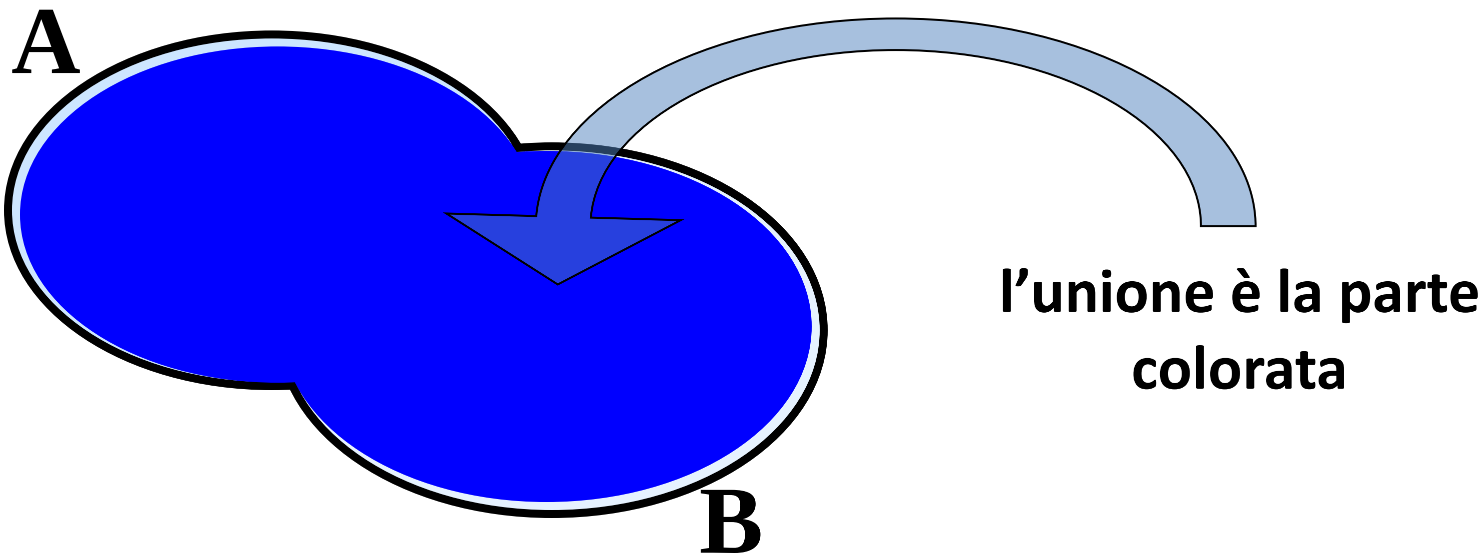
$$A \cap \underline{A} = \varnothing$$

$$A \cap U = A$$

Se $A \cap B = \varnothing$,
A e B si dicono DISGIUNTI

Se $B \subset A$ allora $A \cap B = B$

Si definisce **unione** di due insiemi A e B, l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi dati.



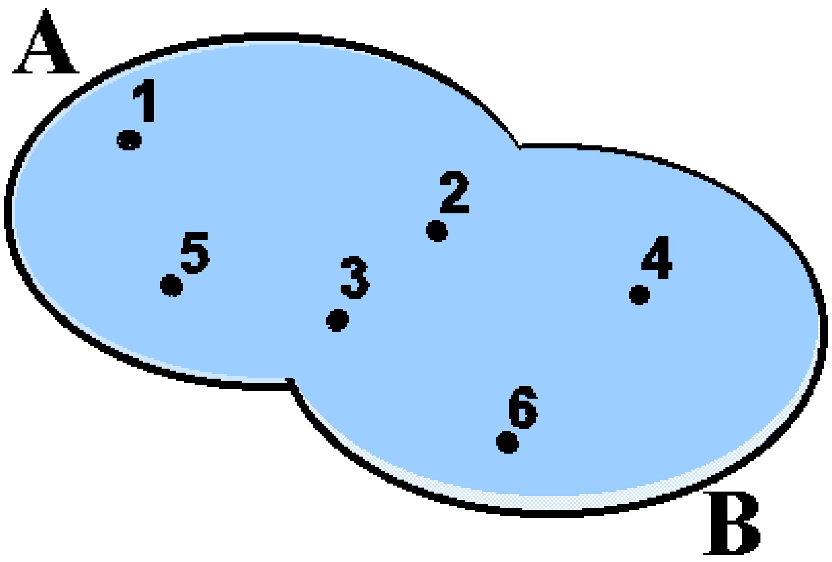
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \textit{o} \ x \in B\}$$

Dati ad esempio i due insiemi
A = **{1,2,3,5}** e **B** = **{2,3,4,6}**, l'unione tra **A** e **B** è data dal seguente insieme:

$$\mathbf{A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}}$$

Il simbolo $\cup$ è il simbolo che caratterizza l'operazione. Si può leggere "**A** unito **B**" oppure "**A** o **B**".

Con i diagrammi di Venn, il risultato dell'esempio precedente sarà:

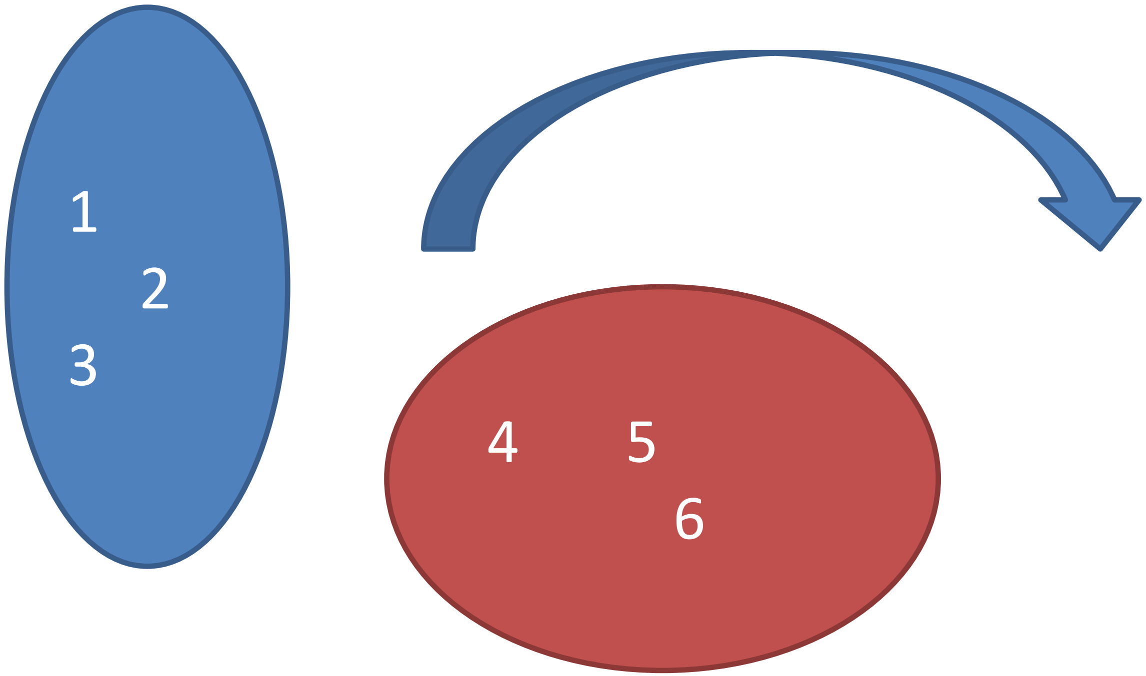


Esempio……

Siano E={1, 2, 3}

F={4, 5, 6},

Allora R = E ∪ F = {1, 2, 3, 4, 5, 6}



CASI PARTICOLARI DELL’UNIONE

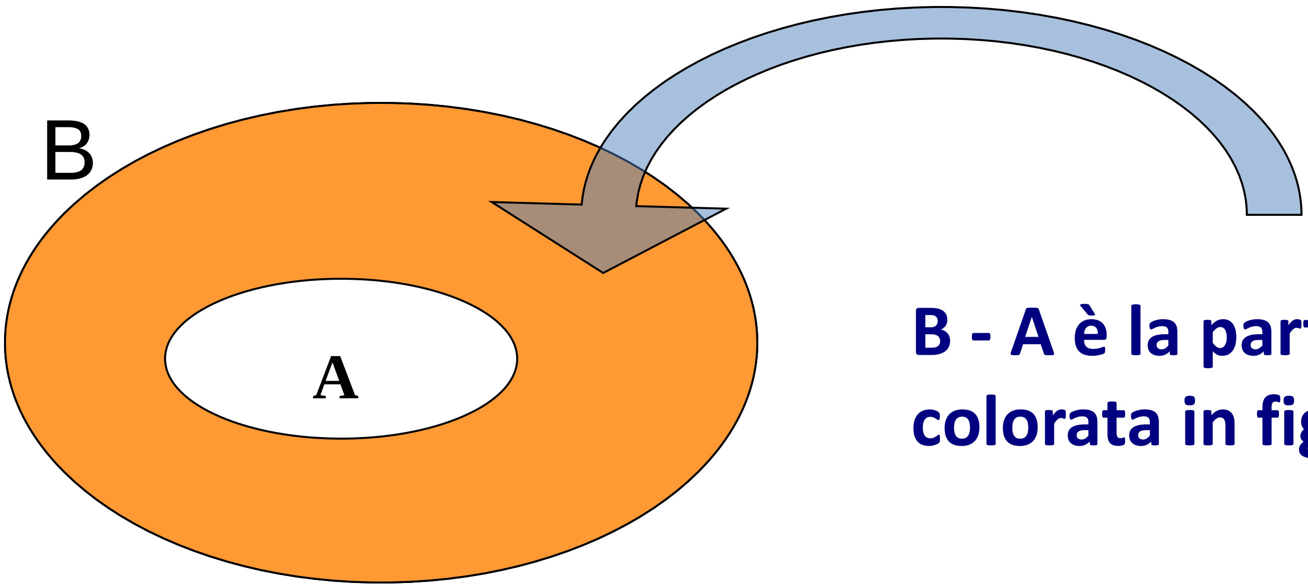
$$A \cup A = A$$

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cup \underline{A} = U$$

Se $B \subset A$ allora $A \cup B = A$

Si definisce differenza complementare fra due insiemi B ed A l’insieme degli elementi di B che non appartengono ad A.



B - A è la parte colorata in figura.

Si ha, per definizione:

$$B - A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$$

L’operazione di differenza complementare non soddisfa la proprietà commutativa, cioè:

$$B-A \neq A-B$$

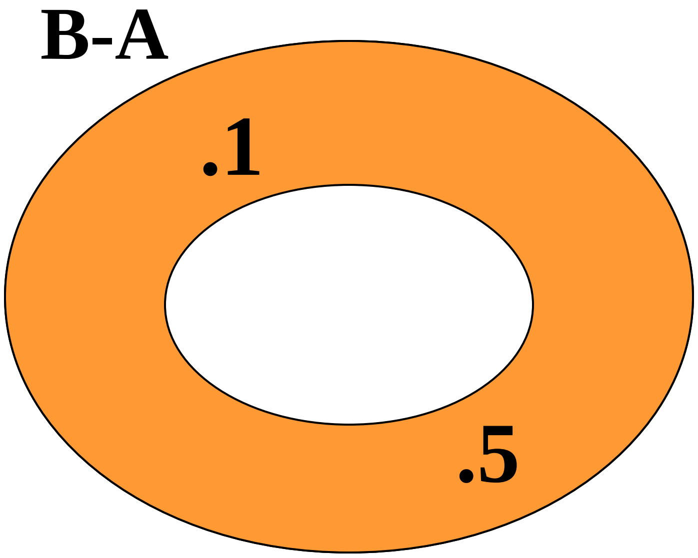
Infatti...

Dati ad esempio i due insiemi
B = **{1,2,3,5}** e A = **{2,3}**, accade che:

$$\mathbf{B - A = \{1,5\}}$$

$$\mathbf{A - B} = \{\emptyset\}$$

Con i diagrammi di Venn, l'esempio precedente diventa:



Esempio……

Siano E={a, b,c,d}

F={c, d, e, f, g},

Quindi D = E - F = {a, b}

Si definisce **prodotto cartesiano** tra due insiemi A e B non vuoti l'insieme formato da tutte le coppie <u>ordinate</u> tali che il 1° elemento $\in$ ad A ed il 2° elemento $\in$ a B.

Dati gli insiemi

A={2, 4} B={a,f}

AxB={(2,a);(2,f);(4,a);(4,f)}

Attenzione: per l'operazione **prodotto cartesiano** non vale la proprietà commutativa! $A \times B \neq B \times A$

Infatti, dati gli insiemi

$A=\{2, 4\}$ $B=\{a,f\}$

$A \times B=\{(2,a);(2,f);(4,a);(4,f)\}$

$B \times A=\{(a,2);(a,4);(f,2);(f,4)\}$

Come si rappresenta il prodotto cartesiano

Dati due insiemi $A = \{1,2,3\}\ e\ B = \{z, w\}$ il loro prodotto cartesiano si può rappresentare con la seguente **tabella a doppia entrata**

B → / A ↓	z	w
1	(1,z)	(1,w)
2	(2,z)	(2,w)
3	(3,z)	(3,w)

Proprietà delle operazioni

Proprietà di idempotenza

$A \cap A = A \qquad A \cup A = A$

Proprietà commutativa dell'intersezione $A \cap B = B \cap A$

Proprietà commutativa dell'unione $A \cup B = B \cup A$

Proprietà associativa dell'intersezione $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Proprietà associativa dell’unione

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Leggi di assorbimento

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$$

Proprietà distributiva dell’intersezione rispetto all’unione

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$$

Proprietà distributiva dell’unione rispetto all’intersezione

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Gli insiemi come modello per risolvere problemi

- Indagine sulla conoscenza delle lingue straniere

Da una indagine sulla conoscenza delle lingue straniere, effettuata su un gruppo di 500 italiani è risultato che:

- Il 60% conosce l'inglese;
- Il 30% conosce il francese;
- Il 20% non conosce né l'inglese né il francese.

Quanti conoscono sia il francese che l'inglese?

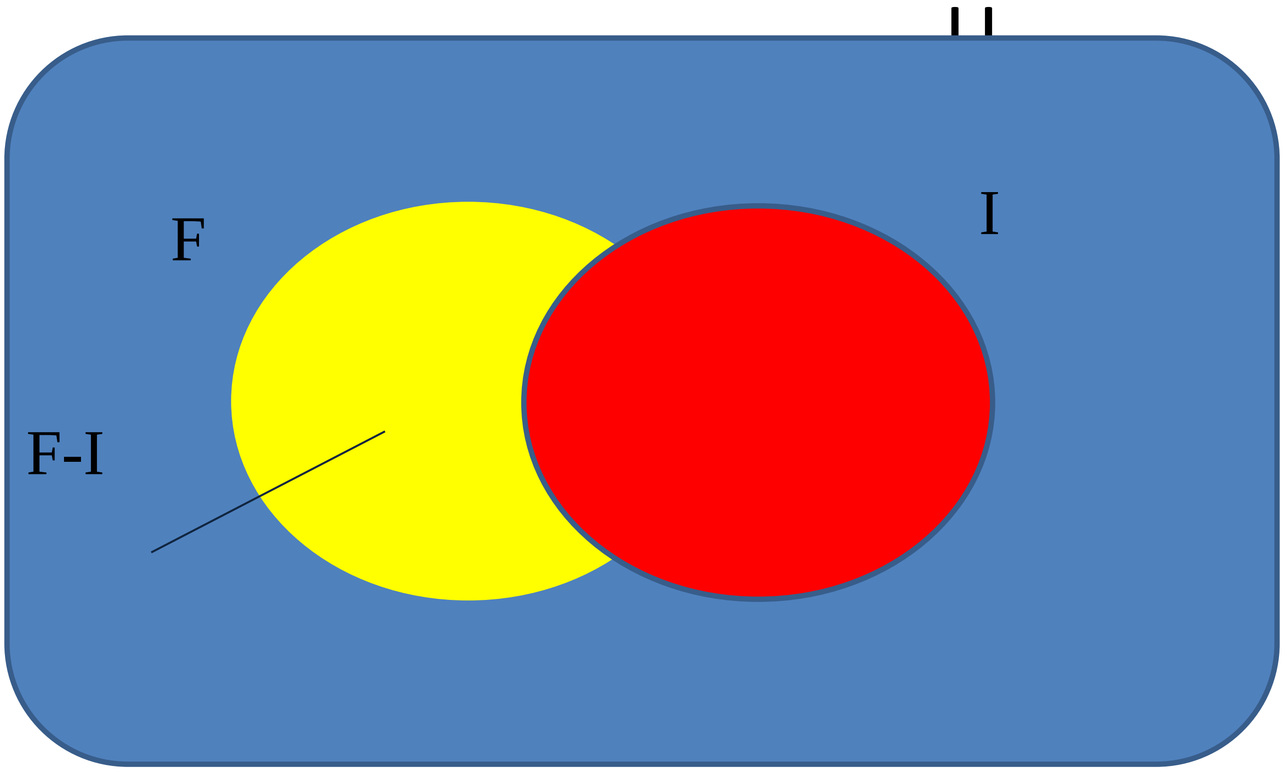
Quanti soltanto l'inglese?

Quanti soltanto il francese?

Familiarizziamo con il problema

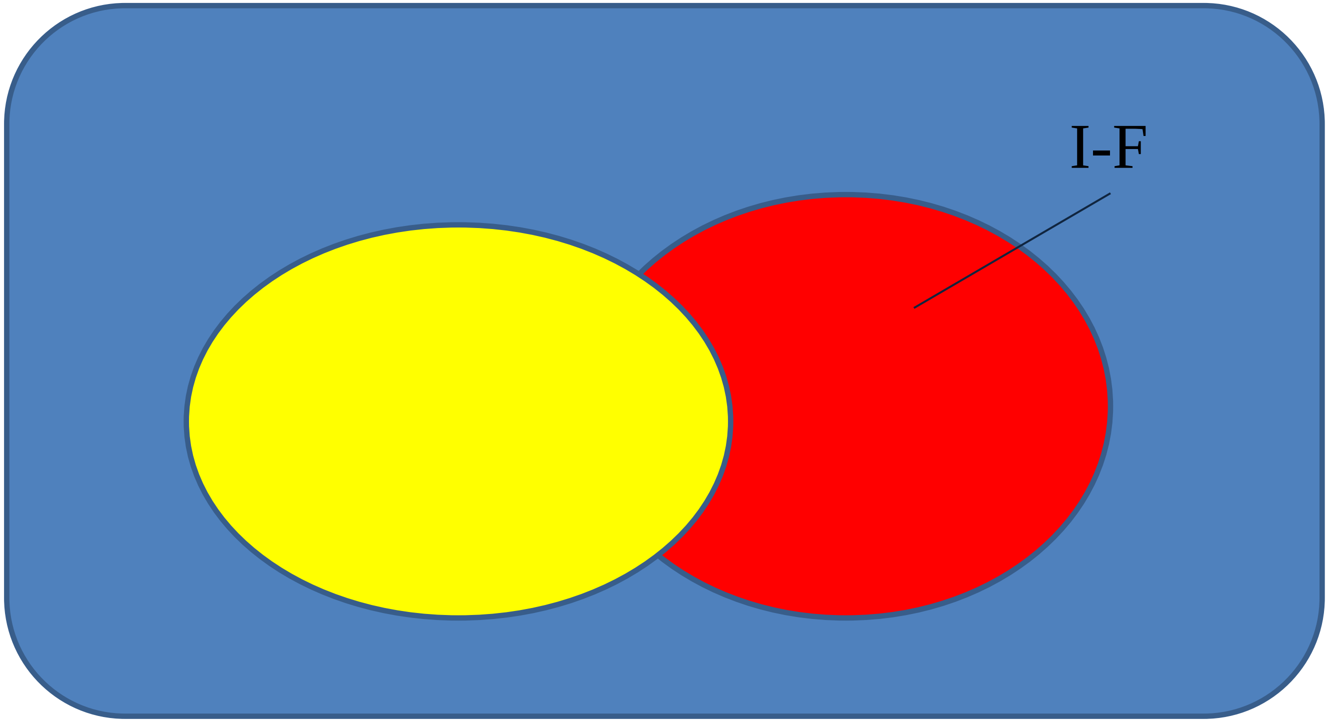
Dati	
Gruppo di 500 italiani	
Il 60% conosce l'inglese	300 conoscono l'inglese
Il 30% conosce il francese	150 conoscono il francese
Il 20% non conosce né l'inglese né il francese	100 non conoscono né l'inglese né il francese
Obiettivo Il numero di persone: • Che sanno sia l'inglese che il francese • Che sanno solo l'inglese • Che sanno solo il francese	

Costruiamo il modello del problema



L'insieme delle persone
che sanno solo il francese

L’insieme delle persone che sanno solo l’inglese



Svolgiamo i calcoli

- I passo

Sappiamo che U=500

U-(F∪I)=100

Quindi possiamo ricavare il numero degli elementi di F∪ I=500-100=400

- II passo

F-I= 400-300=100

Continuiamo con i calcoli

- III passo

Sappiamo che F∪ $I = 400$ e F=150

Dunque il numero degli elementi di

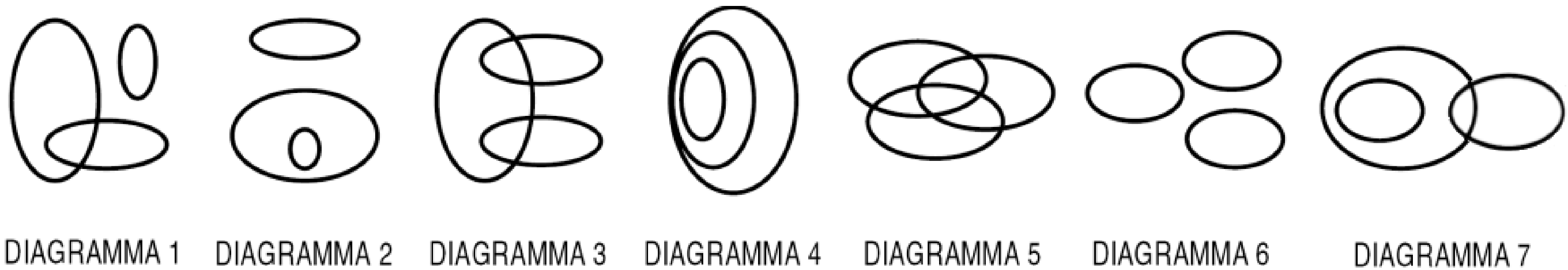
I-F=400-150=250

- IV passo

Se F=150 e I=300, la loro intersezione ovvero il numero delle persone che parlano sia il francese che l'inglese è

F∩ I=150-100=50

Logica ed insiemistica



Individuare il diagramma che soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: Laureati, Diplomati, Medici

Individuare il diagramma che soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: cinema, film, discoteche

Individuare il diagramma che soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: appartamenti, cucine, piatti

Individuare il diagramma che soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: professori, cattedre, lavagne

Logica ed insiemistica

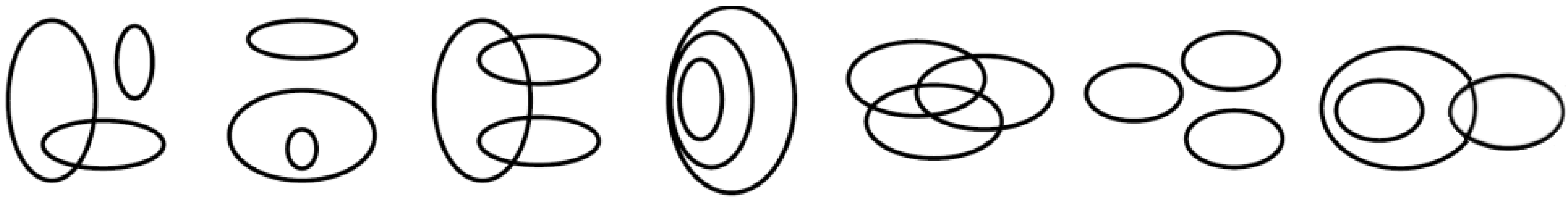


DIAGRAMMA 1 DIAGRAMMA 2 DIAGRAMMA 3 DIAGRAMMA 4 DIAGRAMMA 5 DIAGRAMMA 6 DIAGRAMMA 7

Individuare il diagramma che soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: pensionati, neonati, cittadini spagnoli.

Individuare il diagramma che soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: piloti, biondi, genovesi

Individuare il diagramma che soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: genitori, padri, culle