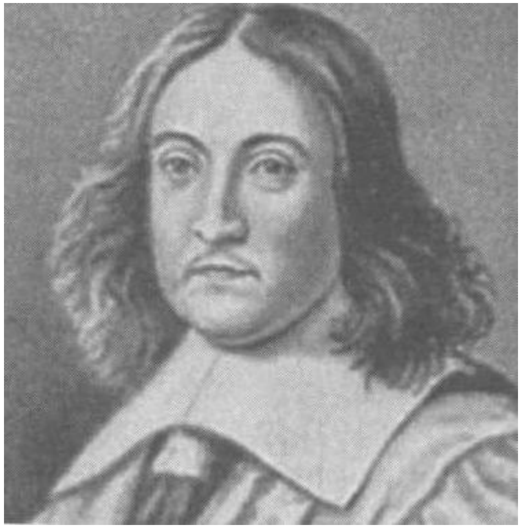
Il Calcolo delle Probabilità

Introduzione storica

I primi studi che portarono successivamente a concetti legati alla probabilità possono essere trovati a metà del XVI secolo in *Liber de ludo aleæ* di Girolamo Cardano (scritto nel 1526, ma pubblicato solo un secolo e mezzo dopo, nel 1663) e in *Sulla scoperta dei dadi* di Galileo Galilei (pubblicato nel 1656). In particolare, Galileo spiegò come mai, lanciando tre dadi, il 10 sia più probabile del 9 nonostante che entrambi i risultati si ottengano da un uguale numero di combinazioni.

Introduzione storica

Il problema della ripartizione della posta in gioco nel caso che un gioco d'azzardo debba essere interrotto, venne affrontato da Luca Pacioli, noto anche come Fra Luca dal Borgo, nella sua *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (pubblicata nel 1494) e successivamente da Tartaglia, per poi essere risolto da Pascal e Fermat. La nascita del concetto moderno di probabilità viene attribuita a Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665). Il Cavalier de Méré (un accanito giocatore passato alla storia per questo) aveva calcolato che ottenere almeno un 6 in 4 lanci di un dado non truccato era equivalente ad ottenere almeno un doppio 6 in 24 lanci, sempre di un dado non truccato. Tuttavia, giocando secondo tale convinzione, invece di vincere perdeva e scrisse a Pascal lamentando che la matematica falliva di fronte all'evidenza empirica. Da ciò scaturì una corrispondenza tra Pascal e Fermat in cui iniziò a delinearsi il concetto di probabilità nell'accezione frequentista.



Introduzione storica

Nel 1657 Christiaan Huygens (1629-1695) scrisse un *Libellus de ratiociniis in ludo aleæ*,, il primo trattato sul calcolo delle probabilità, nel quale introduceva il concetto di valore atteso.

Nel 1713 viene pubblicato postumo *Ars conjectandi* di Jakob Bernoulli, dove veniva dimostrato il teorema che porta il suo nome, noto anche come legge dei grandi numeri.

Jakob Bernoulli, nella sua "ars Conjectandi" (uscita postuma nel 1713) scrive che *« Probabilitas enim est gradus certitudinis, et ab hac differt ut pars a toto ».*

Successivamente, de Moivre pervenne ad una prima formulazione, poi generalizzata da Pierre Simon Laplace (1749-1827), del Teorema centrale del limite. La teoria delle probabilità raggiunse così basi matematicamente solide e, con esse, il rango di nuova disciplina.

Gli eventi e la probabilità

DEFINIZIONE

Evento

Un evento è un avvenimento, descritto da una proposizione, che può accadere o non accadere.

DEFINIZIONE

Probabilità

La probabilità di un evento *E* è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli *f* e quello dei casi possibili *u*, quando sono tutti ugualmente possibili.

probabilità di E

$$p(E) = \frac{f}{u}$$

numero dei casi favorevoli

numero dei casi possibili

Se $\bar{E}$ è l'evento contrario di *E*, cioè l'evento che si verifica se e solo se non si verifica *E*, si ha:

$$p(\bar{E}) = 1 - p(E) \quad \rightarrow \quad p(E) + p(\bar{E}) = 1$$

Gli eventi e la probabilità

ESERCIZIO GUIDA

Un'urna contiene dieci palline numerate da 1 a 10. Calcoliamo la probabilità che, estraendo una pallina:
a) essa abbia il numero 5;
b) essa abbia un numero divisibile per 4;
c) essa non abbia un numero divisibile per 4.

Poiché l'urna contiene 10 palline e ne viene estratta una sola, il numero dei casi possibili è 10.

a) Nell'urna vi è una sola pallina con il numero 5. La probabilità è: $p = \frac{1}{10}$.

b) Nell'urna vi sono due numeri divisibili per 4: $\{4, 8\}$. La probabilità è: $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

c) L'evento è quello contrario del punto precedente: $p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

La probabilità della somma logica di eventi

- **L'evento unione**

Consideriamo 12 dischetti numerati da 1 a 12 e gli eventi:

*E*1«esce un numero pari»;

*E*2«esce un numero maggiore di 7».

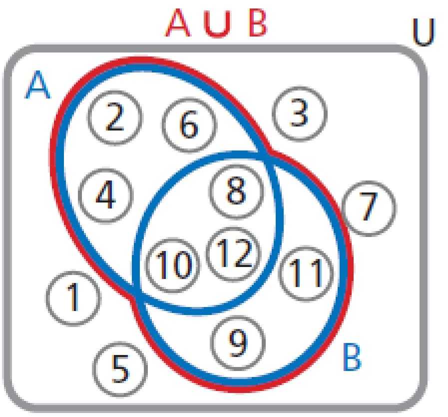
L'insieme dei casi favorevoli a E1 è $A = \{2,4,6,8,10,12\}$.

L'insieme dei casi favorevoli a E2 è $B = \{8,9,10,11,12\}$

L'evento E = «esce un numero pari o maggiore di 7» è formato dai due eventi E1 ed E2, uniti dal connettivo «o»

Questo evento è detto evento unione o somma logica. L'insieme che lo rappresenta è quindi l'unione dei due insiemi:

$$A \cup B = \{2,4,6,8,9,10,11,12\}$$

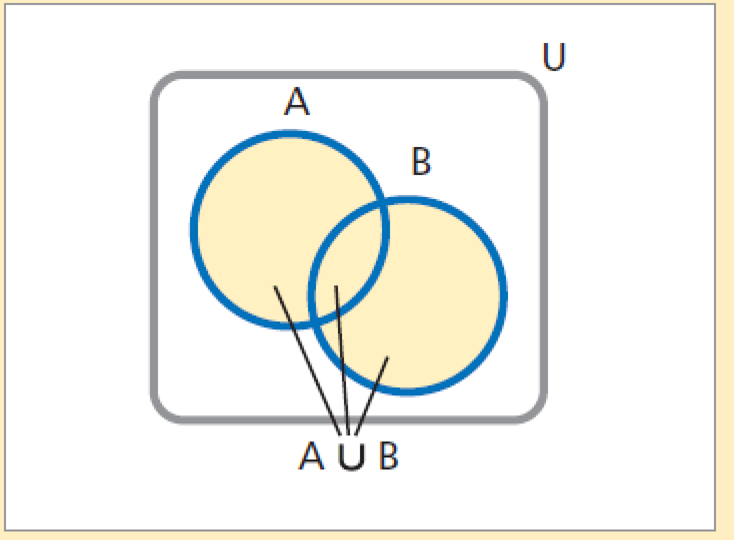


L’evento unione

DEFINIZIONE

Evento unione

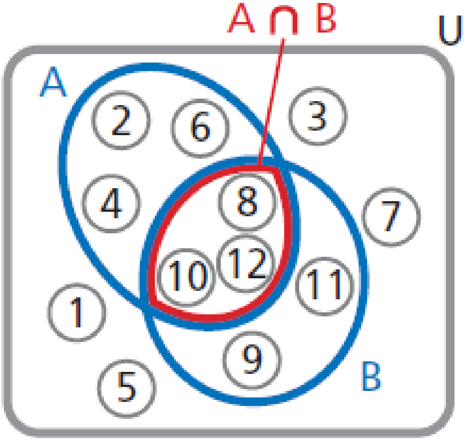
Dati gli eventi E_1, E_2, relativi allo stesso insieme universo, il loro evento unione, che indichiamo con $E_1 \cup E_2$, è quell’evento che si verifica al verificarsi di almeno uno degli eventi dati.



L’evento intersezione

Consideriamo ancora fra i 12 dischetti numerati l’evento *E* «esce un numero pari **e** maggiore di 7», formato dai due eventi semplici *E*1 ed *E*2, uniti dal connettivo «e». Questo evento si verifica se si verificano entrambi gli eventi *E*1 ed *E*2, perciò è detto **evento intersezione** o **prodotto logico** di *E*1 ed *E*2. Esso ha come casi favorevoli quelli comuni all’insieme *A* e all’insieme *B*. L’insieme che lo rappresenta è l’insieme intersezione:

$A \cap B = \{8, 10, 12\}$.

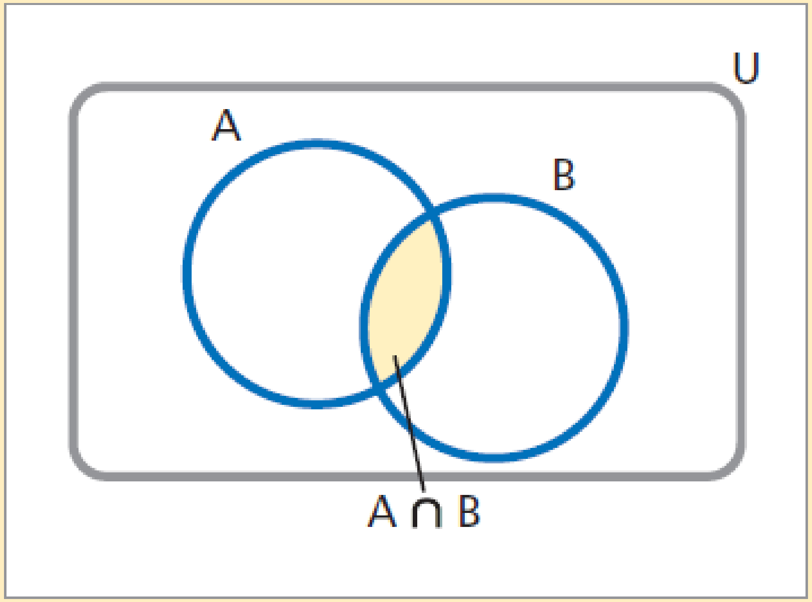


L'evento intersezione

DEFINIZIONE

Evento intersezione

Dati gli eventi E_1 ed E_2, relativi allo stesso insieme universo, il loro evento intersezione, che indichiamo con $E_1 \cap E_2$, è quell'evento che si verifica quando si verificano contemporaneamente gli eventi dati.



Eventi compatibili e incompatibili

Facendo riferimento all'esempio dei 12 dischetti numerati, si può osservare che gli eventi E_1 ed E_2 possono verificarsi contemporaneamente: per esempio, estraendo il dischetto col numero 10, si ottiene un numero sia pari sia maggiore di 7. In questo caso, si dice che gli eventi sono compatibili.

Si considerino gli eventi:

$$E_3 = \text{esce un multiplo di } 5$$
$$E_4 = \text{esce un multiplo di } 3$$

Questi due eventi non possono verificarsi contemporaneamente e sono chiamati eventi incompatibili.

In generale, due eventi, relativi allo stesso universo, si dicono incompatibili se il verificarsi di uno esclude il verificarsi contemporaneo dell'altro. In caso contrario si dicono compatibili

Teorema della somma (per eventi incompatibili)

Riprendiamo l'esempio dei 12 dischetti numerati e consideriamo i due eventi incompatibili

$$E_3 = \text{esce un multiplo di } 5$$
$$E_4 = \text{esce un multiplo di } 3$$

Cerchiamo la probabilità dell'evento unione

$$E = \text{esce un multiplo di } 5 \text{ o di } 3$$

I casi favorevoli di E_3 sono 2, quelli di E_4 sono 4. Pertanto i casi favorevoli di E sono 6 mentre i casi possibili sono 12. La probabilità dell'evento E è uguale alla somma delle due probabilità:

$$P(E) = \frac{6}{12} = \frac{2}{12} + \frac{4}{12} = P(E_3) + P(E_4)$$

Teorema della somma (per eventi incompatibili)

Se due eventi E_1 ed E_2 sono incompatibili la probabilità del loro evento unione è uguale alla somma delle loro probabilità

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Esempio

Un'urna contiene 6 gettoni neri, 5 rossi e 4 bianchi. Estraendo un gettone a caso si può verificare uno dei seguenti eventi:

*E*1«estrazione di un gettone nero»;

*E*2«estrazione di un gettone rosso»;

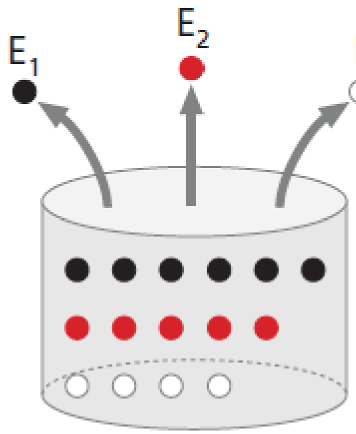
*E*3«estrazione di un gettone bianco».

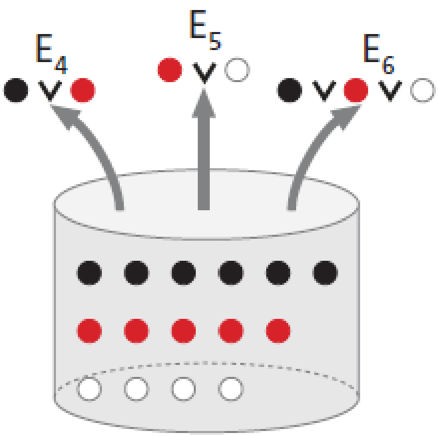
Le probabilità sono: $\mathrm{P}(E_1) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}; P(E_2) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}; P(E_3) = \frac{4}{15}$

Questi eventi sono fra loro incompatibili, perché se uno si verifica, non si verifica contemporaneamente nessuno degli altri due.

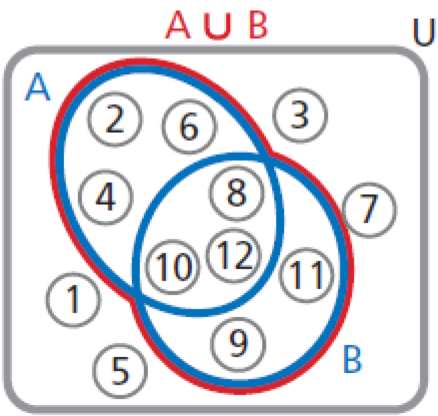
Calcoliamo, applicando il teorema, la probabilità degli eventi seguenti:
*E*4«estrazione di un gettone nero o rosso»;
*E*5«estrazione di un gettone rosso o bianco»;
*E*6«estrazione di un gettone nero o rosso o bianco».

$$P(E_4) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15};$$
$$P(E_5) = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5};$$
$$P(E_6) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = 1$$





Teorema della somma per eventi compatibili



Consideriamo nuovamente i 12 dischi e i seguenti eventi compatibili:

*E*1«esce un numero pari»;

*E*2«esce un numero maggiore di 7».

I casi favorevoli di *E*1 sono 6, quelli di *E*2 sono 5.

I casi favorevoli dell'evento composto

E «esce un numero pari o maggiore di 7»

non sono però 11, ma solo 8. Ciò è dovuto al fatto che vi sono casi favorevoli a entrambi gli eventi. Se sommiamo i casi favorevoli di *E*1 e quelli di *E*2, vengono considerati per due volte i casi di $E_1 \cap E_2$, mentre nell'unione essi devono essere contati una volta sola.

La probabilità e la somma logica di eventi

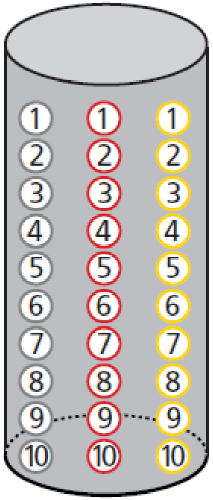
TEOREMA

Probabilità della somma logica di due eventi

La probabilità della somma logica di due eventi E_1 ed E_2 è uguale alla somma delle loro probabilità diminuita della probabilità del loro evento intersezione:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

ESEMPIO Dentro un'urna vi sono 30 palline: 10 bianche numerate da 1 a 10, 10 rosse e 10 gialle numerate allo stesso modo.
Calcoliamo la probabilità che, estraendone una a caso, venga estratta una pallina gialla o pari.



Il numero totale di palline è 30. La probabilità che venga estratta una gialla è $P(G) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. La probabilità che venga estratto un numero pari è: $P(p) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.
La probabilità dell'evento cercato è:
$$P = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{20} = \frac{2}{3}$$

La probabilità e la somma logica di eventi

ESERCIZIO GUIDA

Un'urna contiene 4 palline rosse numerate da 1 a 4 e 6 palline nere numerate da 1 a 6. Si estraggono consecutivamente due palline, senza rimettere la pallina estratta nell'urna. Calcoliamo la probabilità:
a) che le palline estratte siano di colore uguale;
b) che le palline estratte siano rosse o rechino due numeri pari;
c) che almeno una pallina estratta sia rossa.

---

a) Le palline estratte possono essere o due rosse o due nere. I due eventi sono incompatibili:

$$p = \frac{D_{4,2}}{D_{10,2}} + \frac{D_{6,2}}{D_{10,2}} = \frac{12}{90} + \frac{30}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}.$$

b) Gli eventi «due palline rosse» e «due numeri pari» sono compatibili in quanto fra i 5 numeri pari 2 sono rossi e quindi vi sono due esiti $\{(2; 4), (4; 2)\}$ che verificano entrambi gli eventi:

$$p = \frac{D_{4,2}}{D_{10,2}} + \frac{D_{5,2}}{D_{10,2}} - \frac{D_{2,2}}{D_{10,2}} = \frac{12}{90} + \frac{20}{90} - \frac{2}{90} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}.$$

c) L'evento è verificato quando le palline che escono sono o una rossa e una nera (e viceversa), o due rosse:

$$p = \frac{4 \cdot 6 \cdot 2}{D_{10,2}} + \frac{D_{4,2}}{D_{10,2}} = \frac{48}{90} + \frac{12}{90} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}.$$

Possiamo applicare anche il metodo dell'evento contrario. L'evento contrario è «nessuna pallina rossa»:

$$p = 1 - \frac{D_{6,2}}{D_{10,2}} = 1 - \frac{30}{90} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

La probabilità condizionata

Come si determina la probabilità di un evento che dipende da un altro evento?
Consideriamo nuovamente il sacchetto con gettoni numerati da 1 a 12 e i due eventi:

$$E_1 = esce\ un\ multiplo\ di\ 3$$
$$E_2 = esce\ un\ numero\ minore\ di\ 9$$

L'insieme universo è dato da $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, quello dei casi favorevoli a E_1 è $A = \{3,6,9,12\}$, quello dei casi favorevoli a E_2 è $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.
La probabilità di E_1 è: $P(E_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

La probabilità condizionata

ESERCIZIO GUIDA

Un'urna contiene 4 palline nere e 6 verdi. Si estraggono contemporaneamente due palline. Consideriamo i seguenti eventi:

A = «almeno una pallina è nera»;
B = «almeno una pallina è verde».

Calcoliamo la probabilità dell'evento A condizionato a B.

L'evento A si verifica quando l'esito è una delle seguenti combinazioni di colore: (nera, nera) o (nera, verde).
L'evento B si verifica quando l'esito è una delle seguenti combinazioni di colore: (nera, verde) o (verde, verde).
L'evento $A \cap B$ si verifica quando l'esito è (verde, nera). I valori delle probabilità sono:

$$p(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{4 \cdot 6}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} + \frac{24}{45} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}, \; p(B) = \frac{4 \cdot 6}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{24}{45} + \frac{15}{45} = \frac{39}{45} = \frac{13}{15},$$

$$p(A \cap B) = \frac{4 \cdot 6}{\binom{10}{2}} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}.$$

La probabilità condizionata risulta: $p(A|\,B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{\frac{8}{15}}{\frac{13}{15}} = \dfrac{8}{13} < p(A)$.

Gli eventi A e B sono stocasticamente dipendenti e sono correlati negativamente.

La probabilità del prodotto logico di eventi

TEOREMA

Teorema della probabilità composta

La probabilità dell'evento composto o prodotto logico degli eventi E_1 ed E_2 è uguale al prodotto della probabilità dell'evento E_1 per la probabilità dell'evento E_2 nell'ipotesi che E_1 si sia verificato:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2 | E_1)$$

In particolare, nel caso di eventi stocasticamente indipendenti:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)$$

Il problema delle prove ripetute

TEOREMA

Schema delle prove ripetute (o di Bernoulli)

Dato un evento *E* sottoposto a *n* esperimenti indipendenti ognuno con probabilità *p* costante di verificarsi, essendo *q=(1-p)* la probabilità che ha l'evento di non verificarsi, la probabilità di ottenere *k* successi su *n* prove è:

$$p_{(k,n)} = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

Il problema delle prove ripetute

ESERCIZIO GUIDA

Un'urna contiene 15 palline numerate. Si estrae per 8 volte consecutive una pallina, rimettendo ogni volta la pallina nell'urna. Calcoliamo la probabilità che:
a) per 5 volte esca un numero minore di 6;
b) per 3 o 4 volte esca un numero pari;
c) almeno una volta esca un numero pari.

---

a) L'evento «esce un numero minore di 6» ha probabilità $p = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, mentre l'evento contrario ha probabilità $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Applichiamo la relazione $p_{(k,n)} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Abbiamo:

$$p_{(5,8)} = \binom{8}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{56 \cdot 2^3}{3^8}.$$

b) L'evento «esce un numero pari» ha probabilità $p = \frac{7}{15}$, mentre l'evento contrario ha probabilità

$$q = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

Dobbiamo applicare la relazione sia per il caso in cui l'evento si verifichi 3 volte, sia per il caso in cui si verifichi 4 volte e quindi applicare il teorema della somma logica:

$$p = p_{(3,8)} + p_{(4,8)} = \binom{8}{3}\left(\frac{7}{15}\right)^3\left(\frac{8}{15}\right)^5 + \binom{8}{4}\left(\frac{7}{15}\right)^4\left(\frac{8}{15}\right)^4 =$$

$$= \frac{56 \cdot 7^3 \cdot 8^5}{15^8} + \frac{70 \cdot 7^4 \cdot 8^4}{15^8} = \frac{938 \cdot 7^3 \cdot 8^4}{15^8}.$$

c) Calcoliamo la probabilità dell'evento «il numero pari non esca mai» (o «esca sempre il numero dispari»), evento contrario di quello di cui si chiede la probabilità. Essendo la probabilità di uscita di un numero non pari $\frac{8}{15}$, la probabilità che in 8 estrazioni nelle stesse condizioni il numero pari esca almeno una volta è:

$$p = 1 - \binom{8}{8}\left(\frac{8}{15}\right)^8 = 1 - \frac{8^8}{15^8} = \frac{15^8 - 8^8}{15^8}.$$

Il teorema di Bayes

TEOREMA

Il teorema di Bayes

La probabilità che, essendosi verificato un evento *E*, la causa che sta alla sua origine sia l'evento E_i, con i=1, 2, …, *n* è:

$$p(E_i \mid E) = \frac{p(E_i) \cdot p(E \mid E_i)}{p(E)},$$

dove p(E) è la probabilità dell'evento totale:

$$p(E) = p(E_1) \cdot p(E \mid E_1) + p(E_2) \cdot p(E \mid E_2) + \ldots + p(E_n) \cdot p(E \mid E_n)$$