



Prof. Roberto Capone

Calcolo differenziale

Corso di Analisi Matematica
2013/2014

Corso di laurea in Ingegneria edile



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DEL MOLISE

Le derivate: introduzione storica

I due fondamentali capitoli dell'analisi matematica sono il calcolo differenziale e il calcolo integrale. Mentre il calcolo integrale trova le sue origini nella matematica greca, il calcolo differenziale nacque e prese forma nel XVII secolo, essenzialmente ad opera di Newton e Leibnitz

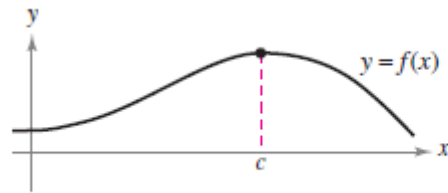
Alle idee basilari e allo sviluppo di questo fondamentale capitolo si giunse attraverso l'esigenza di risolvere due diversi tipi di problemi: problemi di tipo cinematico, come quello riguardante la nozione di velocità istantanea e problemi di tipo geometrico come quello che consiste nel determinare la tangente in un punto al diagramma di una funzione o, più in generale, a una curva.

Dapprima poggiando in maniera poco chiara ed ambigua sulle nozioni di infinitesimo e di differenziale, il calcolo differenziale assunse solo con Cauchy ne secolo XIX la forma definitiva, basandosi solidamente sulla nozione di limite.

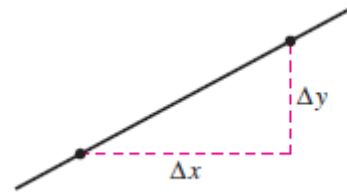


Without Calculus

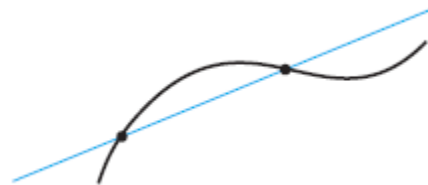
Value of $f(x)$
when $x = c$



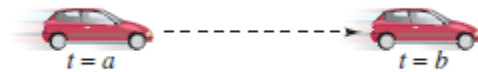
Slope of a line



Secant line to
a curve

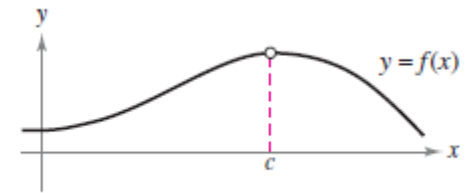


Average rate of
change between
 $t = a$ and $t = b$

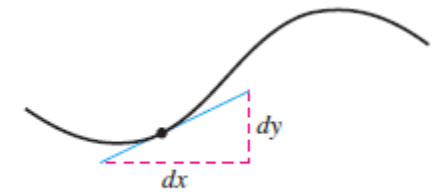


With Differential Calculus

Limit of $f(x)$ as
 x approaches c



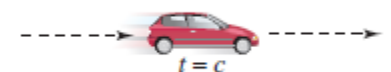
Slope of a curve



Tangent line to
a curve



Instantaneous
rate of change
at $t = c$

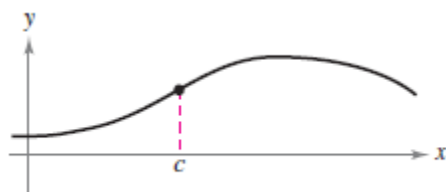


Without Calculus

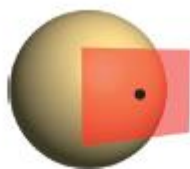
Curvature
of a circle



Height of a
curve when
 $x = c$



Tangent plane
to a sphere



Direction of
motion along
a line

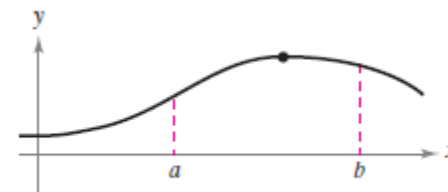


With Differential Calculus

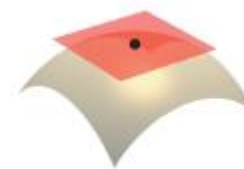
Curvature
of a curve



Maximum height
of a curve
on an interval



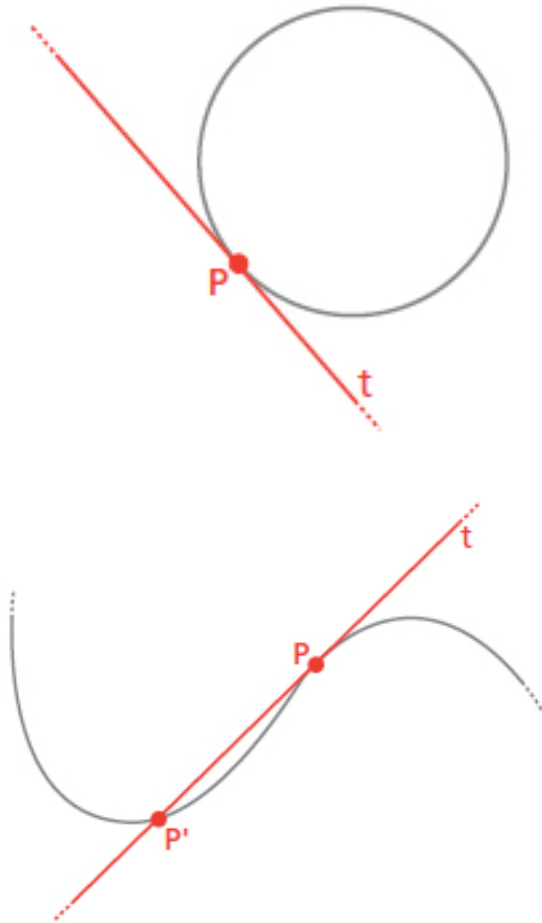
Tangent plane
to a surface



Direction of
motion along
a curve



Il problema della tangente



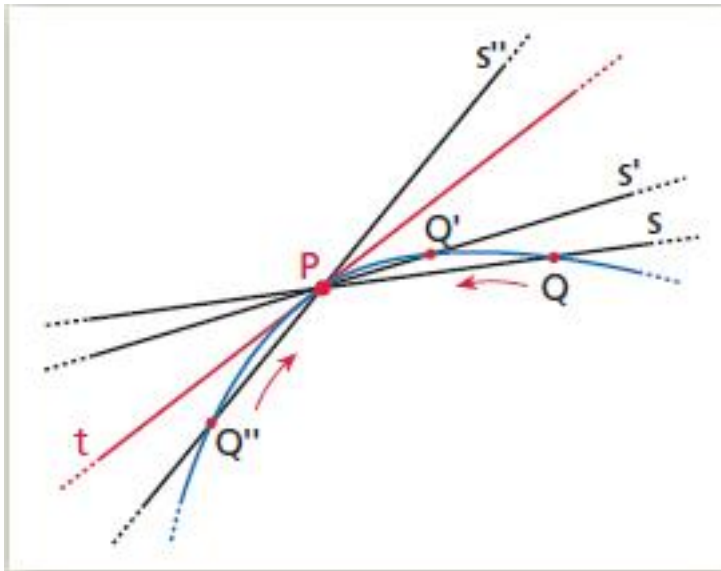
Uno dei problemi classici che portarono al concetto di derivata è quello della determinazione della retta tangente a una curva in un punto.

Se consideriamo una circonferenza, e in generale per ogni conica, la tangente in un punto P è quella retta che interseca la conica stessa soltanto in P .

Potremmo pensare di definire la tangente a una qualunque curva mediante tale proprietà. Tuttavia la definizione non sarebbe sempre corretta. Per esempio ci sono rette che intersecano la curva in un solo punto ma non sono tangenti alla curva. Per esempio l'asse di una parabola interseca la parabola stessa in un solo punto, nel suo vertice, ma non è una retta tangente

Il problema della tangente

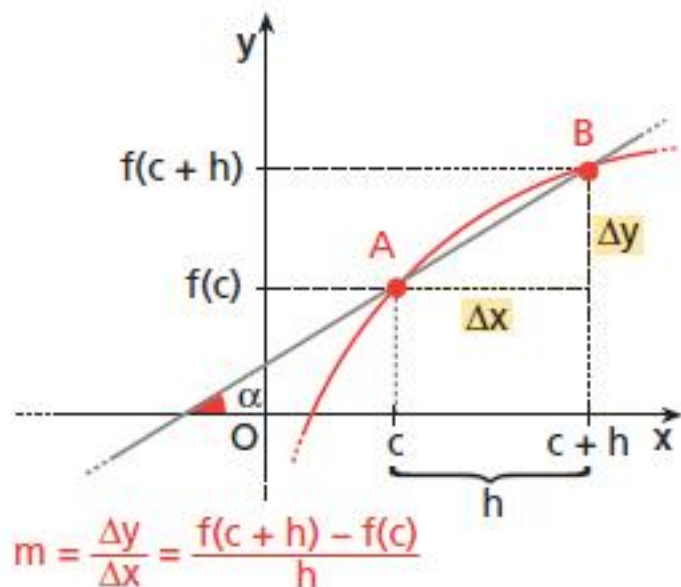
Per ottenere allora una definizione valida in generale, ci si richiama al concetto di limite, pensando al procedimento secondo il quale si può approssimare la tangente mediante rette secanti che le si avvicinano sempre di più.



Definizione

La retta tangente t ad una curva in un punto P è la posizione limite, se esiste, della secante PQ al tendere (sia da destra, sia da sinistra) di Q a P

Il rapporto incrementale



Il rapporto incrementale di f relativo a c è il coefficiente angolare della retta passante per A e B

Data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a, b]$ e un punto del suo grafico $A(c, f(c))$. Incrementiamo l'ascissa di A di una quantità h e così otteniamo il punto B di coordinate $B(c + h, f(c + h))$.

Gli incrementi $\Delta x = x_B - x_A = h$ e $\Delta y = y_B - y_A = f(c + h) - f(c)$.

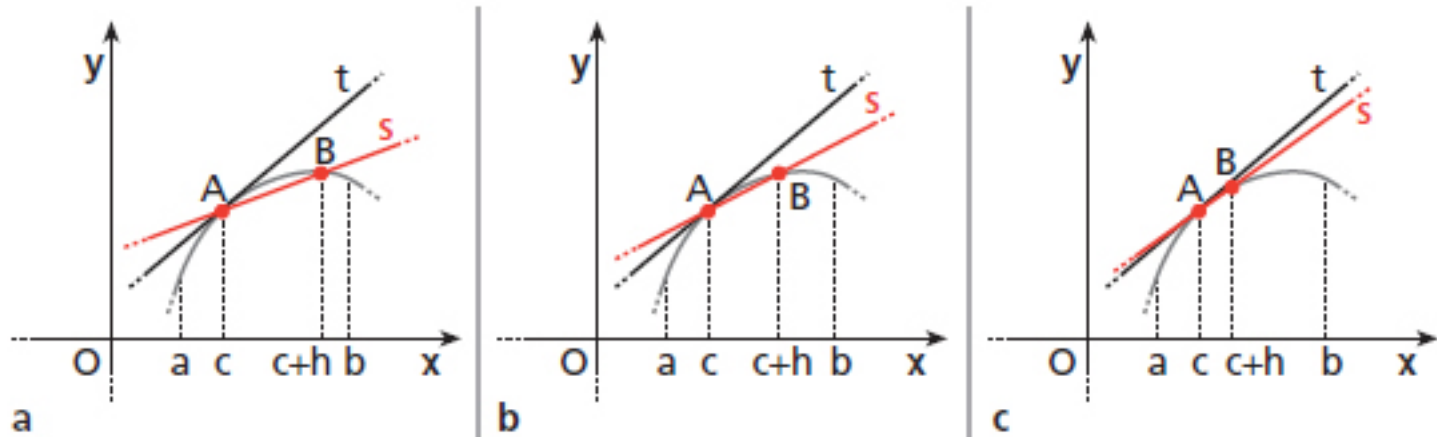
Il rapporto dei due incrementi è $\Delta y / \Delta x$.

Definizione

Dati una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a, b]$ e due diversi numeri reali c e $c + h$ interni all'intervallo, si chiama rapporto incrementale di f (relativo a c) il numero

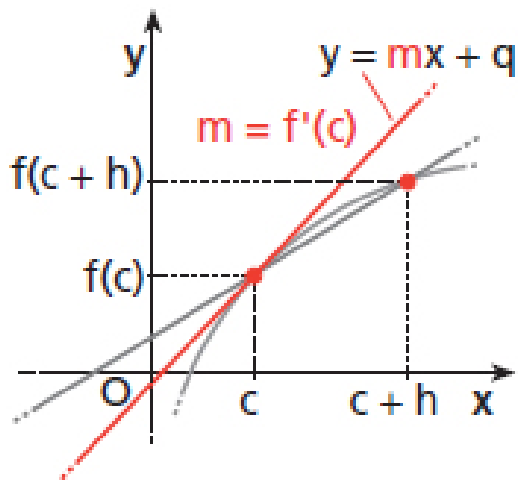
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

La derivata di una funzione



Consideriamo la funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a,b]$. Consideriamo i punti A e B. Tracciamo la retta AB, secante il grafico, per diversi valori di h . Attribuendo a h valori sempre più piccoli, il punto B si avvicina sempre di più al punto A. Quando h tende a 0, il punto B tende a sovrapporsi al punto A e la retta AB tende a diventare la retta tangente alla curva in A. Il coefficiente angolare della retta secante AB, ossia il rapporto incrementale, tende al coefficiente angolare della tangente, che viene chiamato derivata della funzione nel punto c.

Nozione di derivata



Definizione

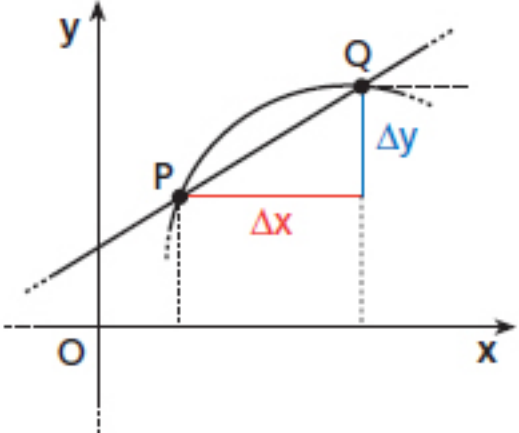
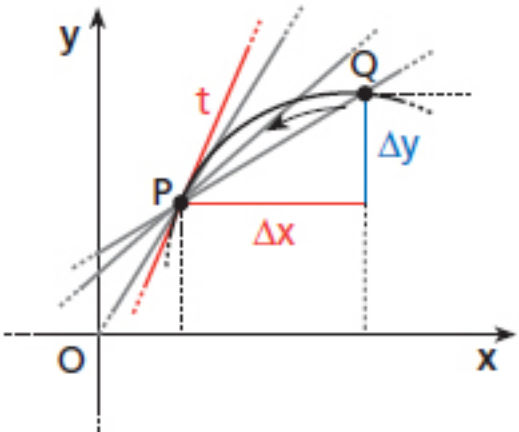
Data una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a, b]$, si chiama derivata della funzione nel punto c interno ad $[a, b]$ e si indica con $f'(c)$ il limite, se esiste ed è finito, per h che tende a 0, del rapporto incrementale di f relativo a c :

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

La derivata di una funzione in un punto x_0 si denota col simbolo

| | |
|-----------------|--------------------------------|
| $f'(x_0)$ | Notazione risalente a Lagrange |
| $Df(x_0)$ | Notazione dovuta a Cauchy |
| \dot{f} | Notazione risalente a Newton |
| $\frac{df}{dx}$ | Notazione dovuta a Leibnitz |

Rapporto incrementale e derivata di una funzione

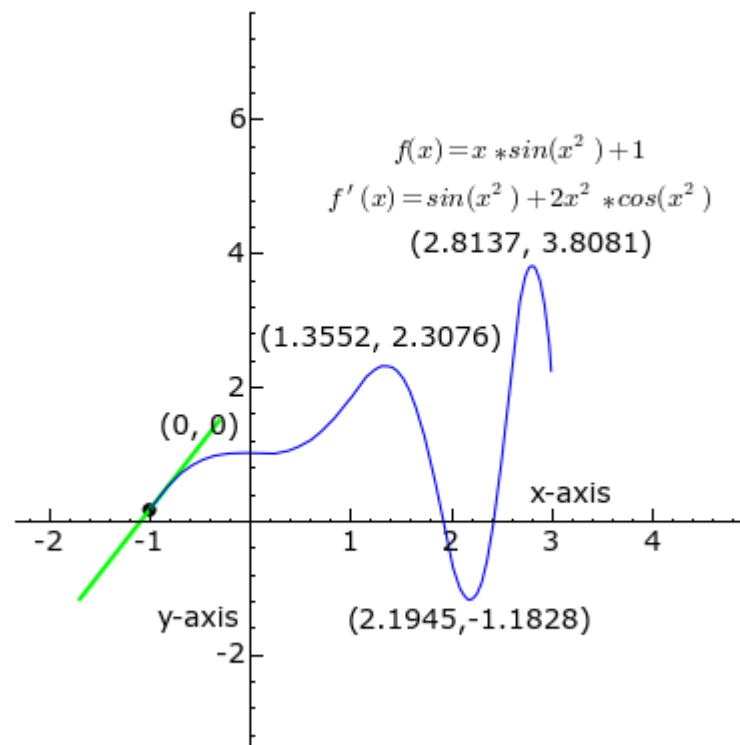
| Concetto | Figura | Definizione | Significato geometrico |
|-----------------------|--|---|--|
| Rapporto incrementale |  | $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ | Coefficiente angolare della secante al grafico della funzione nei punti <i>P</i> e <i>Q</i> |
| Derivata |  | $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ | Coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione nel punto <i>P</i> |

Equazione della retta tangente

Teorema

Una funzione reale f è derivabile in un punto x_0 del suo insieme di definizione se e solo se il suo diagramma è dotato nel punto $p_0=(x_0, f(x_0))$ di retta tangente non verticale. Quando una di queste condizioni sia soddisfatta, la derivata di f in x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente in p_0 al diagramma di f e la tangente ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Legame tra continuità e derivabilità

Teorema

Ogni funzione reale derivabile in un punto del suo insieme di definizione è necessariamente continua in quel punto.

Dimostrazione

Detto x_0 il punto in cui f è derivabile, $\forall x \neq x_0$ appartenente all'insieme di definizione di f si ha

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

Passando al limite in tale relazione per x tendente a x_0 , il secondo membro tende a $f'(x_0) \cdot 0 = 0$ e quindi per il primo membro si ha anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

Tale relazione è equivalente all'altra

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

dunque la f è continua in x_0 .

Si noti che **la proposizione inversa non è vera.**

Infatti una funzione continua in un punto può non essere ivi derivabile. Un semplicissimo esempio è fornito dalla funzione

$$f(x) = |x|$$

Tale funzione non è derivabile in 0, pur essendo ivi continua.

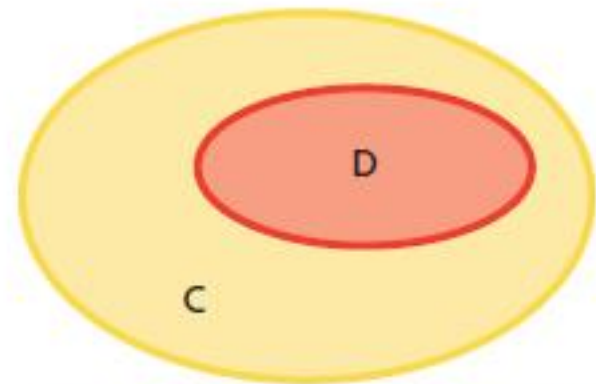
Infatti

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Si ha:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{per } x \geq 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

E perciò il limite del rapporto incrementale della f relativo al punto 0 non esiste.



C = insieme delle funzioni continue
D = insieme delle funzioni derivabili

Derivata sinistra e derivata destra

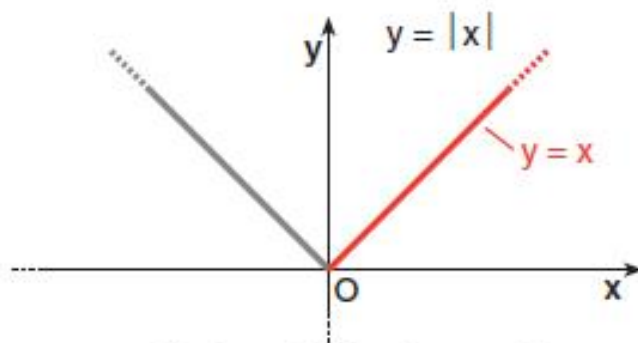
Definizione

Siano f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di \mathbb{R} , x_0 un punto di accumulazione a sinistra. Supposto che esista, finito o no, il limite sinistro in x_0 del rapporto incrementale di f relativo a x_0 ,

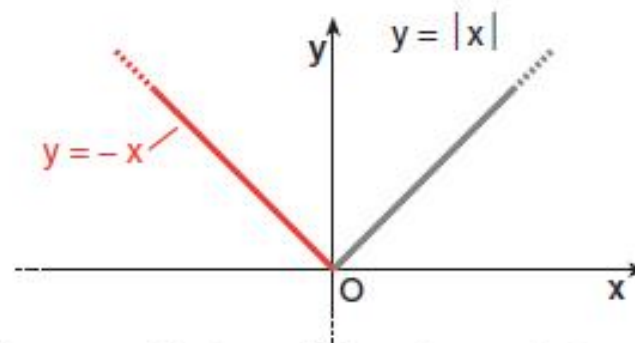
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tale limite si chiama derivata sinistra in x_0 di f e si indica con $f'_-(x_0)$.

Conseguentemente, se esiste il limite sinistro, si dice che la funzione f è dotata di derivata sinistra in x_0 .



a. Se consideriamo la funzione a destra di $x = 0$, il suo grafico coincide con la retta $y = x$. Anche la tangente coincide con la retta e il suo coefficiente angolare è 1, quindi $f'_+(0) = 1$.

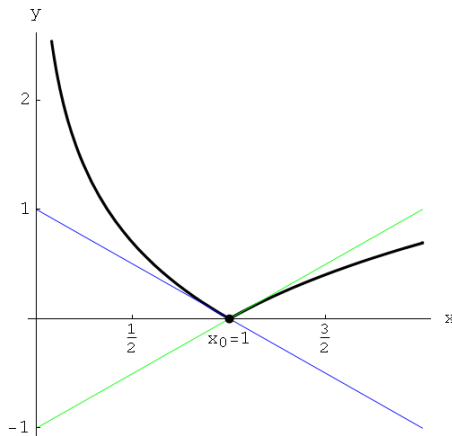


b. Se consideriamo la funzione a sinistra di $x = 0$, il suo grafico (e quello della tangente) coincide con la retta $y = -x$. Il coefficiente angolare è -1 , quindi $f'_-(0) = -1$.

Punti di non derivabilità: punti angolosi

Se una funzione $y=f(x)$ è non derivabile in un punto, possono verificarsi i seguenti tre casi:

Se la derivata sinistra e la derivata destra in un punto x_0 sono entrambe finite ma diverse, allora x_0 è un **punto angoloso**.



Esempio: il diagramma cartesiano di $f(x)=|\ln x|$ ha un punto angoloso in $P(1,0)$

Infatti:

Esplicitiamo l'espressione analitica di $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in [1; +\infty[\\ -\ln x, & x \in]0; 1[\end{cases}$$

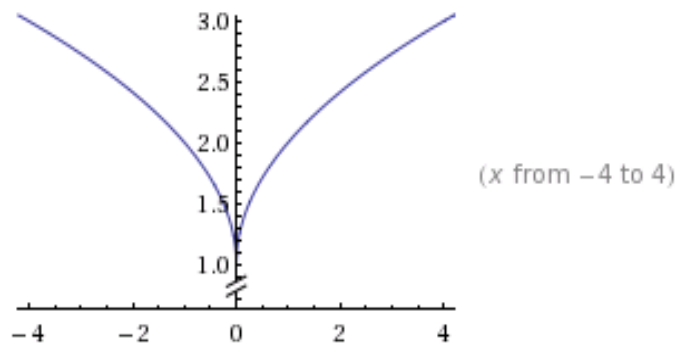
Quindi la derivata prima è:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [1; +\infty[\\ -\frac{1}{x}, & x \in]0; 1[\end{cases}$$

Il punto $x_0 = 1$ è una discontinuità di prima specie per $f'(x)$.
per cui il punto $P_0(1, 0)$ è un punto angoloso.

Punti di non derivabilità: cuspidi

Se i limiti sono diversi e tendono rispettivamente a $+\infty$ e a $-\infty$, allora si ha una **cuspidi**. In particolare se la derivata sinistra tende a $+\infty$ e la derivata destra tende a $-\infty$, si ha una cuspidi rivolta verso il basso; se la derivata sinistra tende a $-\infty$ e la derivata destra tende a $+\infty$, si ha una cuspidi rivolta verso l'alto.



Esempio

La funzione $f(x) = \sqrt{|x|} + 1$ (si ricordi che tale funzione è la traslazione di un vettore di lunghezza 1 lungo y della funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ detta parabola di Neile) presenta una cuspidi nel punto di ascissa 0.

Infatti:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$$
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty$$

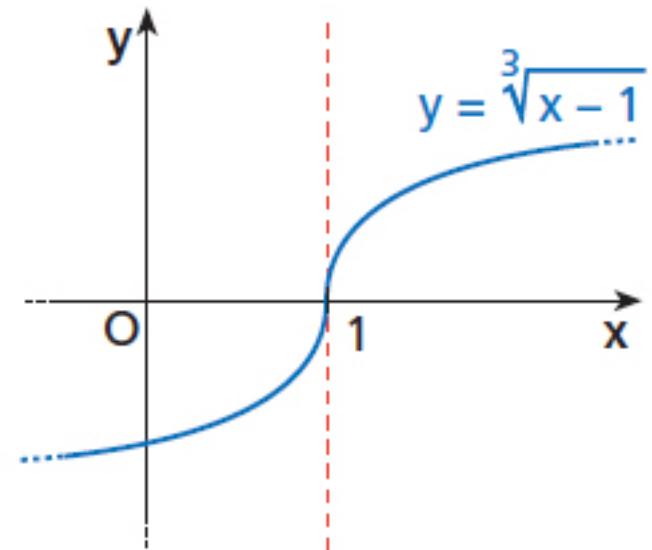
Punti di non derivabilità: flessi

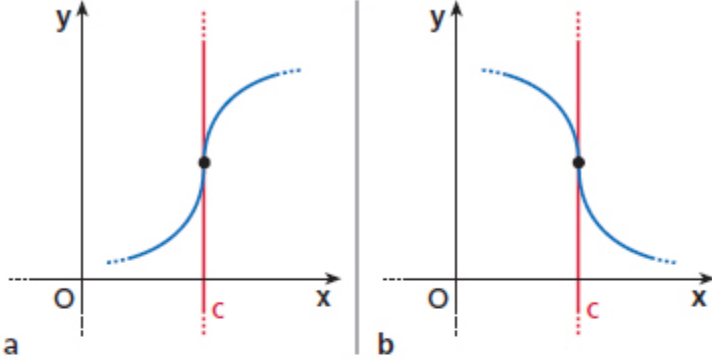
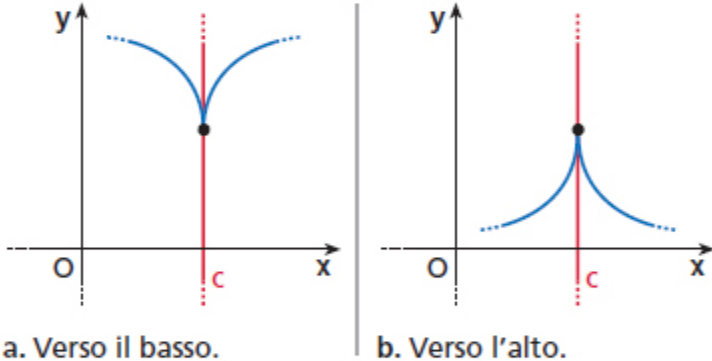
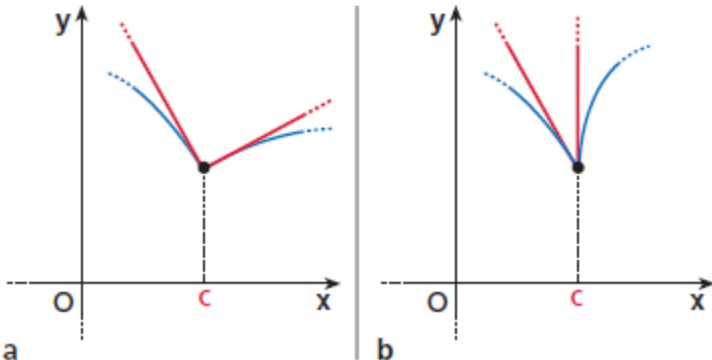
Se i limiti sinistro e destro tendono entrambi a $+\infty$ si ha un **flesso a tangente verticale**.

In particolare:

Se $f'(x) = +\infty$ allora x_0 è un flesso a tangente verticale crescente.

Se $f'(x) = -\infty$ allora x_0 è un flesso a tangente verticale decrescente.



| Punti di non derivabilità | Grafico | Derivata |
|-----------------------------|--|---|
| Flesso a tangente verticale |  <p>a</p> <p>b</p> | <p>a) $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$</p> <p>b) $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$</p> |
| Cuspide |  <p>a. Verso il basso.</p> <p>b. Verso l'alto.</p> | <p>a) $f'_-(c) = -\infty, \quad f'_+(c) = +\infty$</p> <p>b) $f'_-(c) = +\infty, \quad f'_+(c) = -\infty$</p> |
| Punto angoloso |  <p>a</p> <p>b</p> | <p>$f'_-(c) \neq f'_+(c)$</p> <p>a) entrambe finite</p> <p>b) una finita, l'altra infinita</p> |

Derivate fondamentali

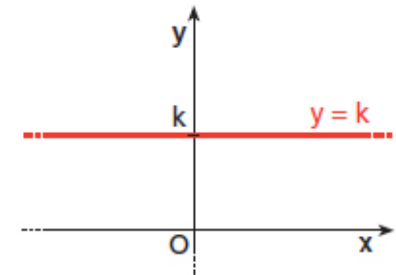
Teorema

La derivata di una costante è 0

Dimostrazione

Ricordando che se $f(x) = k$ anche $f(x + h) = k$, calcoliamo $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0$$



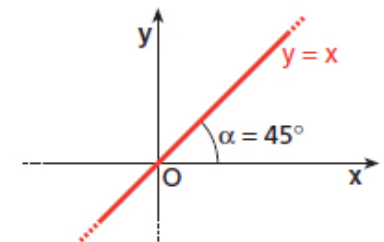
Teorema

La derivata di una funzione $f(x) = x$ è $f'(x) = 1$

Dimostrazione

Se $f(x) = x$, risulta $f(x + h) = x + h$, calcoliamo $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$



Derivate fondamentali

Teorema

La derivata di x^2 è $2x$. $D(x^2) = 2x$

Dimostrazione

$$D(x^2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x$$

Teorema

La derivata di e^x è e^x . $D(e^x) = e^x$

Dimostrazione

$$D(e^x) = e^x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x$$

Teorema

La derivata di $\text{sen } x$ è $\text{cos } x$. $D(\text{sen } x) = \text{cos } x$

Dimostrazione

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+\Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \cdot \text{cos } \Delta x + \text{cos } x \cdot \text{sen } \Delta x - \text{sen } x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen } x \cdot (1 - \text{cos } \Delta x) + \text{cos } x \cdot \text{sen } \Delta x}{\Delta x}$$

Ricordando che per le formule di duplicazione si ha:

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } x}{2}} \Rightarrow 1 - \text{cos } x = 2 \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Si ha, dunque, che

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen } x \cdot (1 - \text{cos } \Delta x) + \text{cos } x \cdot \text{sen } \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen } x \cdot \left(2 \text{sen}^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{cos } x \cdot \text{sen } \Delta x}{\Delta x} = -\text{sen } x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} + \text{cos } x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x}$$

Ricorrendo, pertanto ai limiti notevoli possiamo scrivere:

$$-\text{sen } x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} + \text{cos } x \cdot 1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\text{sen } x \cdot 0 \cdot 1 + \text{cos } x = \text{cos } x$$

Teorema

$$D(\log_b x) = \frac{1}{x \ln b}$$

Dimostrazione

$$D(\log_b x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_b(x + \Delta x) - \log_b x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_b \frac{x + \Delta x}{x}$$

Applicando ancora le proprietà dei logaritmi si ha:

$$D(\log_b x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_b \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_b \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

Applicando il limite notevole

$$\lim_{z \rightarrow 0} (1 + \theta z)^{\frac{1}{z}} = e^\theta$$

Si ricava:

$$D(\log_b x) = \log_b e^{\frac{1}{x}} = \frac{\log_b e}{x} = \frac{1}{x \ln b}$$

Teorema sulla derivabilità di una combinazione lineare di funzioni

Se le due funzioni f e g , entrambe definite nello stesso sottoinsieme X di \mathbb{R} , sono derivabili nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$, per ogni coppia di costanti a e b , anche la funzione combinazione lineare $af + bg$ è derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ e si ha:

$$(af + bg)'(x_0) = af'(x_0) + bg'(x_0)$$

In particolare se f è derivabile in x_0 e a è una costante, anche la funzione af è derivabile in x_0 e si ha $(af)'(x_0) = af'(x_0)$

Dimostrazione

Basta osservare che $\forall x \in X - \{x_0\}$ si ha:

$$\frac{af(x) + bg(x) - (af(x_0) + bg(x_0))}{x - x_0} = a \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + b \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

e passare al limite per x che tende a x_0

Teorema sulla derivabilità del prodotto di due funzioni

Se le due funzioni f e g , entrambe definite nello stesso sottoinsieme X di \mathbb{R} , sono derivabili nel punto x_0 , anche la funzione prodotto $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e si ha:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Teorema sulla derivabilità del quoziente di due funzioni

Teorema sulla derivabilità di una funzione composta

Teorema di Rolle

Sia f una funzione reale continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a;b]$, derivabile in tutti i punti ad esso interni. Allora, se $f(a) = f(b)$ esiste almeno un punto ξ interno ad $[a;b]$ tale che $f'(\xi) = 0$

Dimostrazione (La dimostrazione del teorema di Rolle è dovuta a U. Dini e risale al 1878)

Distinguiamo due casi.

Se f è costante, il teorema è banalmente vero in quanto la derivata di f si annulla ovunque

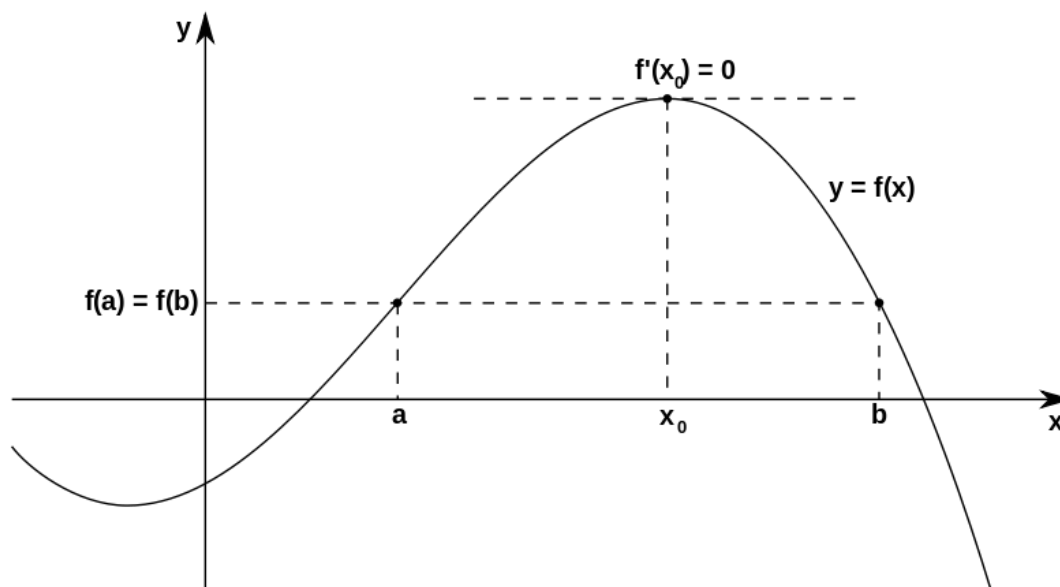
Se f non è costante, essendo continua, a norma del teorema di Weierstass, f è dotata in $[a;b]$ di minimo e di massimo; siano x_m e x_M tali punti. Di tali punti almeno uno è interno ad $[a;b]$; infatti se ciò non fosse, dovrebbe essere $f(a)=f(b)$ e dunque la funzione sarebbe costante. Supponiamo che sia x_m interno ad $[a;b]$. E' facile verificare che $f'(x_m)=0$. Infatti, poiché la f in x_m assume valore minimo, si ha $f(x) \geq f(x_m)$ e quindi il rapporto

$$\frac{f(x) - f(x_m)}{x - x_m} \quad \begin{cases} \geq 0, \forall x > x_m \\ \leq 0, \forall x < x_m \end{cases}$$

Conseguentemente, in virtù del teorema della permanenza del segno, il limite per x che tende a x_m di tale rapporto ovvero $f'(x_m)=0$

Significato geometrico del teorema di Rolle

Dal punto di vista geometrico, se un arco di curva continua è dotata di retta tangente in ogni suo punto, esclusi al più gli estremi, ed ha uguali le coordinate degli estremi, allora esiste almeno un punto interno all'arco in cui la tangente è parallela all'asse x .



Teorema di Lagrange o del valor medio

Sia f una funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato $[a;b]$, derivabile in tutti i punti ad esso interni, allora esiste almeno un punto ξ interno ad $[a;b]$ nel quale si verifica l'uguaglianza

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Dimostrazione:

Si consideri la retta passante per i punti $(a;f(a))$ e $(b;f(b))$. L'equazione di tale retta può essere scritta come:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Si può pertanto considerare la funzione ausiliaria:

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

avendo indicato $y=f(x)$.

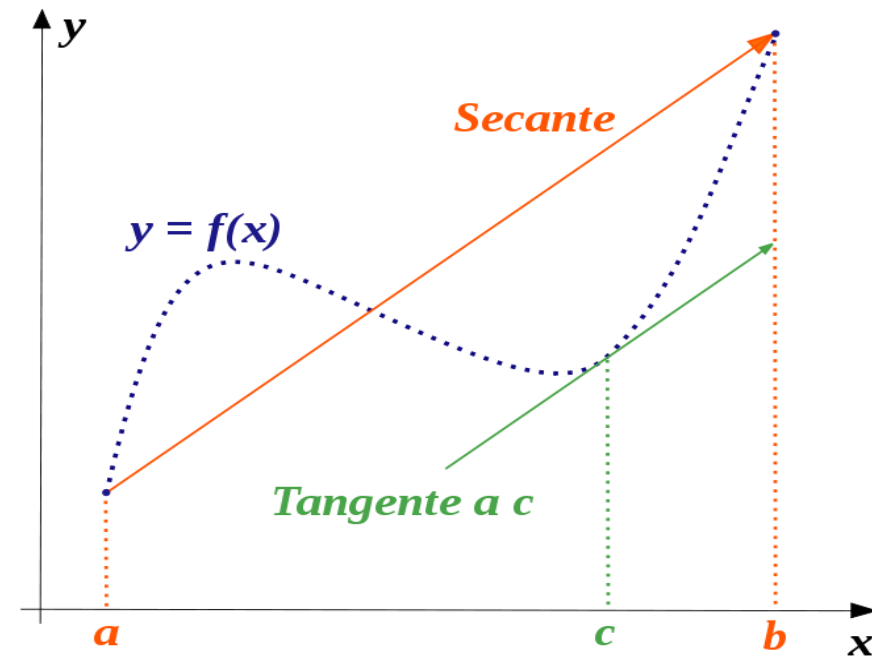
La funzione così definita è continua in $[a;b]$, ivi derivabile, così come $f(x)$. Conseguentemente, a norma del teorema di Rolla esiste almeno un punto ξ interno ad $[a;b]$ tale che

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Significato geometrico del teorema di Lagrange

Presso alcuni autori, la formula di Lagrange viene detta di Cavalieri cui risale l'osservazione geometrica:

Se un arco di curva continua è dotato di tangente in ogni suo punto, esclusi al più gli estremi, esiste almeno un punto interno all'arco nel quale la tangente è parallela alla corda che congiunge i punti estremi dell'arco. Da notare che se $f(a)=f(b)$ si ricade nel teorema di Rolle, concordemente con la situazione geometrica secondo la quale la congiungente $(f;f(a))$ e $(b;f(b))$ è in tal caso parallela all'asse x



Teorema di Cauchy o degli incrementi finiti

Se f e g sono due funzioni reali continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a;b]$, derivabili nei punti ad esso interni, esiste almeno un punto ξ interno ad $[a;b]$ per il quale si verifica l'uguaglianza

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

sempre che $g(a) \neq g(b)$, con $g'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$

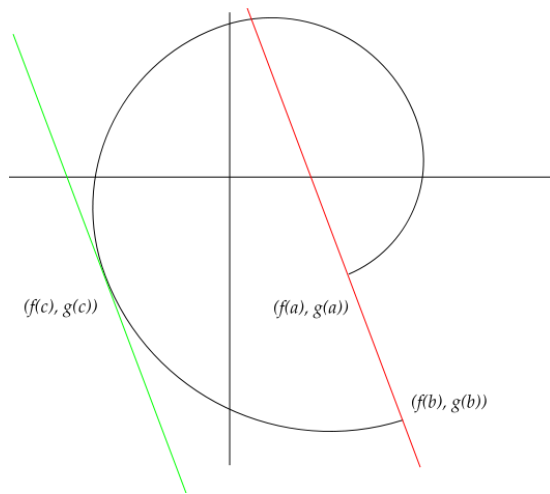
Si conduce in modo analogo a quella del teorema di Lagrange, considerando la funzione ausiliaria

$$\varphi(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)))$$

Annullando la derivata di φ in un punto $\xi \in]a;b[$ e dividendo per $g(b)-g(a)$ e per $g'(\xi)$, si ottiene l'uguaglianza voluta.

Significato geometrico del teorema di Cauchy

Geometricamente l'uguaglianza espressa col teorema di Cauchy dice che se una curva piana è dotata ovunque di retta tangente tra due suoi punti a e b , allora almeno una di queste rette tangenti è parallela alla corda AB . Questa proprietà vale non soltanto quando la curva è il grafico di una funzione, ma anche per curve, più in generale, come quella della figura.



Si noti che il teorema di Cauchy restituisce quello di Lagrange ponendo $g(x)=x$, $\forall x \in [a, b]$. In tal caso, infatti, si ha $g'(x)=1$ e $g(b)-g(a)=b-a$

Teorema di Fermat (sulle funzioni con derivata nulla)

Una funzione definita su un intervallo aperto $I = (a, b)$, ivi derivabile e con derivata nulla in ogni punto di tale intervallo è una costante.

Dimostrazione

Basta osservare che, a norma del teorema di Lagrange, per ogni coppia di punti x_1 e x_2 di I si ha:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$$

Essendo $f'(x) = 0 \forall x \in I$, e quindi $f(x_2) = f(x_1)$

Funzioni crescenti e decrescenti

Se f è una funzione reale definita nella parte X di \mathbb{R} , si può constatare che essa è crescente oppure decrescente in X (che soddisfa cioè alla condizione $f(x') \leq f(x'')$ oppure all'altra $f(x') \geq f(x'')$) per ogni coppia (x', x'') di punti di X tali che $x' < x''$) se e solo se essa verifica rispettivamente la prima o la seconda delle seguenti uguaglianze

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \geq 0 \qquad \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \leq 0$$

per ogni coppia (x', x'') di punti di X con $x' < x''$.

Analogamente f è strettamente crescente o strettamente decrescente in X se e solo se essa soddisfa rispettivamente alla prima o alla seconda delle disuguaglianze strette

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} > 0 \qquad \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} < 0$$

per ogni coppia (x', x'') di punti di X con $x' < x''$.

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA MONOTONIA

Teorema: sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di \mathbb{R} . Allora, se f è monotona crescente in X (risp. monotona decrescente in X), necessariamente si ha $f'(x) \geq 0$ (risp. $f'(x) \leq 0$) in ogni punto di X nel quale la f sia dotata di derivata

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA MONOTONIA

Teorema: sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di \mathbb{R} e ivi derivabile. Allora basta che si abbia $f'(x) \geq 0$ (risp. $f'(x) \leq 0$) $\forall x \in X$, perché la f sia crescente (risp. decrescente) in X

Condizione necessaria per l'esistenza di un minimo o massimo relativo

Teorema: sia f una funzione reale definita nella parte X di \mathbb{R} e x_0 un punto di X di accumulazione a sinistra (risp. a destra) per X , nel quale la f sia dotata di derivata sinistra (risp. destra).

Allora, se f ha in x_0 un minimo relativo, necessariamente si ha $f'_-(x_0) \leq 0$ (risp. $f'_+(x_0) \geq 0$); mentre se f ha in x_0 un massimo relativo, necessariamente si ha $f'_-(x_0) > 0$ (risp. $f'_+(x_0) \leq 0$).

Se x_0 è di accumulazione per X sia sinistra che a destra, in particolare interno a X e la f è dotata in x_0 sia di derivata sinistra che destra, le condizioni precisate su tali derivate si devono verificare simultaneamente. Conseguentemente, se f è derivabile in x_0 , sia che essa abbia in x_0 un minimo relativo sia che abbia un massimo relativo, necessariamente si ha $f'(x_0) = 0$

Condizione sufficiente per l'esistenza di un minimo o massimo relativo

Teorema: sia f una funzione reale definita nella parte X di \mathbb{R} . Allora, se x_0 è un punto di X per esso di accumulazione solo a destra e f è dotata di derivata in x_0 a seconda che si abbia $f'(x_0) > 0$ oppure $f'(x_0) < 0$, f ha in x_0 un minimo oppure un massimo relativo in senso stretto.

Se x_0 è di accumulazione per X solo a sinistra e f è dotata di derivata in x_0 , a seconda che si abbia $f'(x_0) > 0$ oppure $f'(x_0) < 0$, f ha un massimo oppure un minimo relativo in senso stretto.

Se x_0 è di accumulazione per X sia a sinistra che a destra e f è dotata in x_0 di derivate sinistra e destra, se $f'_-(x_0) > 0$ e $f'_+(x_0) < 0$ f ha un massimo relativo in senso stretto, mentre se $f'_-(x_0) < 0$ e $f'_+(x_0) > 0$, f ha un minimo relativo in senso stretto.

Criterio di monotonia

Teorema

Sia f una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) . Allora:

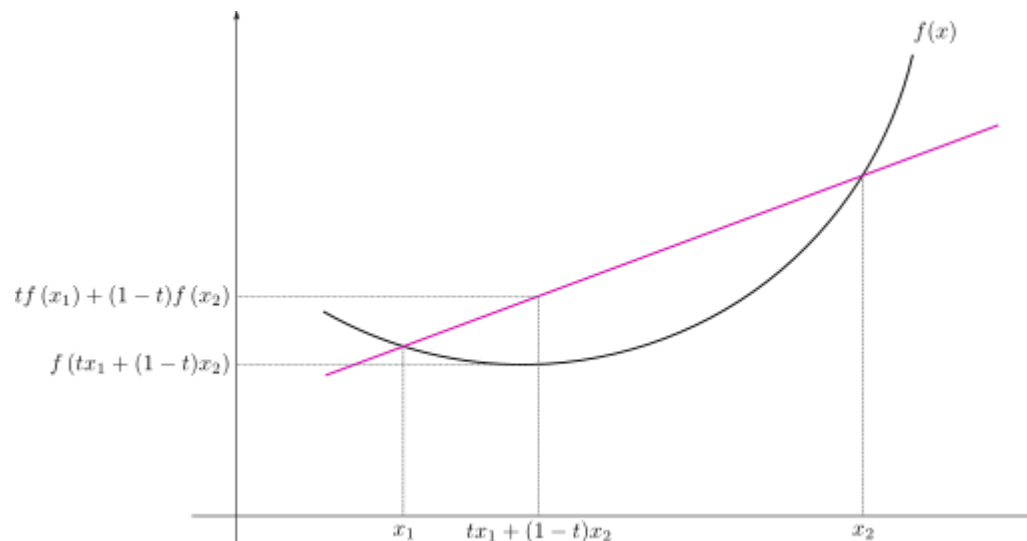
$$f'(x_0) \geq 0, \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f \text{ è crescente in } [a, b];$$

$$f'(x_0) \leq 0, \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f \text{ è decrescente in } [a, b];$$

Funzioni convesse e concave

Una funzione reale f definita in un intervallo X di \mathbb{R} dicesi convessa (risp. concava) in X quando per ogni coppia (x', x'') di punti di X , con $x' < x''$, tutti i punti del diagramma di f di ascissa $x \in]x', x''[$ sono al di sotto (risp. al di sopra) della retta congiungente $(x', f(x'))$ con $(x'', f(x''))$.

Se questa proprietà geometrica si verifica in senso stretto, f si dice strettamente convessa (risp. strettamente concava)



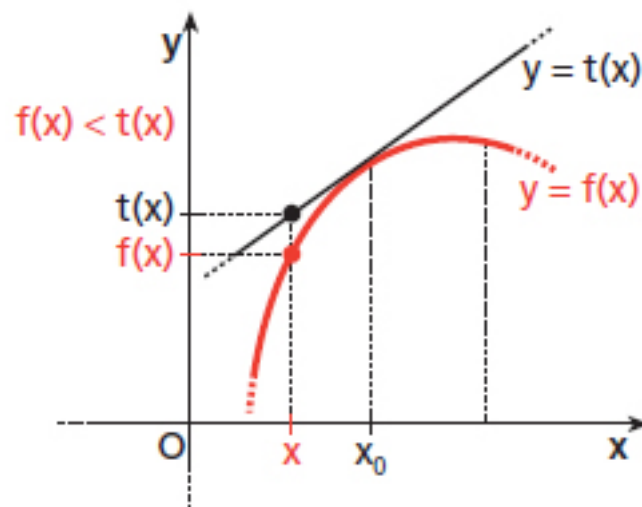
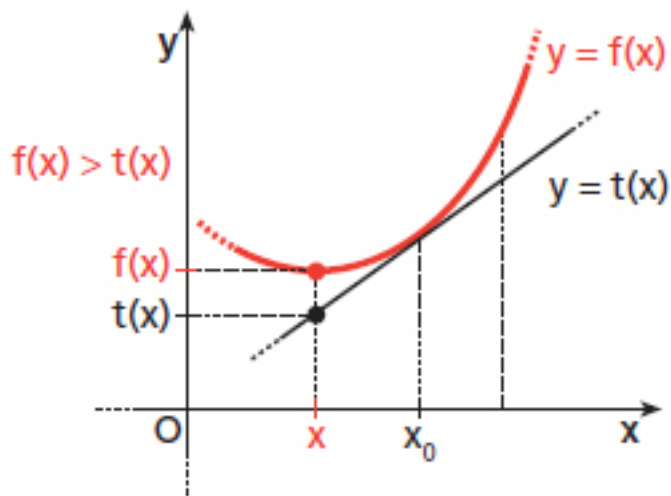
Caratterizzazione delle funzioni convesse o concave derivabili

Sia f una funzione reale definita nell'intervallo X di \mathbb{R} e ivi derivabile. Allora f è convessa o concava in X se e solo se, $\forall x_0 \in X$, il diagramma G di f è al di sopra oppure al di sotto della retta tangente a G in $P_0(x_0, f(x_0))$ o, ciò che è lo stesso, se e solo se $\forall x_0 \in X$ si verifica la disuguaglianza

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in X$$

oppure l'opposta.

Se f è strettamente convessa o strettamente concava in X se e solo se ciascuna delle suddette condizioni si verifica in senso stretto



Caratterizzazione delle funzioni convesse e concave derivabili due volte

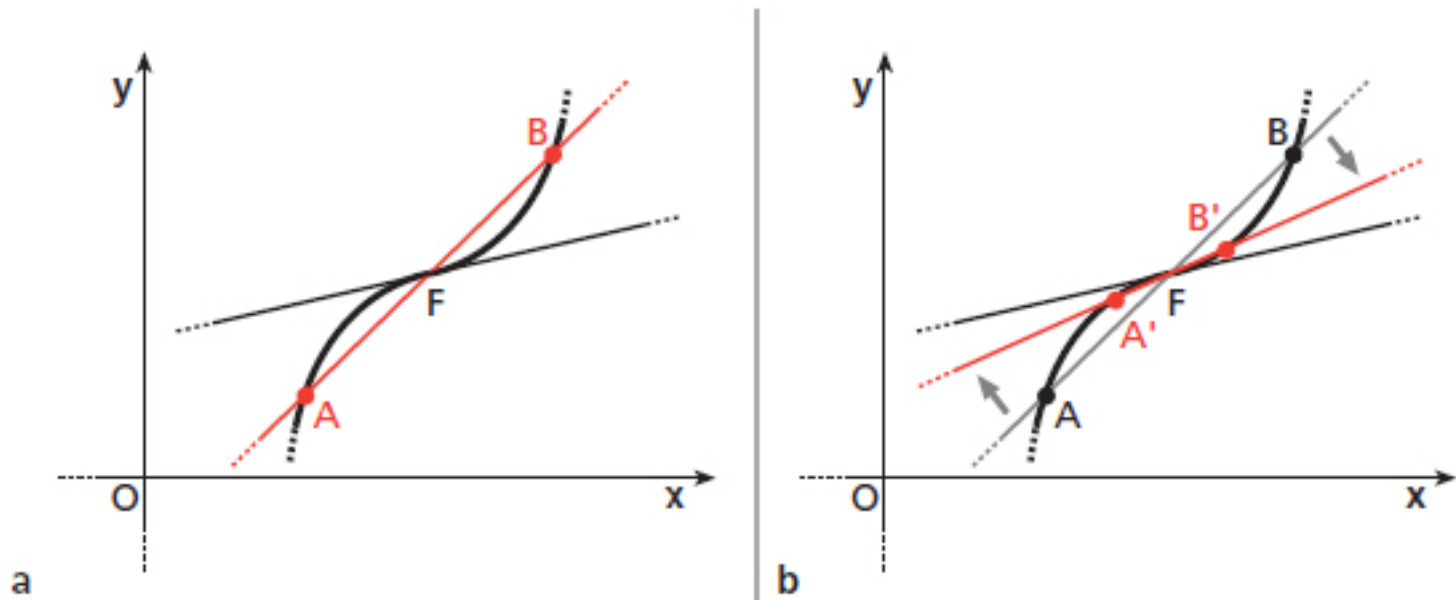
Sia f una funzione reale definita nell'intervallo X di \mathbb{R} , ivi derivabile due volte. Allora f è convessa o concava in X se e solo se $\forall x \in X$ si ha $f''(x) \geq 0$ oppure $f''(x) \leq 0$.

f è strettamente convessa o strettamente concava in X se e solo se $\forall x \in X$ si ha $f''(x) \geq 0$ oppure $f''(x) \leq 0$ e non esiste nessun intervallo incluso in X nel quale la f'' sia identicamente nulla.

Punti di flesso

Definizione

Sia f una funzione reale derivabile nel punto x_0 del suo insieme di definizione X . Si dice che il diagramma G di f ha un flesso nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$ se, comunque si consideri un intorno I di x_0 , vi sono punti di G , diversi da P_0 e di ascissa $x \in I$ sia strettamente al di sopra sia strettamente al di sotto della retta tangente a G in P_0 . Se G ha in P_0 un flesso, P_0 si dice anche punto di flesso per G e la tangente in P_0 a G si dice tangente di flesso.



Teorema di l'Hospital

Quando il limite di un rapporto $f(x)/g(x)$ si presenta nella forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞ , si può, agendo sul rapporto $f(x)/g(x)$, tentare di togliere l'indeterminazione e ricondurre il calcolo del limite a limiti noti.

Teorema

Siano I un intervallo, x_0 un punto di accumulazione per I , al finito o no, $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni reali definite in tutto I il punto x_0 al più escluso e ivi derivabili. Atteso che $\forall x \in I$, con $x \neq x_0$, se $x_0 \in \mathbb{R}$ si abbia $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ si considerino i rapporti

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

e si supponga che il limite per $x \rightarrow x_0$ del primo di essi si presenti nella forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞ . Allora, se esiste il limite per $x \rightarrow x_0$ del secondo di tali rapporti, esiste anche il limite del primo e sussiste l'uguaglianza

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esercizi

$$f(x) = e^x - \frac{1}{8}e^{2x}$$

$$f(x) = e^x \cdot (3x^2 - 4x - 1)$$

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 4x - 5|}$$

$$f(x) = |x - 2|e^x$$

$$f(x) = \log|3 - 2\log x|$$