

**FUNZIONI REALI DI DUE VARIABILI REALI****ESERCIZI SVOLTI****ES. 1** - Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x, y) = 2^{x^2+3y^2}$$

La funzione è di tipo esponenziale. Pertanto, il suo C.E. coincide con il C.E. dell'esponente. In particolare, poiché il C.E. è sempre definito è banale che esso coincide con  $\mathbb{R}^2$ .

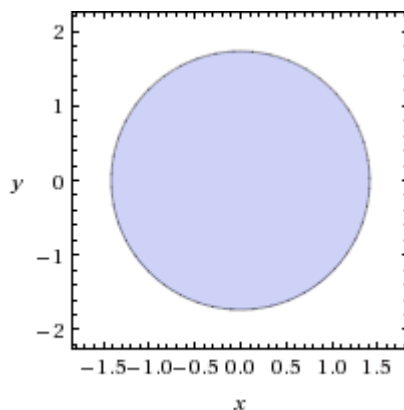
**ES. 2** - Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3}}$$

La condizione di esistenza si ottiene imponendo il radicando maggiore-uguale di zero; pertanto il suo C.E. è

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} \geq 0 \right\}$$

Rappresentiamo il C.E. in un riferimento cartesiano, osservando che l'equazione  $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 0$  definisce una ellisse aventi semiassi rispettivamente  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{3}$ . In particolare la disequazione  $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} \geq 0$  è soddisfatta per valori interni all'ellisse:

**Es. 3** - Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{x(y+1)}$$

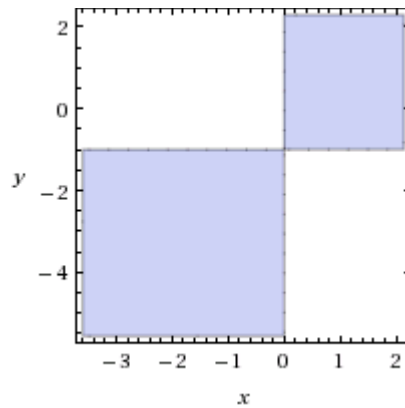
La condizione di esistenza di calcola imponendo il radicando maggiore-uguale di zero:

$$x(y+1) \geq 0$$

Ci tocca studiare il segno del prodotto:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

Che graficamente rappresenta la parte di piano colorata in figura:



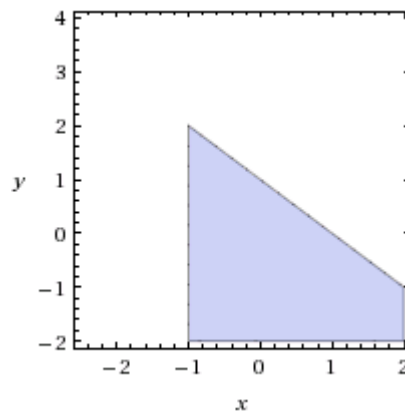
**Es. 4** - Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x-y}$$

La condizione di esistenza è espressa dal sistema:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 1-x-y \geq 0 \end{cases}$$

Il sistema si risolve rappresentando graficamente le due rette  $x+1=0$  e  $1-x-y=0$  e prendendo la parte di piano caratterizzata dall'intersezione delle due disequazioni:



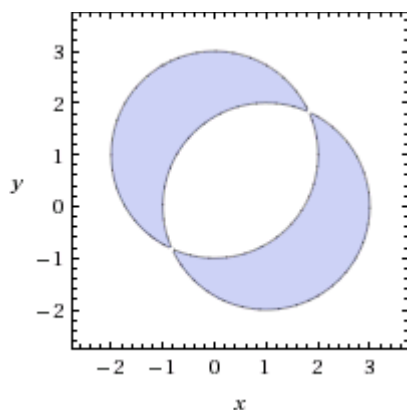
**Es. 5** - Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x, y) = \log\left(\frac{(x-1)^2 + y^2 - 4}{4 - x^2 - (y-1)^2}\right)$$

La condizione di esistenza è:

$$\left(\frac{(x-1)^2 + y^2 - 4}{4 - x^2 - (y-1)^2}\right) > 0$$

Le corrispondenti equazioni individuano due circonferenze, rispettivamente di centro  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ , entrambe di raggio 2. L'insieme è raffigurato in basso. Il bordo non è compreso.



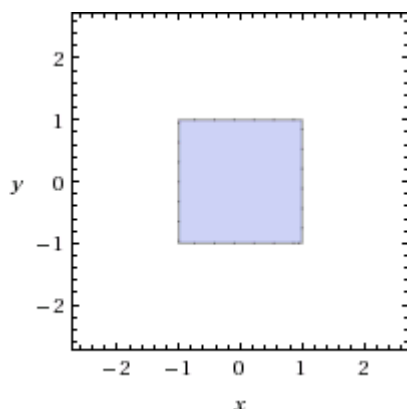
**Es. 6** - Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$$

La condizione di esistenza si calcola imponendo che entrambi i radicandi siano positivi. Pertanto si ha:

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 1 - y^2 \geq 0 \end{cases}$$

il che si traduce nel prendere la parte di piano racchiusa nel quadrato formato dai segmenti di rette  $x = \pm 1$  e  $y = \pm 1$  compreso il bordo.



**Es. 7** - Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

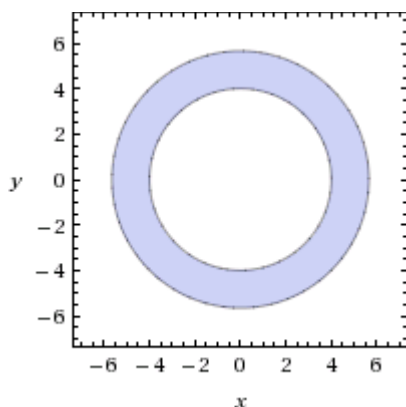
$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 16)(32 - x^2 - y^2)}$$

Il radicando, come è ormai noto, deve essere positivo. Pertanto si impone

$$(x^2 + y^2 - 16)(32 - x^2 - y^2) \geq 0$$

il che equivale a studiare il segno del rapporto.

Il C.E. sarà la corona circolare compresa tra le circonferenze  $(x^2 + y^2 - 16) = 0$  e  $(32 - x^2 - y^2) = 0$

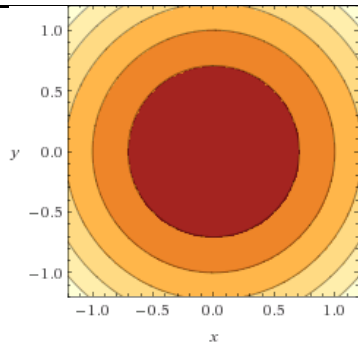
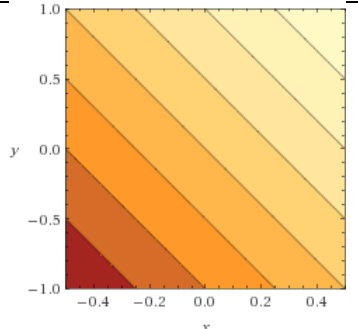
**ESERCIZI PROPOSTI**

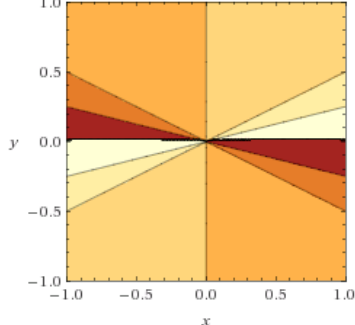
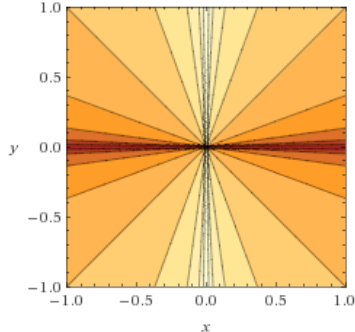
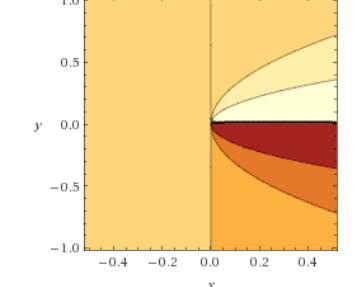
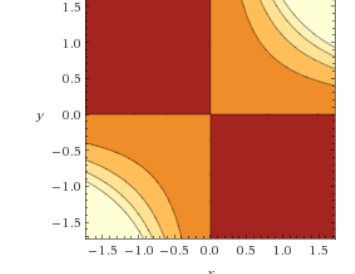
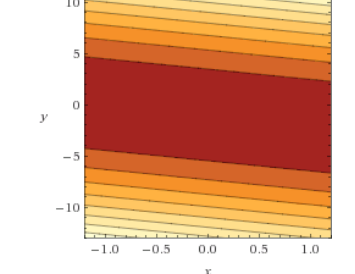
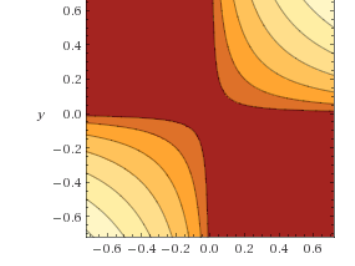
**Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni:**

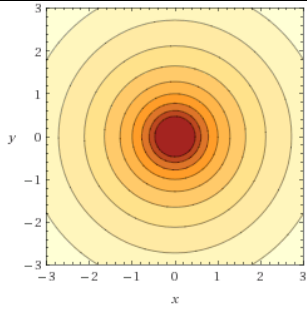
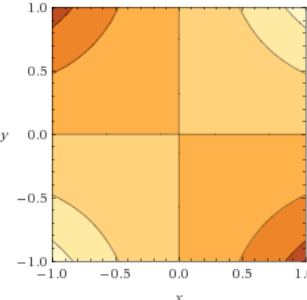
1	$f(x, y) = \frac{\arcsin(x + 2y)}{\arccos(3y - x)}$	
2	$f(x, y) = \log(2x^2 + 2y^2 - 8)$	
3	$f(x, y) = \log_2(3x - 4y - 1) - \log_{\frac{1}{2}}(x + y - 3)$	
4	$f(x, y) = \frac{1}{\log(x^2 - 3y)} \arccos\left(\frac{x}{4}\right) + \sqrt{y - 2xy + x^2y}$	
5	$f(x, y) = \sqrt[6]{\frac{x - y}{y - 3x}} + \sqrt[8]{\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 - 2}}$	
6	$f(x, y) = \sqrt{\sin(2x^2 + 2y^2)}$	
7	$f(x, y) = \frac{\operatorname{tg}(x + y)}{\sqrt{2^x - 4}}$	
8	$f(x, y) = \sqrt{-x^2 - 4y^2 + 2x + 8y + 5} + \sqrt{x^2 + 3y^2 - 2x - 6y + 2}$	
9	$f(x, y) = \log_{(y-x^2)}(\sqrt{4-x^2} - x)$ $f(x, y) = \log_y\left(\frac{1}{\sqrt{4-x} + \sqrt{16-x^2}}\right)$	
10	$f(x, y) = \arccos(x^2 - y^2)$	
11	$f(x, y) = \left(\frac{y + x^2}{y - x^2}\right)^{\arcsin(x^2 - y^2)} + \sqrt{2x^2 - 2y^2}$	
12	$f(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\right)^{\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}}$	

13	$f(x,y) = (y -  x )\sqrt{2-x^2-y^2} + \log(x^2 + y^2 - 1)$	
14	$f(x,y) = \left(\log_{\frac{1}{2}} x-y  - 1\right)^{\log_2(xy-x-y+1)} + \sqrt[4]{x-1}$	
15	$f(x,y) =  y - x^2 ^{\operatorname{tg}\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right)}$	
16	$f(x,y) = ( x  - y^2)\sqrt{144-16x^2-9y^2}$	
17	$f(x,y) = \left[\frac{ 2^x - 2  - 6}{3^{x+1} - 9}\right]^{\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}}}$	
18	$f(x,y) = \left[\frac{1}{\sqrt{ \operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y }}\right]^{\sqrt{x^2+y^2-4}}$	
19	$f(x,y) = \log_{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{10\arcsin x - 2\pi}{6\arcsin x - \pi}\right) + \sqrt{ x  - y}$	
20	$f(x,y) = \log(2^{x-1} - 1) - \log(3^{x+5} - 27) + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$	

**Determinare le linee di livello delle seguenti funzioni**

1	$f(x,y) = x^2 + y^2$	
2	$f(x,y) = 2x + y$	

3	$f(x,y) = \frac{x}{y}$	
4	$f(x,y) = \log\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$	
5	$f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{y}$	
6	$f(x,y) = e^{xy}$	
7	$f(x,y) = (1+x+y)^2$	
8	$f(x,y) = \sqrt{xy}$	

9	$f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$	
10	$f(x,y) = \arcsin(xy)$	

## Ulteriori esercizi

1	$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$	16	$f(x,y) = \log(x^2 + y)$
2	$f(x,y) = \sqrt{\log(x-y)}$	17	$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-y}{1+x^2y^2}\right)$
3	$f(x,y) = \sqrt{x^2 - 5xy + 4y^2}$	18	$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$
4	$f(x,y) = \frac{x^2 - y + 5}{y^2 - 2x}$	19	$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$
5	$f(x,y) = \log(1 - x^2 - y^2)$	20	$f(x,y) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y}$
6	$f(x,y) = \frac{y}{\cos x}$	21	$f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$
7	$f(x,y) = \sqrt{3x - 2y + 5}$	22	$f(x,y) = \frac{1}{x-y}$
8	$f(x,y) = \sqrt{\log(y^2 - 2x)}$	23	$f(x,y) = \sqrt{\frac{x + 3y^2}{2x^2 - 4y}}$
9	$f(x,y) = \frac{\sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}}{x^2 - 4y^2 - 4}$	24	$f(x,y) = \sqrt[4]{\frac{x^2 + y^2 - 3}{3x^2 - y^2}}$
10	$f(x,y) = \frac{1}{y-x} + \sqrt{1-xy}$	25	$f(x,y) \log_{(y-x^2)}(3-y)$
11	$f(x,y) = \frac{\log x}{\cos(x+y)}$	26	$f(x,y) = \sqrt{x-y^2} + \sqrt{\frac{1}{4 - \sqrt{x^2 + y^2} - 2}}$
12	$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$	27	$f(x,y) = \log(x^2y^2 - 4) + \log(16 - x^2 - y^2)$
13	$f(x,y) = \arcsin(x - y + 4)$	28	$f(x,y) = \sqrt{\frac{xy - 3}{x^2 + 4}}$
14	$f(x,y) = \sqrt{9 - x^2} - \sqrt{25 - y^2}$	29	$f(x,y) = \arccos(x^2 - 2y^2)$
15	$f(x,y) = \arcsin(xy)$	30	$f(x,y) = \arcsin(x^2 - 4y + 1)$

31	$f(x, y) = \log(4 -  x  -  y  + \sqrt{x^2 + y^2 - 4})$
32	$f(x, y) = \frac{\sqrt{(x^2 - 2x - y)(x^2 - 2x + y)}}{x^2 + y^2 - 3x - y + \frac{5}{2}} + \log\left(\frac{x+1}{2-x}\right)$
33	$f(x, y) = \sqrt{x^2 - x^4}$
34	$f(x, y) = \log(1 - x^2) + \log(1 - y^2)$
35	$f(x, y) = \log\left(\frac{1 - x^2}{1 - y^2}\right)$
36	$f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x + y - 1}{x - y + 1}\right)$
37	$f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1}\right)$
38	$f(x, y) = \log\left(\log\left(\frac{(x-1)^2 + y^2}{x^2 + y^2}\right)\right)$
39	$f(x, y) = \log\left(\frac{\arcsin(x^2 + y^2 - 1)}{xy}\right)$
40	$f(x, y) = \arccos\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 2\right)$