Prof. Roberto Capone

Limiti e continuità delle funzioni reali 3

Corso di Analisi Matematica 2013/2014

Corso di laurea in Ingegneria edile

Università degli Studi del Molise

La continuità

Sia f una funzione reale di variabile reale definita in X.
Definizione.
Si dice che f è continua in un punto $x_0 \in X$ se $\forall I' \in \Im(f(x_0)) \exists I \in \Im(x_0)$ tale che:
1. $f(x) \in I', \forall x \in X \cap I$, cioè se:
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall x \in X: |x - x_0| < \delta$

Proposizione
Ogni funzione f è continua in ogni punto isolato di X; inoltre, una funzione f è continua in un punto $x_0 \in X \cap DX$ se e solo se esiste il limite di f in x_0 e si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dimostrazione.
Sia x_0 un punto isolato di X e sia I un intorno di x_0 tale che $I \cap X = \{x_0\}$.
Allora si ha:

$$f(x) = f(x_0) \in I', \forall x \in I \cap X$$

qualunque sia $I' \in \Im(f(x_0))$ quindi f è continua in x_0.
Se $x_0 \in X \cap DX$ si ha la tesi osservando che per definizione di limite le due definizioni sono equivalenti.

Esempi

1. Ogni funzione costante $f: x \in X \to c \in R$ è continua in X.
Infatti $\forall x_0 \in X \cap DX$ si ha:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c = f(x_0)$$

2. $\forall a, b \in R$ la funzione $f: x \in R \to ax + b$ è continua in R. Infatti $\forall x_0 \in R$ si ha:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (ax + b) = ax_0 + b = f(x_0)$$

3. La funzione

$$f: x \in R \to \begin{cases} \dfrac{sinx}{x}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases}$$

non è continua in 0, infatti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1 \neq f\,(x_0)$$

4. La funzione di Dirichlet

$$f: x \in R \to \begin{cases} 0, & se\ x \in Q \\ 1, & se\ x \in R - Q \end{cases}$$

non è continua in $x_0, \forall x_0 \in R$.

Infatti, preso $\varepsilon = \frac{1}{2}$ qualsiasi sia $\delta > 0$, se $x_0 \in Q$ per la densità di R-Q in R, $\exists x \in R - Q: |x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - f(x_0)| = 1 \nless \varepsilon$

Analogamente, se $x \in Q: |x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - f(x_0)| = 1 \nless \varepsilon$

Definizione.

Se $x_0 \in X$ ed è un punto di accumulazione a destra (risp. a sinistra) per X; si dice che f è continua a destra (risp. a sinistra) in x_0 se esiste il limite a destra (risp. a sinistra) di f in x_0 ed è uguale a $f(x_0)$

Proposizione.

Siano $f: X \to Y$ e $g: Y \to R$ due funzioni reali di una variabile reale. Se f è continua in un punto $x_0 \in X$ e g è continua nel punto $y_0 = f(x_0)$, allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in x_0

Prolungamento per continuità di una funzione

Se X e Y sono due insiemi numerici, si dice che X è denso rispetto a Y se:

$$Y \subset X \cup DX$$

Evidentemente: X è denso rispetto a Y se e solo se $\forall \in Y$ e $\forall I_x$ risulta:

$$I \cap X \neq \emptyset$$

Teorema di prolungamento per continuità

Siano X e Y due insiemi numerici con $\mathrm{X} \subset Y$ e X denso rispetto a Y.
Per ogni funzione $f: X \rightarrow R$ continua in X e convergente in ogni punto di $Y \backslash \mathrm{X}$ esiste un unico prolungamento continuo di f su Y; esso è il prolungamento definito da:

$$g(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x), \forall x_0 \in Y \backslash \mathrm{X}$$

Dimostrazione

Cominciamo con l'osservare che φ e ψ sono due funzioni continua in Y tali che:

$$\varphi(x) = \psi(x)\ \forall x \in X$$

denotate con φ_1 e ψ_1 rispettivamente le restrizioni di e ψ a X, in conseguenza del teorema discendente da quello di unicità del limite si ha per ogni $x_0 \in Y \backslash$X:

$$\varphi(x_0) = \lim_{x \to x_0} \varphi_1(x) = \lim_{x \to x_0} \psi_1(x) = \psi(x_0)$$

Da tale osservazione si deduce che ogni funzione continua $f: X \to R$ ha al più un prolungamento continuo su Y. Resta da provare che il prolungamento g di f su Y è continuo in Y.

Assegniamo un punto $x_0 \in Y$. Dalla continuità di f in x_0, si ha:

$$|f(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall x \in X\ e\ tale\ che\ \ |x - x_0| < \delta$$

Sia x un punto di Y\X tale che $|x - x_0| < \delta$ e sia $\{x_n\}_{n \in N}$ una successione di punti di X convergente a x.

Si ha:

$$\lim_{n \to \infty} |x_n - x_0| = |x - x_0| < \delta$$

e quindi $\exists \nu \in N\ tale\ che$:

$$|x_n - x_0| < \delta, \qquad \forall n > \nu$$

Le due precedenti implicano che $|f(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ e poiché $\{f(x_n)\}_{n \in N}$ converge a $g(x)$ si ha che:$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon, \forall x \in Y$ e tale che $|x - x_0| < \delta$

e quindi g è continua.

Teorema degli zeri

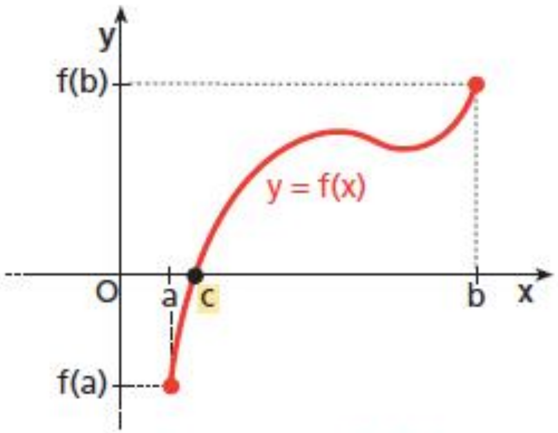
Una funzione reale f continua nell'intervallo chiuso e limitato [a; b] che assuma valori di segno opposto negli estremi di tale intervallo, si annulla in almeno un punto ad esso interno

Dimostrazione

Si supponga, per fissare le idee, che f(a)<0 e f(b)>0. Sia c l'estremo superiore dei punti $x \in [a; b]$ tali che f(x)<0.

Essendo f continua in a e in b, per il teorema della permanenza del segno $c \neq a, c \neq b$, perciò $c \in [a; b]$ dovendo essere f(x)<0 in un opportuno intorno destro di a e f(x)>0 in un opportuno intorno sinistro di b, allora nel punto c dovrà essere f(c)=0.

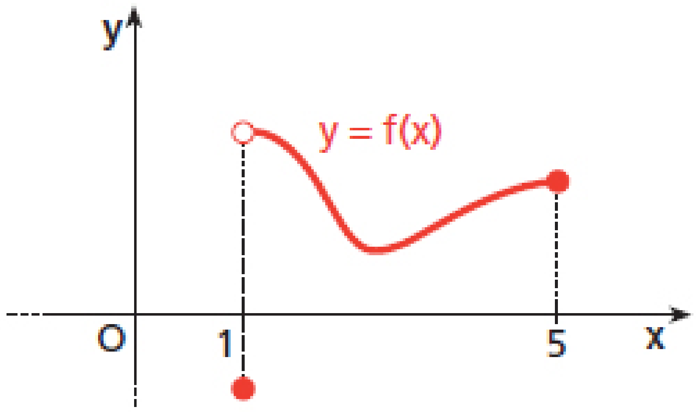
Diversamente, se f(c)<0, per la permanenza del segno esisterebbe un intorno di c nel quale si avrebbe f(x)<0 in contrasto con il fatto che c è estremo superiore degli $x \in [a; b]$ per i quali f(x)<0



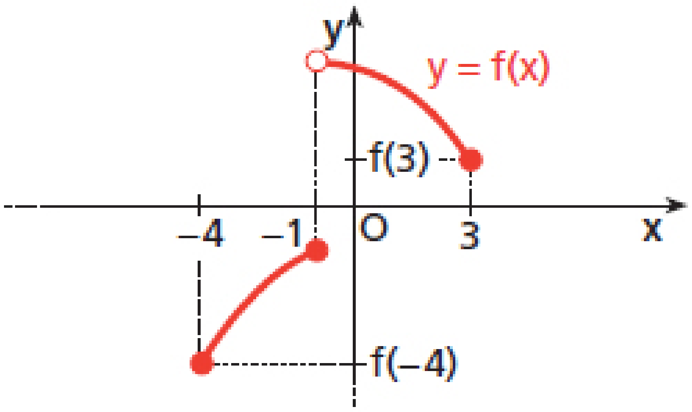
f continua in [a; b]
f(a) < 0, f(b) > 0 ⇒
∃ c ∈]a; b[| f(c) = 0

Teorema degli zeri

Nei seguenti due casi non sono verificate le ipotesi del teorema; in particolare nel primo caso la funzione non è definita in un intervallo chiuso, nel secondo caso la funzione non è continua. In questi due casi non esiste alcun punto c in cui la funzione si annulla.



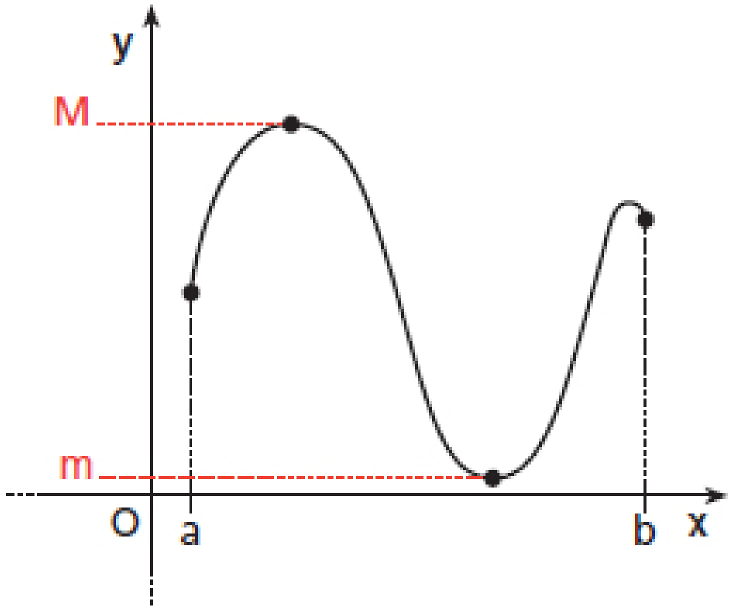
a. La funzione è continua nell'intervallo]1; 5], $f(1) < 0$ e $f(5) > 0$, ma non esiste alcun punto dell'intervallo in cui essa si annulla.



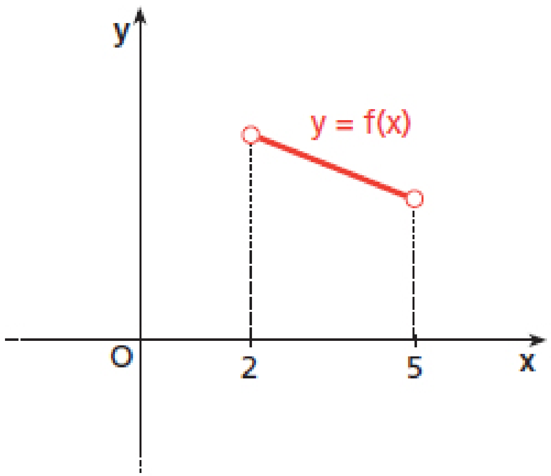
b. La funzione non è continua in $x = -1$; $f(-4) < 0$ e $f(3) > 0$. Non esiste alcun punto dell'intervallo [−4; 3] in cui essa si annulla.

Teorema di Weiestrass

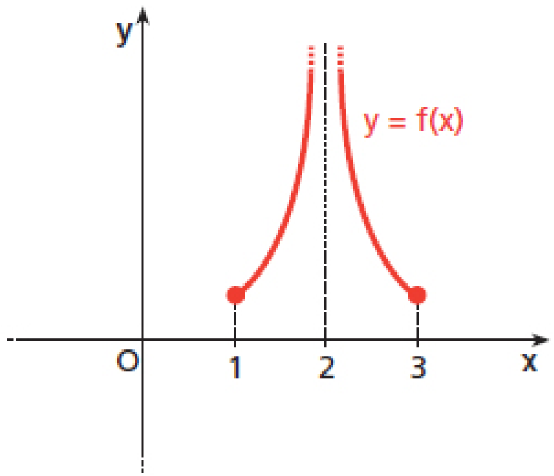
Se f è una funzione continua in un insieme compatto [a; b], ha come codominio un insieme anch'esso compatto e conseguentemente essa è dotata in X di minimo e di massimo



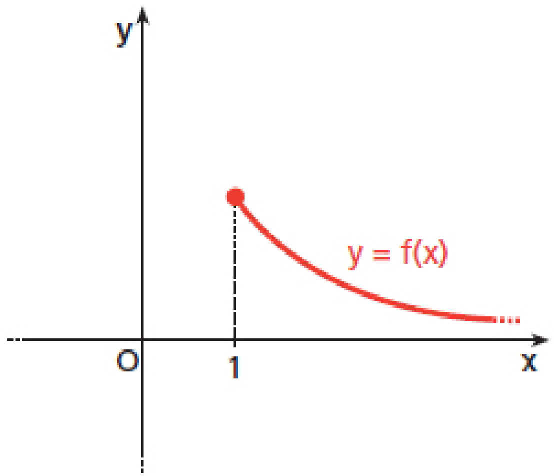
Casi di non validità del teorema di W.



a. La funzione è continua nell'intervallo limitato aperto]2; 5[. Essa è priva di massimo e minimo in questo intervallo, in quanto gli estremi non appartengono all'intervallo.



b. La funzione non è continua nel punto $x = 2$. Nell'intervallo [1; 3] essa assume minimo, ma è priva di massimo.



c. La funzione è continua nell'intervallo illimitato [1; +∞[. Non vale il teorema di Weierstrass e la funzione è priva di minimo assoluto.

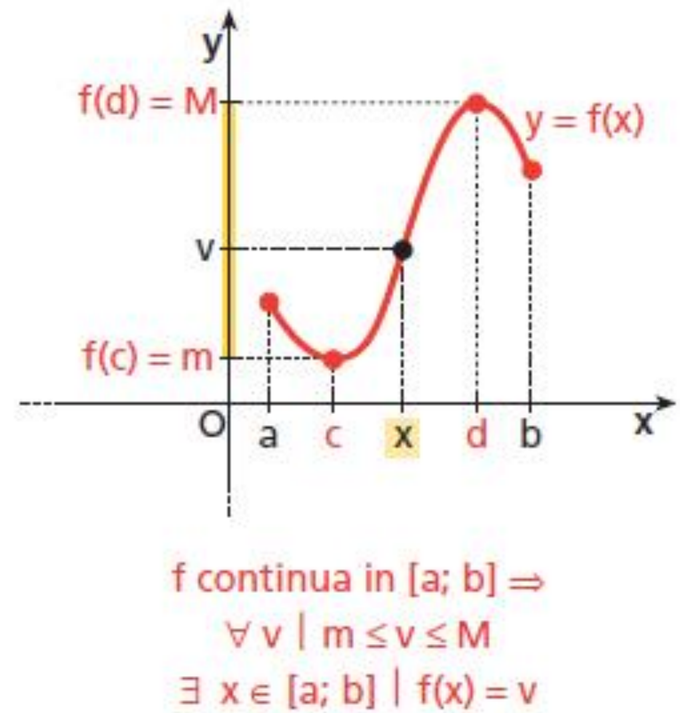
I teorema dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a; b] assume tutti i valori compresi tra f(a) ed f(b)

Consideriamo il caso in cui $f(a) \leq f(b)$. La tesi consiste nel provare che, qualunque sia
$y_0 \in [f(a); f(b)]$
$\exists x_0 \in [a; b]$ tale che $f(x_0) = y_0$

se

- y_0=f(a) si può porre x_0=a
- y_0=f(b) si può porre x_0=b
- $y_0 \in (f(a); f(b))$ si può considerare la funzione ausiliaria g(x)=f(x)-y_0 $\forall x \in [a; b]$



Essendo f(a)< y_0 <f(b), si ha:
g(a) = f(a) – y_0 <0
g(b) = f(b) – y_0 >0
Per il teorema degli zeri $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) = y_0$

Il teorema dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo [a, b] chiuso e limitato assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo

Dimostrazione

Per il teorema di Weierstrass esistono il massimo M e il minimo m. Bisogna provare che $\forall y_0 \in (m, M), \exists x_0 \in [a, b]: f(x_0) = y_0$.
Indichiamo con x_1 e x_2 le ascisse dei punti di minimo, cioè tali che $f(x_1) = m, f(x_2) = M$ e consideriamo la funzione ausiliaria:

$$g(x) = f(x) - y_0$$

Essendo $f(x_1) = m < y_0 < M = f(x_2)$, risulta:

$$g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0, \qquad g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0$$

Per il teorema degli zeri, esiste un valore $x_0 \in]a, b[| g(x_0) = 0$,
cioè, tale che $\mathrm{f}(x_0) = y_0$

Criterio di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo [a, b] chiuso e limitato è invertibile in tale intervallo.

Dimostrazione

Proponiamo la dimostrazione nel caso in cui la funzione f sia strettamente crescente in [a,b]. Risulta:

$$f(a) < f(x) < f(b), \qquad \forall x \in \,]a, b[$$

Quindi f(a) è il minimo della funzione in [a,b], mentre f(b) è il massimo. Per il teorema dei valori intermedi , f assume tutti i valori compresi tra f(a) e f(b).
Cioè, $\forall y \in [f(a), f(b)]$ esiste almeno un $x \in [a, b]$ per cui $f(x) = y$.
Tale x è unico.
Infatti, se esistessero due valori x_1 e x_2, distinti tra loro, diciamo $x_1 < x_2$ per cui $y = f(x_1) = f(x_2)$ allora dovrebbe risultare anche $f(x_1) < f(x_2)$ dato che f è strettamente crescente.
Quindi $f: [a, b] \to [f(a), f(b)]$ è invertibile.

La continuità uniforme

La continuità di una funzione in un insieme X è una proprietà di carattere locale della funzione: una funzione f è continua in X se è continua in ogni punto $x_0 \in X$, se cioè per ogni fissato $x_0 \in X$ sussiste la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \qquad \forall x \in X \mid |x - x_0| < \delta;$$

Pertanto questo δ dipende da x_0 oltre che da ε

In certi casi, si può parlare di continuità globale di f in X nel senso che il δ per cui sussiste la precedente proprietà può essere determinato indipendentemente da x_0.

Definizione

Si dice che $f: X \to R$ è uniformemente continua in X se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \qquad \forall x', x'' \in X \mid |x' - x''| < \delta$$

Il teorema di Cantor

Una funzione f continua in un insieme X chiuso e limitato è ivi uniformemente continua

Dimostrazione.

Si ragiona per assurdo. Supponiamo che la funzione f, continua nell'insieme chiuso e limitato X, non sia uniformemente continua in X.

$\exists \varepsilon_0 > 0 \mid \forall \delta > 0, \exists x', x'' \in X$ per cui si ha:

$$|x' - x''| < \delta \; e \; |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$$

Siano x_n e y_n due punti di X tali che:

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad e \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_{0,} \forall n \in N$$

Siccome X è chiuso e limitato, si può estrarre una successione $\{x_{k_n}\}_{n\in N}$ estratta da $\{x_n\}_{n\in N}$ convergente ad un punto $x_0 \in X$.
Siccome inoltre risulta:

$$\left|y_{k_n} - x_0\right| \le \left|y_{k_n} - x_{k_n}\right| + \left|x_{k_n} - x_0\right| < \frac{1}{k_n} + \left|x_{k_n} - x_0\right|, \qquad \forall n \in N$$

si ha, evidentemente, che anche la successione $\{y_{k_n}\}_{n\in N}$ converge a x_0.
Dalla continuità di f in x_0 si ha:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_{k_n}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(y_{k_n}\right) = f(x_0)$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(x_{k_n}\right) - f\left(y_{k_n}\right)\right) = 0$$

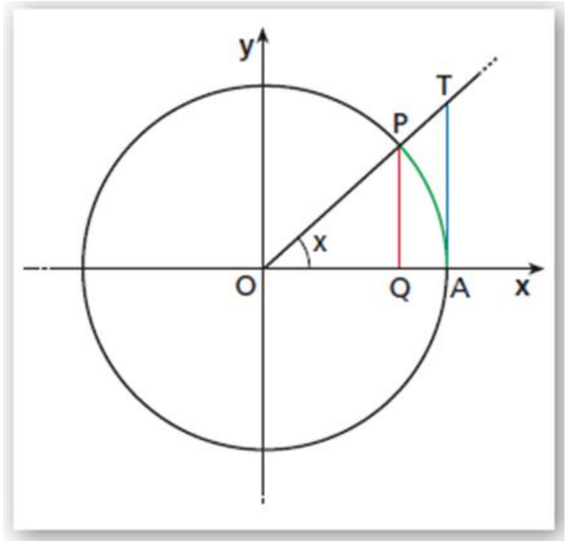
Ma ciò contrasta con il fatto che

$$|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon_{0,}$$

Limiti notevoli

Dimostriamo che vale il seguente limite

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1}$$



Si consideri una circonferenza goniometrica in cui siano noti il seno e la tangente in funzione di un angolo x. Poiché l'arco PA assume lo stesso valore dell'angolo al centro che lo sottende e noto che PQ = sinx e TA=tgx, si ha:

$$sinx < x < tgx$$

dividendo tutti i termini per $sinx$ e passando al reciproco, si ha:

$$cosx < \frac{sinx}{x} < 1$$

In tale relazione, passando al limite per x che tende a zero, essendo

$$\lim_{x \to 0} cosx = 1$$

per il teorema dei carabinieri segue anche che

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Dimostrazione:

Moltiplicando il denominatore e il numeratore per 1-cosx abbiamo che:

$$\frac{(1-cosx)(1+cosx)}{x^2(1+cosx)}=\frac{1-cos^2x}{x^2(1+cosx)}$$

Ma poiché
$sin^2x=1-cos^2x$, si ha:

$$\frac{sin^2x}{x^2(1+cosx)}=\frac{sin^2x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+cosx}=\left(\frac{sinx}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+cosx}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+cosx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+cosx}=\frac{1}{2}$$

Altri limiti notevoli

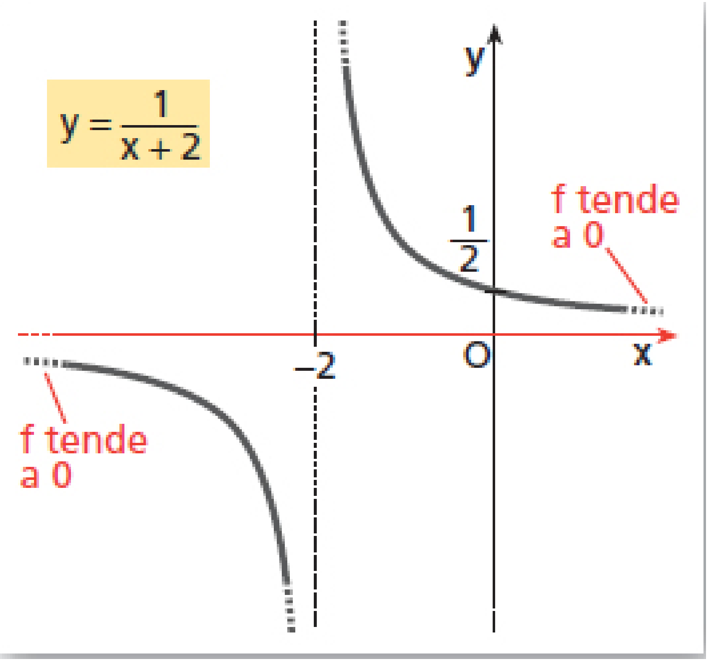
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x} = log_e a$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = ln a$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a$$

Infinitesimi ed infiniti

Si dice che una funzione è un infinitesimo per $x \to \alpha$ quando il limite di f(x) per $x \to \alpha$ è uguale a zero

Per esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x+2}$ è un infinitesimo per x che tende a infinito

Funzioni del tipo $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{\sqrt{x}}$ e così via sono tutte infinitesimi per $x \to \infty$



Confronto tra infinitesimi

Se f(x) e g(x) sono entrambi infinitesimi per $x \to \alpha$ si dice che f(x) e g(x) sono infinitesimi simultanei.

In questo caso, è interessante vedere quale dei due infinitesimi tende a 0 più rapidamente; possiamo stabilire ciò determinando il limite, se esiste, del loro rapporto per $x \to \alpha$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

- Si dice che f(x) e g(x) sono infinitesimi dello stesso ordine
- (essenzialmente vuol dire che tendono a 0 con la stessa rapidità)

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- Si dice che f(x) è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g(x)
- f tende a 0 più rapidamente di g

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

- Si dice che f(x) è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a g(x)
- f tende a 0 meno rapidamente di g

Ordine di un infinitesimo

Dati due infinitesimi f(x) e g(x), per $x \to \alpha$ si dice che f(x) è un infinitesimo di ordine γ (con γ>0) rispetto a g(x), quando f(x) è dello stesso ordine di $[g(x)]^{\gamma}$, cioè se:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^{\gamma}} = l \neq 0$$

Diciamo, inoltre, che g(x) è preso come infinitesimo campione.
In genere, come infinitesimo campione, si prende:

$g(x) = x - x_0$ se $x \to x_0$
$g(x) = \frac{1}{x}$ se $x \to \pm\infty$

Infinitesimi equivalenti

Dati due infinitesimi f(x) e g(x), per $x \to \alpha$ essi si dicono equivalenti se :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e si scrive $f \sim g$ e si legge f è asintoticamente equivalente a g. Inoltre, uno dei due si dice parte principale dell’altro.

Esempi di infinitesimi equivalenti sono:

$\boldsymbol{sinx \sim x}$
$\log(1+x) \sim x$
$e^x - 1 \sim x$

Applicazioni al calcolo dei limiti

Si calcoli il seguente limite:

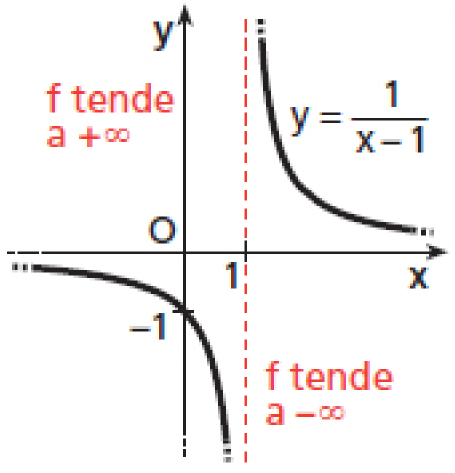
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+5x)}{sin2x}$$

Poiché $\log(1+5x)\sim 5x$ e $sin2x\sim 2x$
si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+5x)}{sin2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$$

Gli infiniti

Una funzione f(x) si dice un infinito per $x \to \alpha$ quando il limite di f(x) per $x \to \alpha$ vale $+\infty, -\infty\ o\ \infty$



La funzione $f(x) = \frac{1}{x-1}$ è un infinito per x che tende a 1, perché

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$$

Confronto tra infiniti

Per gli infiniti possiamo introdurre dei concetti analoghi a quelli visti per gli infinitesimi. In particolare:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

- Si dice che f(x) e g(x) sono infiniti dello stesso ordine
- (essenzialmente vuol dire che tendono a infinito con la stessa rapidità)

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- Si dice che f(x) è un infinito di ordine inferiore rispetto a g(x)
- f tende a infinito meno rapidamente di g

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

- Si dice che f(x) è un infinito di ordine superiore rispetto a g(x)
- f tende a infinito più rapidamente di g

Ordine di un infinito

Dati due infiniti f(x) e g(x), per $x \to \alpha$ si dice che f(x) è un infinito di ordine γ (con γ>0) rispetto a g(x), quando f(x) è dello stesso ordine di $[g(x)]^{\gamma}$, cioè se:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^{\gamma}} = l \neq 0$$

Diciamo, inoltre, che g(x) è preso come infinitesimo campione.
In genere, come infinitesimo campione, si prende:

$g(x) = \frac{1}{x-x_0}$ se $x \to x_0$
$g(x) = x$ se $x \to \pm\infty$

Dati due infiniti f(x) e g(x), per $x \to \alpha$ essi si dicono equivalenti se :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e si scrive $f \sim g$ e si legge f è asintoticamente uguale a g

Gerarchia degli infiniti

TEOREMA

Gerarchia degli infiniti

Date le tre famiglie di funzioni

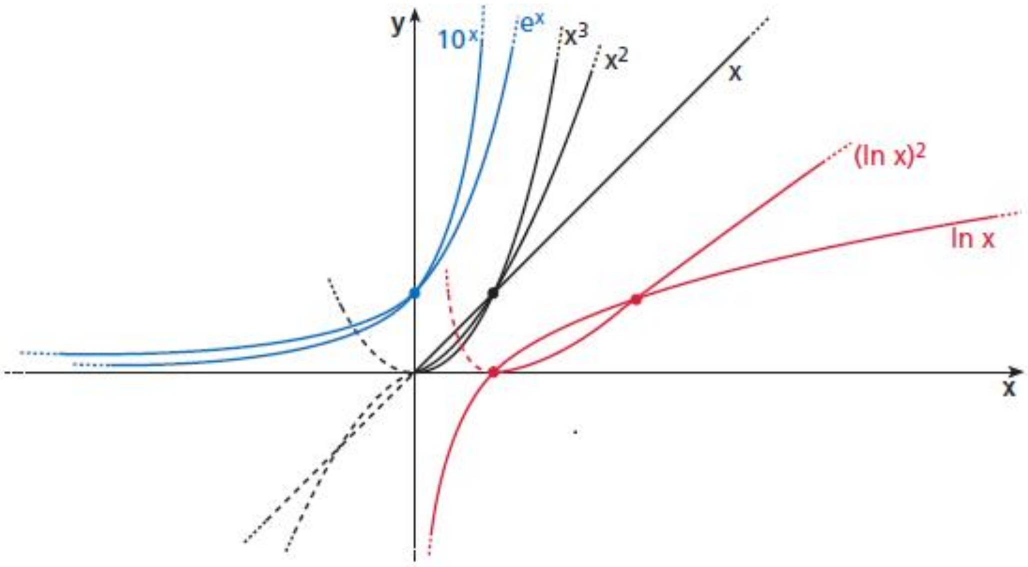
$$(\log_a x)^\alpha, \quad x^\beta, \quad b^x, \quad \text{con } \alpha, \beta > 0 \text{ e } a, b > 1,$$

allora, per $x \to +\infty$, ognuna è un infinito di ordine inferiore rispetto a quella che si trova a destra nell'elenco, cioè:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0.$$

Sinteticamente, possiamo scrivere, riferendoci agli ordini di infinito:

$$(\log_a x)^\alpha < x^\beta < b^x.$$



Applicazioni al calcolo dei limiti

Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x + sin^3x + 1 - cosx}{\log(1 + x^2) + 3sinx}$$

Al numeratore è presente la somma di 3 infinitesimi: $2x,\ sin^3x,\ 1 - cosx$.
Questi infinitesimi hanno, rispetto al campione x, ordine risp . 1, 2 e 3.
Quindi la somma $sin^3x + 1 - cosx$ ha ordine 2 (in quanto somma di infinitesimi con ordine diverso) e quindi ha ordine superiore rispetto a 2x potendosi, pertanto, trascurare nel calcolo del limite.
A denominatore è presente la somma di due infinitesimi, uno di ordine 2 e uno di ordine 1 rispetto al campione x: quello di ordine 2 potrà essere trascurato.
Il limite si riduce allora solo a:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{3sinx} = \frac{2}{3}$$

Applicazioni allo studio di una funzione: calcolo degli asintoti

Asintoti verticali

Se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale sinistro per la funzione.

Se

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale destro per la funzione.

Se

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale completo per la funzione

Asintoti orizzontali

Se

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = l$$

la retta y=l è un asintoto orizzontale sinistro per la funzione.

Se

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$$

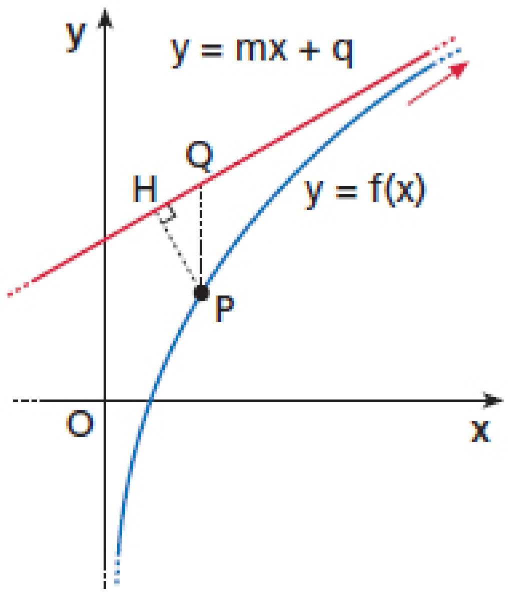
la retta y=l è un asintoto orizzontale destro per la funzione.

Se

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = l$$

la retta y=l è un asintoto orizzontale completo per la funzione

Calcolo di eventuali asintoti obliqui



Data la funzione y=f(x), se si verifica che

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

si dice che la retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo per il grafico della funzione.

Dimostriamo che la distanza di un generico punto P del grafico di una funzione da un suo asintoto obliquo tende a 0 quando x tende a infinito.

Infatti per la definizione di asintoto,

$\lim_{x \to \infty}$ PQ = $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$

Ma poiché PQ ed HP sono rispettivamente ipotenusa e cateto del triangolo QHP, si ha:

PQ>PH>0

Per il teorema del confronto

$\lim_{x \to \infty}$ PH=0

Ricerca degli asintoti obliqui

Se la funzione non presenta un asintoto orizzontale per $x \to \infty$ si passa a valutare l'esistenza dell'eventuale asintoto obliquo.
L'asintoto obliquo è una retta di equazione $y = mx + q$.
Per determinarlo dobbiamo calcolare m e q:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$

Si noti che la funzione può avere un asintoto obliquo a sinistra, a destra o completo e che talvolta è necessario fare i limiti a $+\infty$ e a $-\infty$ separatamente.