



*Prof. Roberto Capone*

# Limiti e continuità delle funzioni reali

Corso di Analisi Matematica  
2013/2014

Corso di studi in Ingegneria edile



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DEL MOLISE

# Introduzione storica

Uno dei periodi più importanti della storia della matematica è stata quello che comprende i secoli durante i quali si sono gettate le basi del calcolo infinitesimale: dalla fine del 500, con i primi tentativi di proseguire l'opera di Archimede, alla redazione degli scritti indipendenti di Newton e Leibniz (XVII e XVIII sec.). Il concetto di limite si trova già presente, anche se in forma non esplicita, nella matematica greca, poiché molti risultati sui calcoli di aree e di volumi ricavati dai matematici greci (ad esempio Eudosso ed Archimede) erano, in sostanza, basati su un passaggio al limite (si pensi ad esempio, al ben noto Paradosso di Achille).

# Introduzione storica

Dovevano, però, trascorrere molti secoli prima di giungere con Eulero nel 1755 ad una definizione abbastanza precisa di limite, anche se Eulero non la utilizza e non sviluppa la teoria dei limiti. Anche D'Alembert diede una formulazione del concetto di limite. Nell'articolo "limite", scritto per l'Encyclopédie egli chiamava una quantità limite di una seconda quantità (variabile) il valore con cui questa seconda quantità si avvicinava così tanto che la differenza fra le due quantità fosse inferiore a qualsiasi quantità data (senza effettivamente coincidere con essa). L'imprecisione di questa definizione la rese inaccettabile per i suoi contemporanei, infatti gli autori di manuali matematici dell'Europa continentale continuarono a usare fino alla fine del XVIII secolo il linguaggio e i concetti di Eulero.

Si deve a Cauchy e, soprattutto, alla successiva formalizzazione di Weierstrass, una definizione rigorosa di limite e, mediante essa, una costruzione rigorosa dell'analisi matematica. Cauchy assunse come fondamentale il concetto di limite di D'Alembert, ma gli conferì una maggiore precisione.

# Introduzione storica

Egli formulò una definizione relativamente precisa di limite: "Quando i valori successivi attribuiti a una variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato così che finiscono con il differire da questo per una differenza piccola quanto si vuole, quest'ultimo viene detto il limite di tutti gli altri. Così per esempio un numero irrazionale è il limite delle diverse frazioni che ne forniscono i valori sempre più approssimati. In geometria la superficie del cerchio è il limite verso il quale convergono le superfici dei poligoni iscritti, man mano che il numero dei lati cresce."

La definizione di Cauchy, come leggiamo, faceva uso di espressioni come "valori successivi" o "avvicinarsi indefinitamente" o "così piccolo quanto si vuole". Per quanto suggestive queste definizioni sono prive di quella precisione che generalmente si esige dalla matematica. Ma su quella definizione Cauchy ha fondato la sua opera analitica, universalmente riconosciuta come basilare per l'analisi moderna. E' solamente con Weierstrass, però, che si arriva al concetto di limite nella forma ancora oggi ritenuta valida. La prima pubblicazione ufficiale avviene ad opera di Heine, un allievo dello stesso Weierstrass, in "*Elemente*", nel 1872, dove si assiste alla nascita delle formulazioni in termini di intorni, con gli  $\epsilon$  e i  $\delta$ , di Weierstrass e della sua scuola.

# Nozioni di Topologia della retta reale

La nozione di intorno di un punto traduce il concetto intuitivo di zona circostante ad un punto. Più formalmente possiamo dare la seguente

**DEF. 1** – Sia  $x_0$  un punto della retta numerica  $R$ , un qualunque intervallo aperto e limitato di centro  $x_0$  del tipo  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  si dice intorno del punto  $x_0$ . Il numero reale positivo  $\delta$  si chiama semidimensione dell'intorno e  $x_0$  centro dell'intorno.

**DEF. 2** – Siano  $x_0$  un punto di  $R$  e  $X$  un sottoinsieme di  $R$ . Si dice che  $x_0$  è di accumulazione per l'insieme  $X$  se ad ogni intorno di  $x_0$  appartengono punti di  $X$  diversi da  $x_0$ .

L'ipotesi di limitatezza dell'insieme infinito  $X$  è essenziale perché esista almeno un punto di accumulazione. Infatti  $N$ , pur essendo infinito, non è dotato di alcun punto di accumulazione. Si noti che  $x_0$  può appartenere a  $X$  ma può anche non appartenervi.

# Nozioni di Topologia della retta reale

**PROPOSIZIONE** – Un punto  $x_0$  di  $\mathbb{R}$  è di accumulazione per l'insieme  $X \subseteq \mathbb{R}$  (se e) solo se ad ogni intorno di  $x_0$  appartengono infiniti punti di  $X$ . Conseguentemente, se esiste un punto di accumulazione per il sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}$ ,  $X$  è necessariamente infinito.

## Dimostrazione

Si consideri la successione di intorni di  $x_0$ ,  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left( \left] x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right[ \right)_{n \in \mathbb{N}}$ . Per ogni intero positivo  $n$ , detto  $x_n$  un punto di  $X$  diverso da  $x_0$  e appartenente a  $I_n$ , esiste un indice  $m > n$  tale che  $x_n \notin I_m$  ed esiste almeno un altro punto  $x_m$  di  $X$ , diverso da  $x_0$  e da  $x_n$  che appartenga a  $I_m$ . Conseguentemente ogni intorno  $I_n$  contiene punti infiniti di  $X$  e di questa stessa proprietà gode quindi un qualunque intorno  $I$  di  $x_0$ , questo contenendo ogni intorno  $I_n$  per  $n$  sufficientemente grande

# Nozioni di Topologia della retta reale

**TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS** – Ogni sottoinsieme  $X$  infinito e limitato della retta numerica è dotato di almeno un punto di accumulazione.

## Dimostrazione

Poiché  $X$  è limitato, esiste un intervallo  $[a,b]$  che lo contiene. Sia  $c$  il punto medio dell'intervallo  $[a,b]$  e si considerino i due intervalli  $[a,c]$  e  $[c,b]$ . Poiché  $X$  è infinito, in almeno uno di essi cadono infiniti punti di  $X$ . Supponiamo che questo intervallo sia  $[a,c]$ . Sia  $c_1$  il punto medio di tale intervallo e si considerino gli intervalli  $[a, c_1]$  e  $[c_1, c]$ . Anche adesso, in almeno uno di questi intervalli cadono infiniti punti di  $X$ . Così si prosegue. Si viene a creare una successione  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  di intervalli inclusi in  $[a,b]$  tali che si abbia

$$a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_1 \text{ e } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Posto  $x_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$ , è facile verificare che  $x_0$  è un punto di accumulazione per  $X$ , in quanto ogni intorno di  $x_0$ ,  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  contiene l'intervallo  $[a_n, b_n]$  per  $n$  sufficientemente grande e quindi contiene infiniti punti di  $X$ .

# Nozioni di Topologia della retta reale

**DEF. 3** – Un punto  $x_0 \in X \subseteq R$  ma che non sia di accumulazione, si dice punto isolato per  $X$

Evidentemente un punto  $x_0$  dell'insieme  $X \subseteq R$  è isolato se e solo se esiste un intorno  $I$  di  $x_0$  tale che  $I \cap X$  si riduca al solo punto  $x_0$

**DEF. 4** – Siano  $X$  un sottoinsieme di  $R$ ,  $x_0$  un punto di  $X$ . Il punto  $x_0$  si dice interno ad  $X$  se esiste un intorno di  $x_0$  incluso in  $X$ . Il punto  $x_0$  si dice esterno ad  $X$  se esso è interno al complementare di  $X$ .

Evidentemente un punto  $x_0$  interno ad  $X$  è senz'altro un punto di accumulazione per  $X$

**DEF. 5** – Siano  $x_0$  un punto di  $R$  e  $X$  un sottoinsieme di  $R$ . il punto  $x_0$  si dice di frontiera per  $X$  se non è né interno né esterno a  $X$  o, ciò che è lo stesso, se ad ogni intorno di  $x_0$  appartengono sia punti di  $X$  sia punti del complementare di  $X$



# Nozioni di Topologia della retta reale

**DEF. 6** – Sia  $X$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ . L'insieme dei punti di accumulazione per  $X$ , l'insieme dei punti interni a  $X$ , l'insieme dei punti di frontiera per  $X$  si chiamano rispettivamente il derivato, l'interno, la frontiera di  $X$  e si denotano rispettivamente con i simboli  $D_r(X), \dot{X}, F_r(X)$ . L'insieme  $X \cup D_r(X)$  si chiama la chiusura o l'aderenza dell'insieme  $X$  e si denota col simbolo  $\bar{X}$

# Insiemi compatti della retta numerica

## DEF. 7

Un sottoinsieme della retta numerica chiuso e limitato si dice compatto

## Teorema

Ogni sottoinsieme compatto  $X$  della retta numerica è dotato di minimo e di massimo

## Dimostrazione

Posto  $e' = \inf X$ , se per assurdo  $e'$  non appartenesse a  $X$ , esso dovrebbe essere di accumulazione per  $X$ , per una delle due proprietà di cui gode l'estremo inferiore di  $X$ ; essendo  $X$  chiuso,  $e'$  dovrebbe appartenere a  $X$ , ciò che è una contraddizione. Analogamente si prova che l'estremo superiore di  $X$  appartiene a  $X$  e che quindi  $X$  è dotato di massimo.

# Teorema di Heine-Borel

## Teorema

Se  $X$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ , le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- a)  $X$  è compatto
- b) Se  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione crescente di sottoinsiemi aperti di  $\mathbb{R}$  tali che  $X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  esiste un indice  $m$  tale che  $X \subseteq A_n, \forall n \geq m$ ;
- c) Ogni ricoprimento  $\mathcal{R}$  di  $X$  costituito da sottoinsiemi aperti di  $\mathbb{R}$  contiene un ricoprimento finito di  $X$ .

# Nozione di limite

Se  $f$  è una funzione reale definita nel sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}$  e  $x_0$  un punto di accumulazione al finito per  $X$ , è importante esaminare l'andamento dei valori  $f(x)$  che la funzione assume in punti  $x \neq x_0$  presi via via sempre più vicini a  $x_0$ . La possibilità di considerare tali punti è garantita dal fatto che  $x_0$  è di accumulazione per  $X$ .

**DEF. 8** – Si dice che il numero reale  $l$  è il limite della funzione  $f$  in  $x_0$  o anche che  $f(x)$  converge a  $l$  o che tende a  $l$  in  $x_0$  e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

quando, comunque si consideri un numero reale  $\varepsilon > 0$  esiste un numero reale  $\delta > 0$  tale che si abbia:

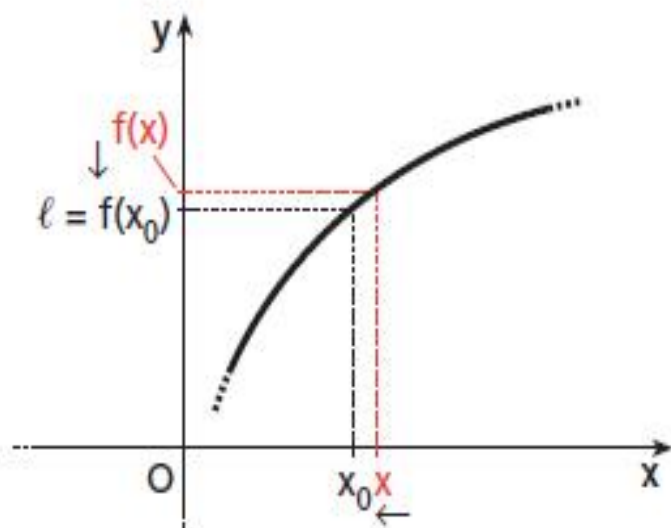
$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

o, ciò che è lo stesso,

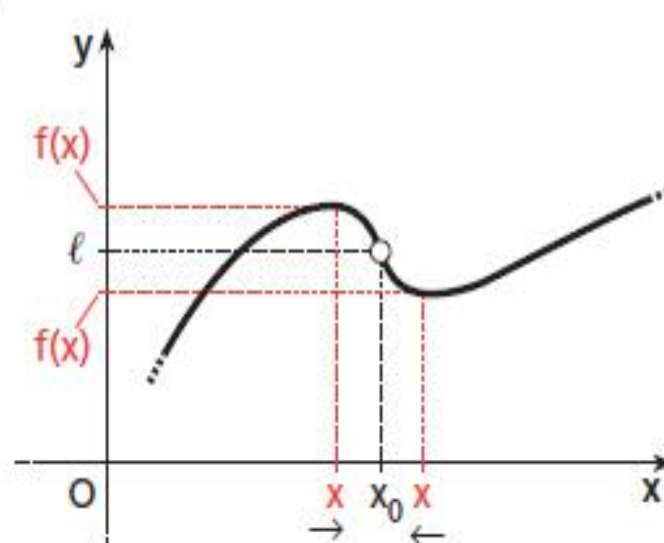
$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$\forall x \in X \text{ t. c. } 0 < |x - x_0| < \delta$$

# Limite finito in un punto – significato geometrico



a. Nel caso di una funzione  $f$  come quella disegnata in figura vediamo che, se  $x$  si avvicina a  $x_0$ , allora  $f(x)$  si avvicina a  $l = f(x_0)$ .



b. Possiamo porci la stessa domanda anche nel caso in cui  $x_0$  è punto di accumulazione per  $D$ , ma  $x_0 \notin D$  e quindi l'espressione  $f(x_0)$  non ha significato. A quale valore  $l$  si avvicina  $f(x)$  quando  $x$  si avvicina a  $x_0$ ?

# Limite infinito

**DEF. 9** – Si dice che  $+\infty$  è il limite della funzione  $f$  in  $x_0$  o anche che  $f(x)$  diverge positivamente o che tende a  $+\infty$  in  $x_0$  e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

se

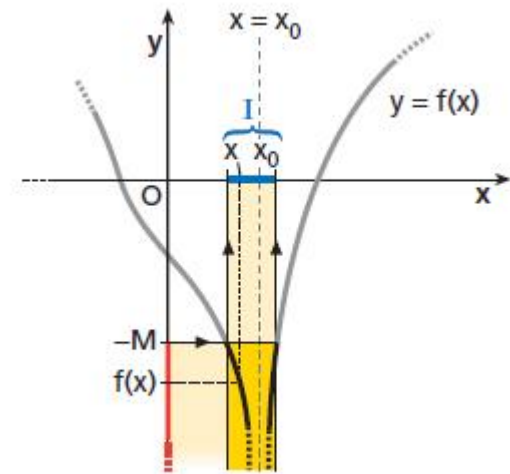
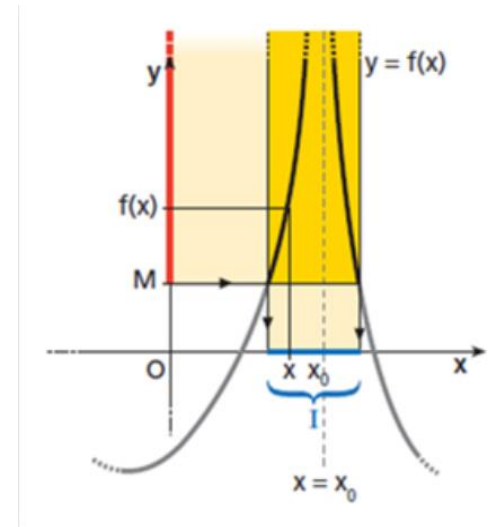
$$\forall M > 0 \exists I_{x_0} \text{ t.c. } f(x) > M$$

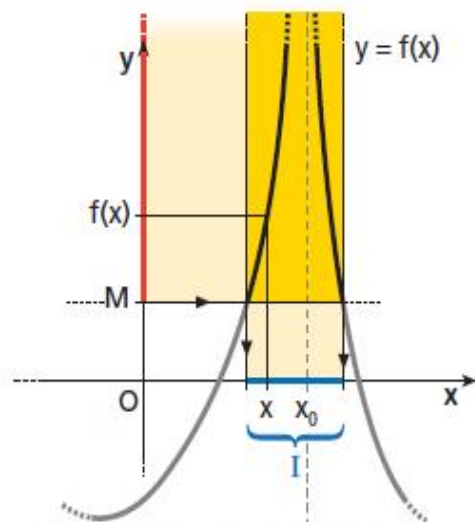
**DEF. 10** – Si dice che  $-\infty$  è il limite della funzione  $f$  in  $x_0$  o anche che  $f(x)$  diverge negativamente o che tende a  $-\infty$  e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

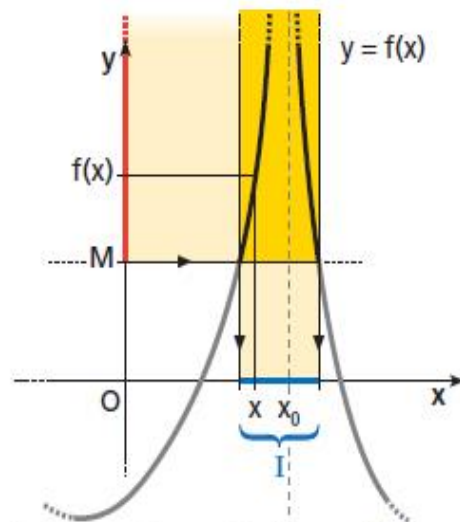
se

$$\forall M > 0 \exists I_{x_0} \text{ t.c. } f(x) < -M$$

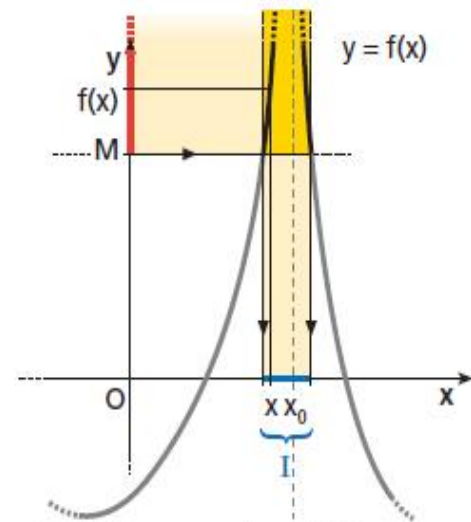




a. Fissiamo  $M \in \mathbb{R}^+$ . Individuiamo un intorno  $I$  di  $x_0$  tale che  $f(x) > M$   $\forall x \in I - \{x_0\}$ .

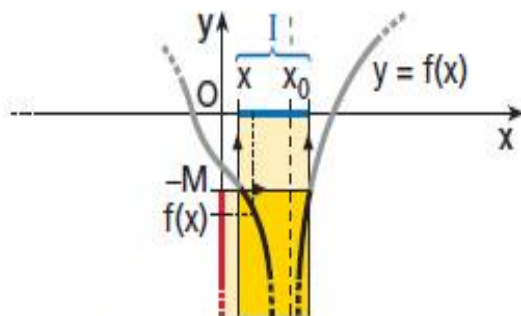


b. Se prendiamo  $M$  più grande, esiste ancora e risulta, in genere, più piccolo.

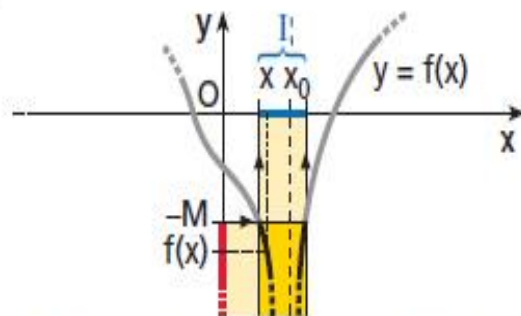


c. Scegliamo un valore di  $M$  ancora più grande. Se  $I$  è abbastanza piccolo, ossia se  $x$  è abbastanza vicino a  $x_0$ , allora  $f(x)$  supera  $M$ .

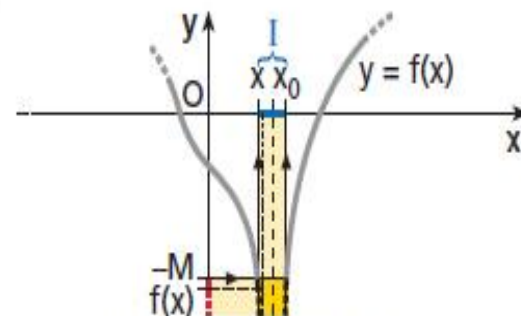
Dire che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  significa dire che, considerando numeri reali  $x$  di  $X$  sempre più vicini a  $x_0$ , i punti del diagramma di  $f(x; f(x))$  hanno ordinata via via più grande o anche che, comunque si consideri una retta orizzontale  $y=M$  con  $M>0$ , esiste un intorno  $I$  tali che i punti  $(x; f(x))$  sono al di sopra di tale retta non appena  $x$  appartiene all'intorno. Si dice che la retta  $x=x_0$  è un asintoto verticale per il diagramma di  $f$



a. Fissiamo  $M \in \mathbb{R}^+$ .  
 Individuiamo un intorno  $I$  di  $x_0$   
 tale che  $f(x) < -M \forall x \in I - \{x_0\}$ .



b. Se prendiamo  $M$  più grande, ossia  
 $-M$  minore,  $I$  esiste ancora e risulta,  
 in genere, più piccolo.



c. Scegliamo un valore di  $M$  ancora  
 più grande ( $-M$  ancora minore).  
 Se  $I$  è abbastanza piccolo, ossia se  $x$  è  
 abbastanza vicino a  $x_0$ , allora  $f(x)$  è  
 minore di  $-M$ .



# Limite finito per $x$ che tende a $+\infty$ (risp. $-\infty$ )

**DEF. 11** – Si dice che il numero reale  $l$  è il limite della funzione  $f$  in  $+\infty$  (risp. in  $-\infty$ ) o anche per  $x$  che tende a  $+\infty$  (risp.  $-\infty$ ) e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad (\text{risp.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l)$$

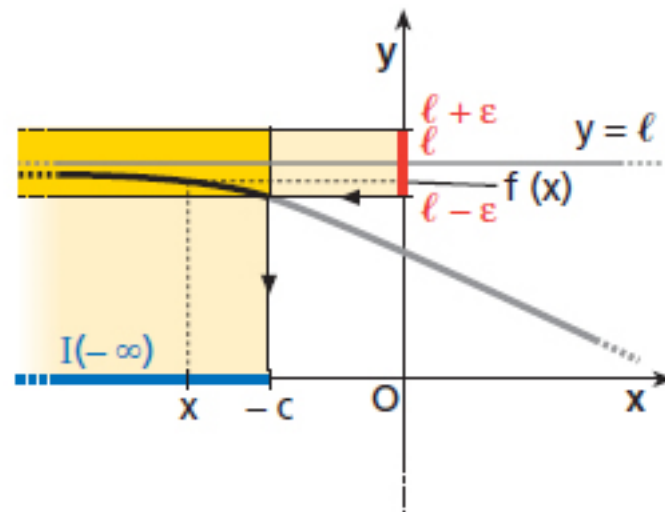
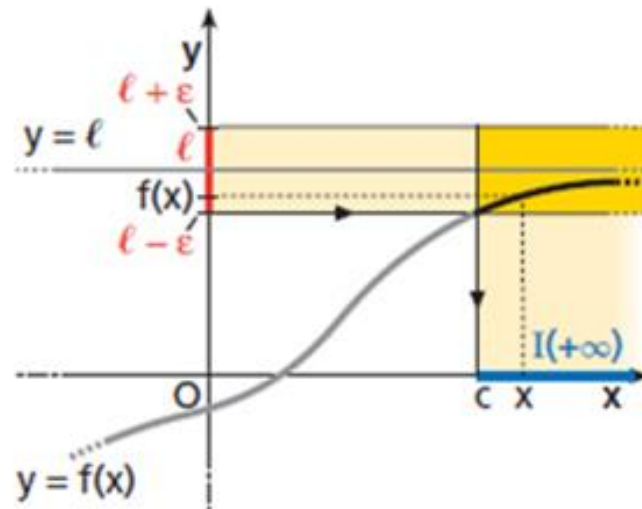
quando, comunque si consideri un numero reale  $\varepsilon > 0$  esiste un numero reale  $c > 0$  (risp.  $c < 0$ ) tale che si abbia:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

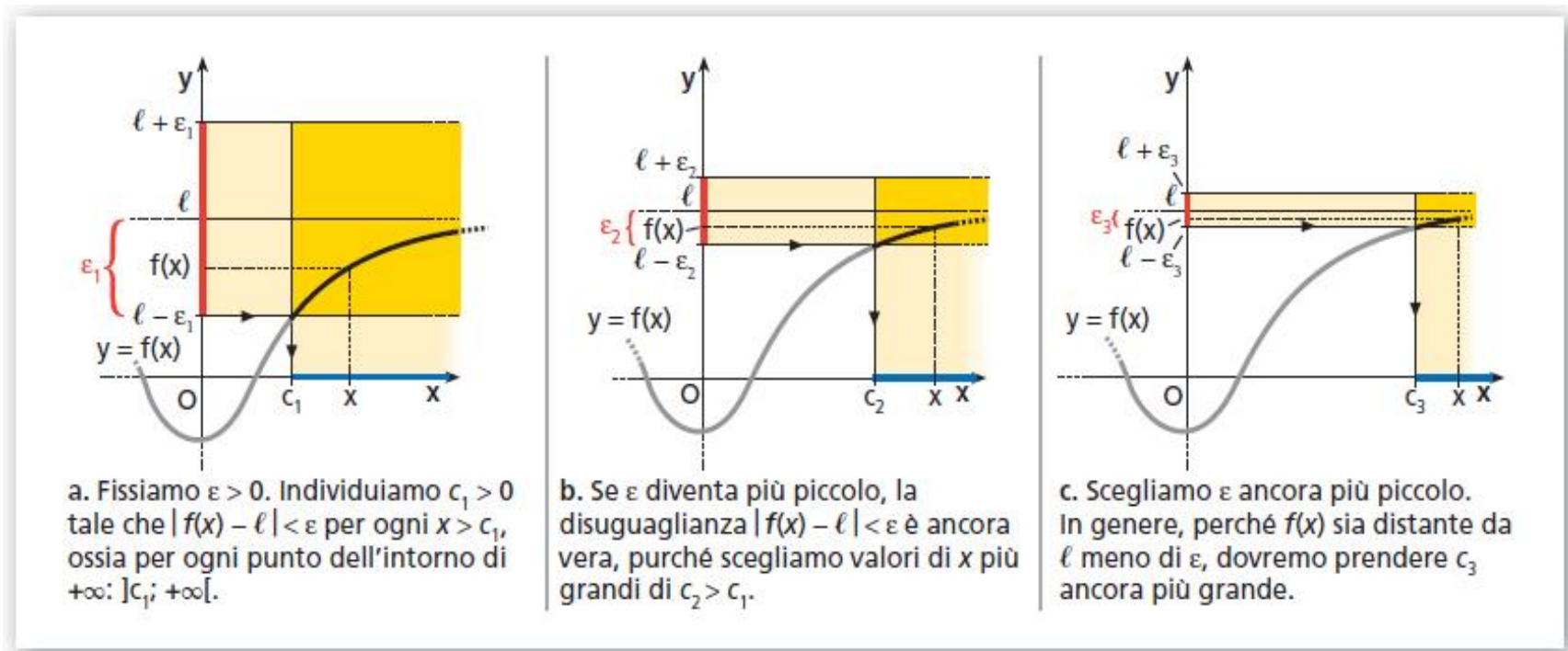
o, ciò che è lo stesso,

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

non appena  $x \in X$  e  $x > c$  (risp.  $x < c$ )



# Limite finito per $x$ che tende a $+\infty$ - significato geometrico



Se il limite per  $x$  che tende a  $+\infty$  o  $-\infty$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  (risp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ ) è uguale a  $l$ , in entrambi i casi, la retta di equazione  $y=l$  è un asintoto orizzontale per il diagramma.

# Limite infinito per $x$ che tende a $+\infty$ (risp. $-\infty$ )

## DEFINIZIONE

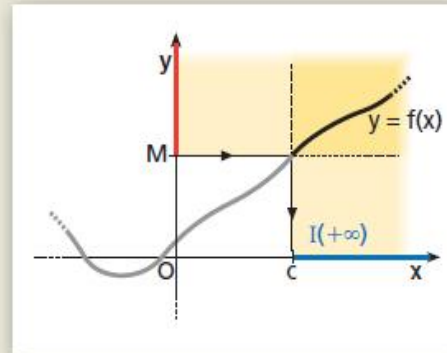
**Limite  $+\infty$  di una funzione per  $x$  che tende a  $+\infty$**

Si dice che la funzione  $f(x)$  ha per limite  $+\infty$  per  $x$  che tende a  $+\infty$  e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

quando per ogni numero reale positivo  $M$  si può determinare un intorno  $I$  di  $+\infty$  tale che risulti:

$$f(x) > M \text{ per ogni } x \in I.$$



## DEFINIZIONE

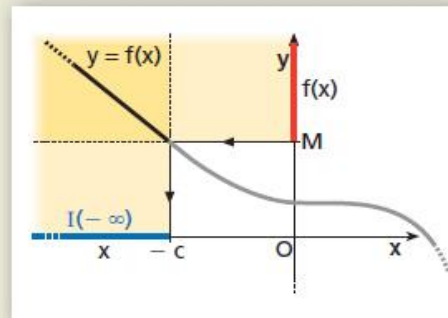
**Limite  $+\infty$  di una funzione per  $x$  che tende a  $-\infty$**

Si dice che la funzione  $f(x)$  ha per limite  $+\infty$  per  $x$  che tende a  $-\infty$  e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

quando per ogni numero reale positivo  $M$  si può determinare un intorno  $I$  di  $-\infty$  tale che risulti:

$$f(x) > M \text{ per ogni } x \in I.$$



# Teorema di unicità del limite

*Se la funzione  $f$  ha nel punto  $x_0$  come limite  $l$  (al finito o no) tale limite è unico*

## **Dimostrazione:**

Per assurdo, supponiamo che  $l$  non sia unico. Allora esiste un numero reale  $l'$  diverso da  $l$  tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l'$$

Poiché esiste il limite per  $x$  che tende a  $x_0$  e tale limite è  $l$ , allora:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I_{x_0} \text{ t.c. } l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Ma anche  $l'$  è il limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$ . Pertanto:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I'_{x_0} \text{ t.c. } l' - \varepsilon < f(x) < l' + \varepsilon$$

$$\forall x \in I \cap I'$$

Si può supporre  $\varepsilon < \frac{l' - l}{2}$ .

Dalle due definizioni si ha che:

$$l' - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \quad \rightarrow \quad l' - \varepsilon < l + \varepsilon \rightarrow \quad \varepsilon > \frac{l' - l}{2}$$

contrariamente alla supposizione iniziale. Dunque l'assunto.

# Teorema sull'esistenza del limite di una funzione monotona

Ogni funzione monotona nel sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}$  è in ogni punto  $x_0 \in R$  di accumulazione a sinistra per  $X$  dotata di limite sinistro e in ogni punto  $x_0$  di accumulazione a destra per  $X$  dotata di limite destro e si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \begin{cases} \sup_{\substack{x < x_0 \\ x \in X}} f(x) & \text{se } f \text{ è crescente} \\ \inf_{\substack{x < x_0 \\ x \in X}} f(x) & \text{se } f \text{ è decrescente} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \begin{cases} \inf_{\substack{x > x_0 \\ x \in X}} f(x) & \text{se } f \text{ è decrescente} \\ \sup_{\substack{x > x_0 \\ x \in X}} f(x) & \text{se } f \text{ è crescente} \end{cases}$$

# Nozione di continuità

**DEF. 12** – Sia  $f$  una funzione reale definita nel sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}$  e sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $X$ , appartenente a  $X$ . Si dice che  $f$  è continua in  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

ossia se il limite di  $f$  in  $x_0$  esiste ed è uguale al valore che la funzione assume in  $x_0$ . Dire che tale limite esiste equivale a dire che per ogni numero reale  $\varepsilon > 0$  esiste un numero reale  $\delta > 0$  tale che, non appena  $x$  appartiene a  $X$  e  $|x - x_0| < \delta$  si ha

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

La nozione di funzione continua in un punto  $x_0$  precisa dunque quella intuitiva di funzione per la quale a valori della variabile  $x$  via via sempre più vicini a  $x_0$  corrispondono valori  $f(x)$  via via sempre più vicini a  $f(x_0)$ .

**DEF. 13** – Una funzione reale  $f$  si dice continua in una parte  $Y$  del suo insieme di definizione  $X$  se è continua in ogni punto di  $Y$ .

# Nozione di continuità

**DEF. 14** – Se il punto  $x_0$ , oltre che appartenere all'insieme di definizione  $X$  della funzione reale  $f$ , è di accumulazione a sinistra (risp. a destra) per  $X$ , si dice che la funzione  $f$  è continua a sinistra (risp. a destra) in  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad [\text{risp. } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)]$$

# Teorema di Bolzano sulla continuità di una funzione monotona

***Ogni funzione reale monotona (crescente o decrescente) nel suo insieme di definizione  $X$ , il cui codominio sia un intervallo (di qualunque tipo), è una funzione continua in  $X$***

Dimostrazione

Esaminiamo il caso in cui una funzione  $f$  è monotona crescente nel suo insieme di definizione  $X$ .

Si tratta di provare, se  $x_0$  è un punto di accumulazione per  $X$ , che il limite di  $f$  in  $x_0$  è  $f(x_0)$  o, ciò che è lo stesso, che valgono le due relazioni

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

se  $x_0$  è di accumulazione per  $X$  a sinistra e a destra o che vale solo la prima o la seconda di esse nel caso in cui  $x_0$  è di accumulazione solo a sinistra o solo a destra.

Proviamo che valga la prima.

Per il teorema di esistenza sul limite di una funzione monotona, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x)$$



Detto  $l$  tale limite sinistro, si ha

$$l \leq f(x_0)$$

Essendo  $f(x_0)$  un maggiorante dell'insieme numerico di cui  $l$  è estremo superiore.

Ora si vede che non può essere  $l < f(x_0)$  perché se ciò fosse, nessun punto dell'intervallo  $]l, f(x_0)[$  farebbe parte del codominio di  $f$ .

Ma ciò contrasta con l'ipotesi che questo è un intervallo. Dunque deve aversi

$$l = f(x_0)$$

Dal teorema appena dimostrato discende che sono continue nei loro insiemi di definizione tutte le funzioni elementari: la funzione potenza, la funzione esponenziale, la funzione logaritmo, le funzioni circolari, le funzioni circolari inverse.

Tali funzioni, infatti, o sono strettamente monotone e hanno per codominio un intervallo o sono strettamente monotone a tratti e relativamente a ciascun tratto il codominio è sempre un intervallo.