Prof. Roberto Capone

Limiti e continuità delle funzioni reali 2

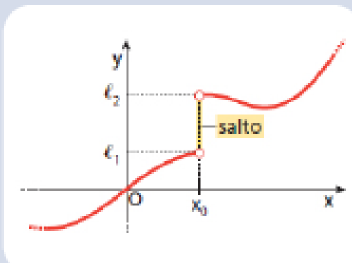
Corso di Analisi Matematica 2013/2014

Corso di laurea in Ingegneria edile

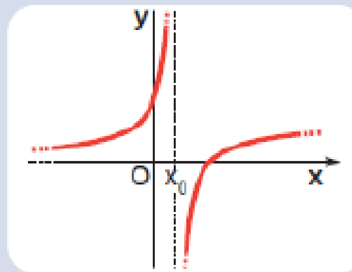
Università degli Studi del Molise

Punti di discontinuità

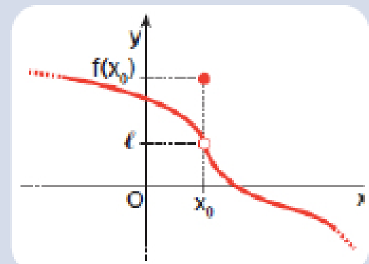
DEF. 15 – Siano f una funzione reale di una variabile reale definita nel sottoinsieme X di R, x_0 un punto di X per esso di accumulazione.
Se f non è continua in x_0 , essa si dice anche discontinua nel punto x_0 oppure che presenta una discontinuità in x_0 e tale punto si dice di discontinuità per f.



Discontinuità di I specie o a salto



Discontinuità di II specie



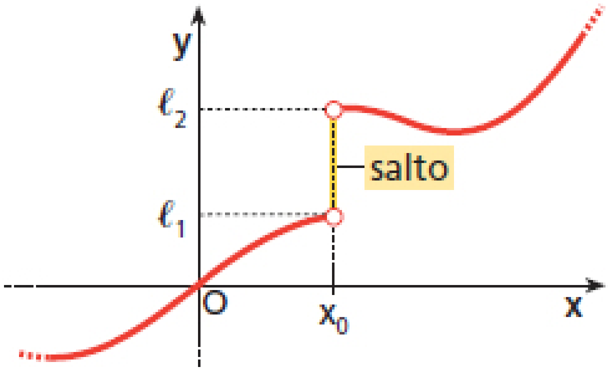
Discontinuità di III specie o eliminabile

Discontinuità di I specie

Si ha una discontinuità di I specie se, essendo x_0 di accumulazione per X a sinistra e a destra, esistono e sono entrambi finiti i limiti

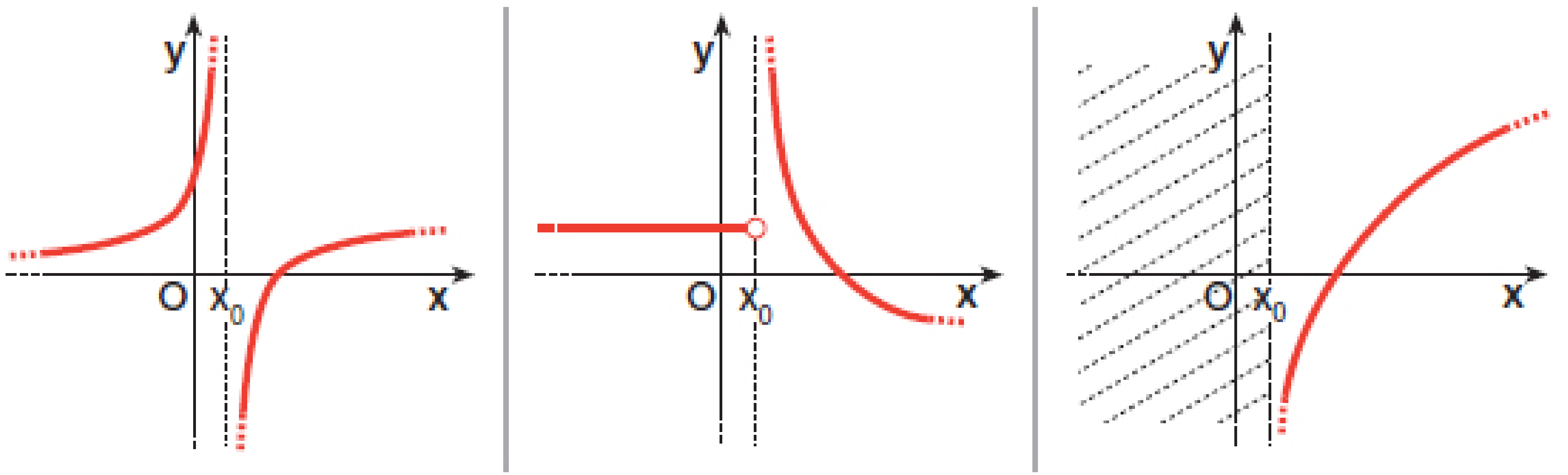
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \quad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$$

ma diversi. La differenza $|l_1 - l_2|$ prende il nome di salto della funzione.



Discontinuità di II specie

Si ha una discontinuità di II specie quando almeno uno dei due limiti (sinistro e destro) o non esiste oppure è infinito



Discontinuità di III specie

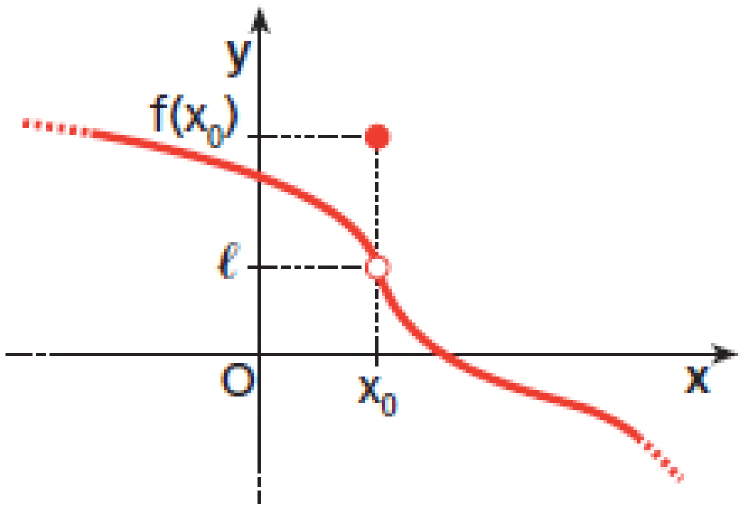
Se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

ma

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

allora la discontinuità si dice eliminabile



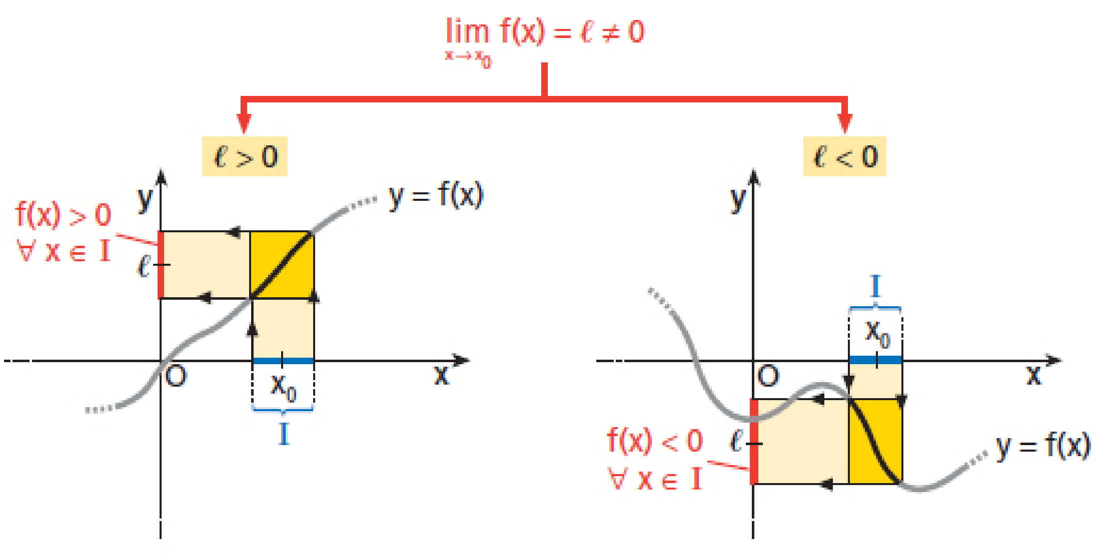
Teorema di permanenza del segno

Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di R, regolare nel punto $x_0 \in R$, di accumulazione per X. Allora, se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$$

$\exists I_{x_0}$ ***t.c.*** $\forall x \in I \cap X$ ***, con*** $x \neq x_0$ ***si ha*** $f(x) > 0$

In particolare, se la f è continua in $x_0 \in X$ e se il valore di f è positivo, esiste un intorno di x_0 in cui la f(x) è positiva.



Teorema di permanenza del segno

(dimostrazione)

Per la definizione di limite, si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists I_{x_0} \; t.c. |f(x) - l| < \varepsilon$$

ovvero

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di ε, posso porre $\varepsilon = |l|$

da cui:

$$l - |l| < f(x) < l + |l|$$

Se $l > 0$ $\qquad 0 < f(x) < 2l$

se $l < 0$ $\qquad 2l < f(x) < 0$

c.v.d.

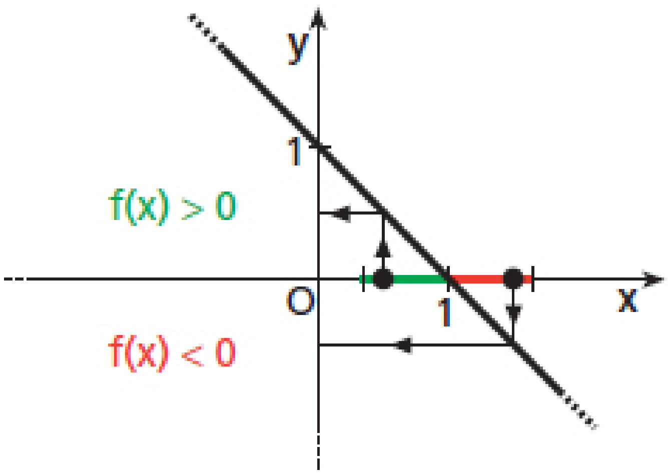
Caso di $l = 0$

Il teorema non è valido per $l = 0$

Sia, ad esempio,

$$\lim_{x \to 1} (1 - x) = 0$$

La funzione y=1-x rappresenta una retta nel piano cartesiano. Come si può vedere dalla figura, in un qualunque intorno completo del punto 1, i valori assunti dalla funzione y=1-x sono in parte positivi e in parte negativi



Teorema inverso

Se una funzione f(x) ammette limite finito l per x che tende a x_0 e in un intorno I_{x_0} , escluso al più x_0 , è positiva o nulla, allora $l \geq 0$; se è negativa o nulla allora $l \leq 0$.

Dimostrazione:

Per assurdo, sia $l < 0$, allora

$$\exists I'_{x_0}\ t.c\ f(x) < 0, \forall x \in I'_{x_0}, con\ x \neq x_0$$

ma, per ipotesi, f(x) è positiva o nulla in I_{x_0} .

Ciò significa che per i punti x dell'intorno $I_{x_0} \cap I'_{x_0}$ la funzione assume valori sia positivi che negativi. Abbiamo ottenuto una contraddizione!

Teorema dei carabinieri

Siano f, g ed h tre funzioni reali:

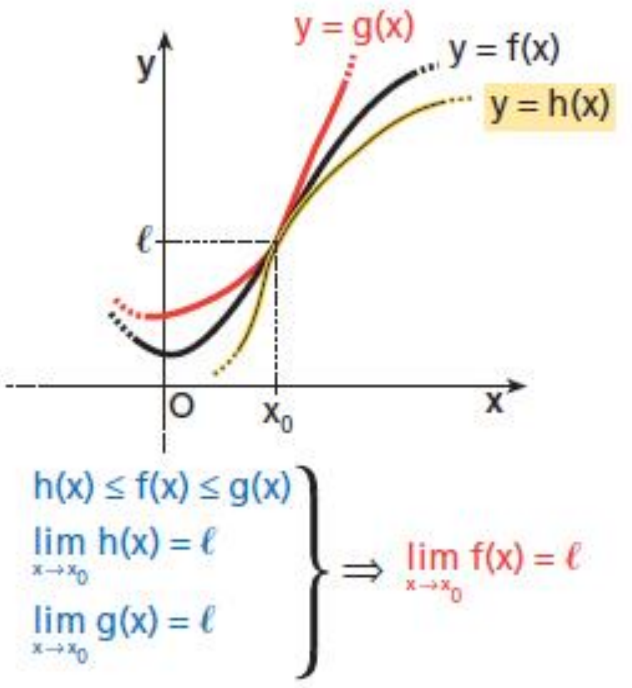
$$f\colon X \subseteq R \to R$$
$$g\colon X \subseteq R \to R$$
$$h\colon X \subseteq R \to R$$

sia x_0 di accumulazione per X. Allora, se esiste un intorno I_{x_0} tale che

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in I \cap X, x \neq x_0$$

nell'ipotesi che h e g siano regolari in x_0 ed abbiano lo stesso limite, anche h è regolare in x_0 e si ha:

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = l$$



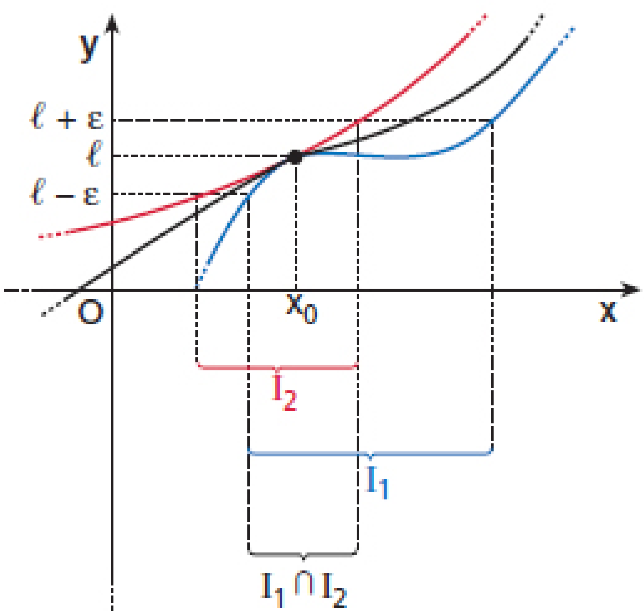
Teorema dei carabinieri (dimostrazione)

Essendo h e g dotate di limite in x_0, per la definizione di limite, si ha:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists I_{1x_0}\ t.c. |h(x) - l| < \varepsilon \text{ ovvero } l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists I_{2x_0}\ t.c. |g(x) - l| < \varepsilon \text{ ovvero } l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$$

Tenendo conto della relazione fra le funzioni, si ha:

$$l - \varepsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < l + \varepsilon \qquad \forall x \in I_1 \cap I_2$$



il che implica che

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

ovvero

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

e quest’ultima relazione significa proprio che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Operazioni con i limiti

Teorema

Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di R, dotata di limite nel punto x_0.
Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$$

a condizione di porre $|-\infty| = +\infty$, $|+\infty| = +\infty$
In particolare, se $x_0 \in X$ e la funzione è continua in x_0, anche la funzione $|f|$ è continua in quel punto

Dimostrazione

Caso limite finito: valendo la disuguaglianza

$$\big||f(x)| - |l|\big| \le |f(x) - l|$$

essendo $\forall \varepsilon > 0, |f(x) - l| < \varepsilon$ per x sufficientemente vicino a x_0 con $x \neq x_0$ si ha anche $\big||f(x)| - |l|\big| < \varepsilon$
Caso di $l = -\infty$: basta osservare che $\forall k < 0$ si ha $f(x) < k$ per x sufficientemente vicino a x_0 e $x \neq x_0$ e conseguentemente $|f(x)| = -f(x) > -k$.
Analogamente per $l = +\infty$

Teorema sul limite di una funzione composta

Siano $f: X \subseteq R \rightarrow R$ e $g: Y \subseteq R \rightarrow R$ due funzioni reali, la prima regolare nel punto $x_0 \in R$ di accumulazione per X e la seconda regolare nel punto $y_0 \in R$ di accumulazione per Y. Allora, se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \quad e \quad \lim_{y \to y_0} g(y) = l$$

Se x_0 è di accumulazione per l'insieme $X' \subseteq X$ di definizione della funzione composta $g \circ f$ anche questa è regolare in x_0 e si ha:

$$\lim_{x \to x_0} g\big(f(x)\big) = \lim_{y \to y_0} g(y) = l$$

sempre che, nel caso in cui $y_0 \neq \pm\infty$ e $y_0 \in Y$ sia soddisfatta una almeno delle seguenti condizioni:

c_1) la funzione $g(y)$ è continua in y_0;

c_2) esiste un intorno I_{x_0} tale che $f(x) \neq y_0, \forall x \in I \cap X, con\ x \neq x_0$

In particolare se $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ e f e g sono continue rispettivamente in x_0 e y_0 la funzione composta $g \circ f$ è continua in x_0

Teorema sul limite di una funzione composta (dimostrazione)

Essendo l il limite di g in y_0 $\forall I_l$ $\exists I_y |$ $\forall I_{y_0} \cap Y, y \neq y_0$ si abbia $g(y) \in I_l$. Essendo d'altra parte y_0 il limite di f in x_0, determinato un tale intorno I_{y_0} esiste, in corrispondenza, un intorno I_{x_0} tale che si abbia $f(x) \in I_{y_0} \forall x \in I_{x_0} \cap X$, con $x \neq x_0$.
Ne consegue che, se $y_0 = \pm\infty$ oppure $y_0 \neq \pm\infty$, ma $y_0 \notin Y$, $\forall x \in I_{x_0} \cap X'$ si ha $f(x) \neq y_0$ e quindi $g(f(x)) \in I_l$.
Se invece $y_0 \in Y$, se si verifica la condizione c_2, $\forall x \in X'$ appartenente al più piccolo dei due intorni I e I_{x_0} si ha $f(x) \in I_{y_0}$ e $f(x) \neq y_0$.
Alla stessa conclusione si perviene se si verifica la condizione c_1; in tal caso avendosi $g(y) \in I_l$ non solo se $y \in I_{y_0} \cap Y$ con $y \neq y_0$ ma anche se $y = y_0$

Teorema sul limite della somma

Siano f e g due funzioni reali definite nel sottoinsieme X di R e x_0 un punto di accumulazione per X. Allora, se f e g sono entrambe regolari in x_0, anche la funzione $f+g$ è regolare in x_0 e si ha:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

a meno che non si presenti una delle seguenti due situazioni

$$(+\infty)+(-\infty), (-\infty)+(+\infty)$$

che si dicono forme indeterminate.

In particolare, se $x_0 \in X$ e se le funzioni f e g sono entrambe continue in x_0, anche la funzione $f+g$ è continua in tale punto

Teorema sul limite della somma
(dimostrazione)

Poniamo $\boldsymbol{\lim_{x\to x_0}(f(x) = l_1}$ e $\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2}$.

I caso - Se $\boldsymbol{l_1}$ ed $\boldsymbol{l_2}$ sono numeri reali, in base alla definizione di limite $\forall\varepsilon > 0, \exists I_{x_0}$ t.c. $\forall x \in X \cap I, x \neq x_0$ si abbia simultaneamente
$|f(x) - l_1| < \varepsilon$ e $|g(x) - l_2| < \varepsilon$. Ne consegue che, per gli stessi x vale la diseguaglianza

$$\left|\left(f(x) + g(x)\right) - (l_1 + l_2)\right| \leq |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < 2\varepsilon$$

e quindi

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x) = l_1 + l_1$$

II caso – Se $l_1 = +\infty$ e l_2 è un numero reale. Se f è convergente in x_0 esiste un intorno I_{x_0} tale che la restrizione di f a $X \cap I$ sia limitata, ossia esiste una costante $c > 0$ tale che $|g(x)| \leq c,\ \forall x \in X \cap J$. D'altra parte, in base alla definizione di limite $\forall k > 0, \exists I_{x_0}$ che si può senz'altro supporre incluso in J tale che $\forall x \in I \cap X, x \neq x_0$ si abbia $f(x) > k$. Ne consegue che per questi stessi x si ha anche

$$f(x) + g(x) > -c + k$$

e quindi

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x) = +\infty$$

III caso – Se $l_1 = +\infty$ e $l_2 = +\infty$ in base alla definizione di limite $\forall k > 0, \exists I_{x_0} |\ \forall x \in I \cap X, x \neq x_0$ si abbia simultaneamente $f(x) > k$ e $g(x) > k$.
Ne consegue che per tali x si ha anche

$$f(x) + g(x) > 2k$$

e quindi

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x) = +\infty$$

Negli altri casi si ragiona in modo analogo

Situazioni possibili

$g(x)$ ⊕ $f(x)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
m	$m+l$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Teorema sul limite del prodotto

Siano f e g due funzioni reali definite nel sottoinsieme X di R e x_0 un punto di accumulazione per X. Allora, se f e g sono entrambe regolari in x_0 anche la funzione $f \cdot g$ è regolare in x_0 e si ha:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

a meno che il prodotto non si presenti nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$
In particolare, se $x_0 \in X$ e se le funzioni f e g sono entrambe continue in x_0, anche la funzione $f \cdot g$ è continua in tale punto.

Situazioni possibili

$g(x)$ ⊙ $f(x)$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$m \cdot l$	$m \cdot l$	0	$+\infty$	$-\infty$
$m < 0$	$m \cdot l$	$m \cdot l$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

Teorema sul limite del quoziente

Siano f e g due funzioni reali definite nel sottoinsieme X di R e x_0 un punto di accumulazione per X. Allora, se f e g sono entrambe regolari in x_0 e se $g(x) \neq 0$ in $X-\{x_0\}$ anche la funzione f / g è regolare in x_0 e si ha:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

a meno che il quoziente non si presenti in una forma indeterminata ∞/∞ o $0/0$.

In particolare, se $x_0 \in X$ e se le funzioni f e g sono entrambe continue in x_0 e $g(x) \neq 0$ anche la funzione f / g è continua in tale punto.

Situazioni possibili

$g(x)$ / $f(x)$ — $\frac{f(x)}{g(x)}$	$m \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \neq 0$	$\frac{l}{m}$	∞	0	0
0	0	?	0	0
$+\infty$	∞	∞	?	?
$-\infty$	∞	∞	?	?

Altre forme indeterminate

Se f e g sono due funzioni reali definite nel sottoinsieme X di R con f(x) positiva in tutto X, entrambe dotate di limite nel punto x_0 di R, si ha:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x) \cdot \log(f(x))}$$

Tale limite, a norma del teorema sul limite di una funzione composta, esiste se e solo se esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \cdot log(fx)$$

Anche in questo caso, possono incontrarsi delle forme indeterminate:

$$0^0, (+\infty)^0, 1^{\pm\infty}$$

Situazioni possibili

$g(x)$ / $f(x)$ — $[f(x)]^{g(x)}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	0^+
0^+	?	0^+	$+\infty$
1	1	?	?
$0 < \ell < 1$	1	0^+	$+\infty$
$\ell > 1$	1	$+\infty$	0^+