*Prof. Roberto Capone*

# Funzioni reali di due variabili reali

## Corso di Analisi Matematica 2013/2014

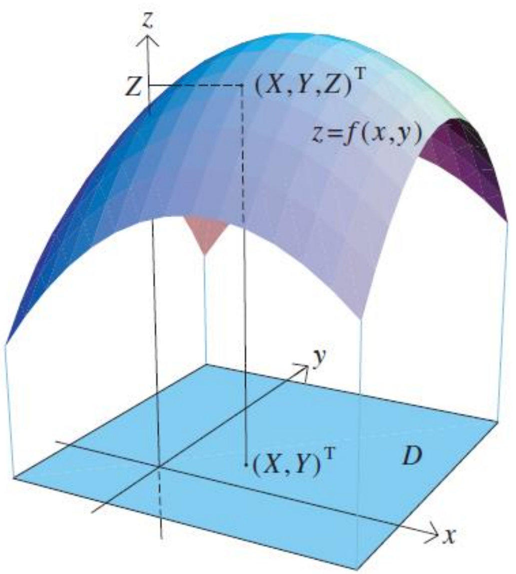
Corso di studi in Ingegneria edile

Università degli Studi del Molise

# Definizione

**DEFINIZIONE**

**Funzione reale di due variabili reali**
Indichiamo con $R^2$ l'insieme di tutti i vettori bidimensionali. Dato un sottoinsieme $D \subseteq R^2$, una funzione $f: D \rightarrow R$ è una legge che assegna a ogni punto $(x, y)$ dell'insieme D un unico valore z ∈ R indicato con
$z = f(x, y)$

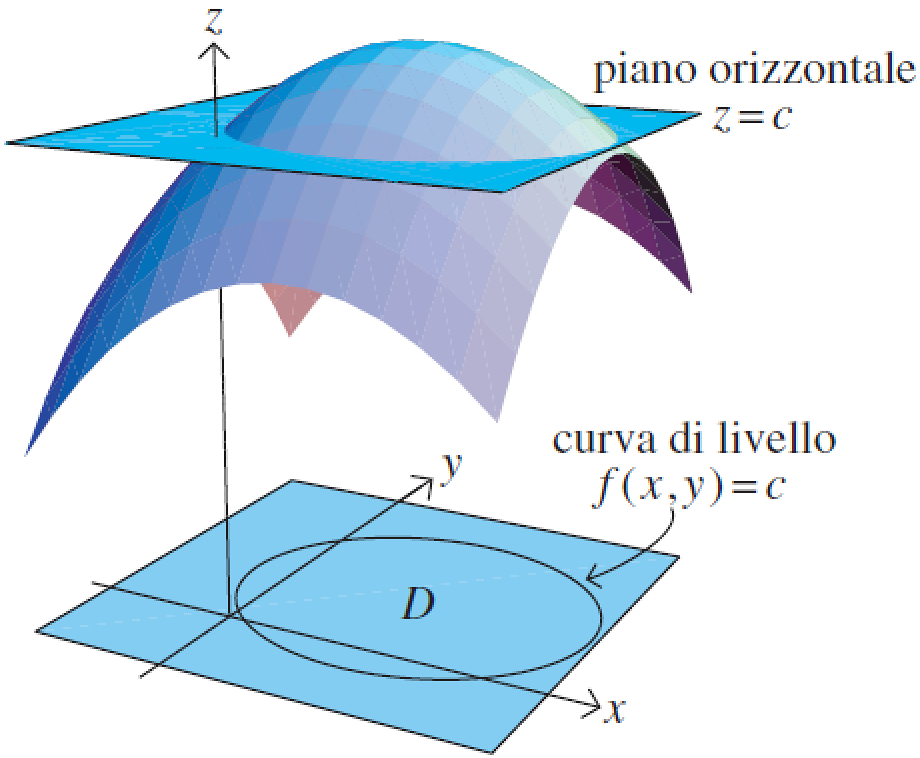



In questo caso, x e y sono le variabili indipendenti e z e la variabile dipendente. Il dominio D è una regione del piano (x, y) e il grafico è una superficie dello spazio tridimensionale. A ciascun punto (X,Y) di D con f(X,Y) = Z corrisponde un unico punto (X,Y, Z) sulla superficie.

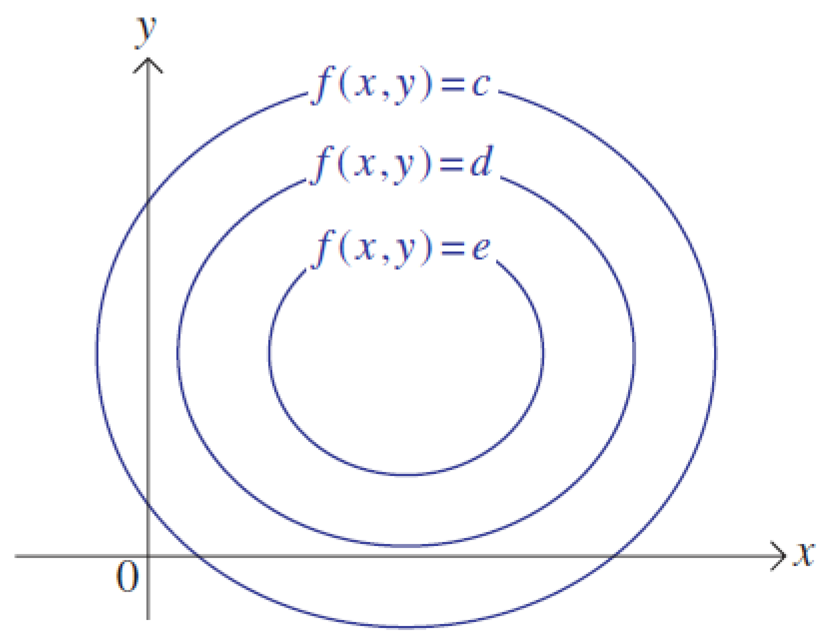
# Curve di livello

Di solito la superficie non è facile da disegnare per cui talvolta si preferisce considerarla come se fosse la superficie di un terreno. È allora naturale rappresentare l'andamento del terreno disegnando una mappa di curve orizzontali a una quota fissata, chiamate **curve di livello** o **contorni**, lungo le quali il valore della funzione è costante.
Ciascuna di queste linee corrisponde a una sezione orizzontale che taglia la superficie. Anche le sezioni verticali aiutano a descrivere la superficie, mostrandone delle viste laterali. Il reticolo che compare nel grafico di una funzione generato da un calcolatore corrisponde a sezioni verticali che tagliano la superficie secondo due direzioni ortogonali.

# Rappresentazione delle linee di livello




Disegno della superficie




Curve di livello

# Insieme di definizione

**ESEMPIO**

Consideriamo la funzione:

$$z = f(x;y) = \frac{3x+2y-5}{x^2+4} \quad .$$

Qual è il suo dominio?

Denominatore non nullo: $x^2+4 \neq 0$, condizione vera per ogni $x$ e per ogni $y$

→ Dominio di $f$: $S = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .

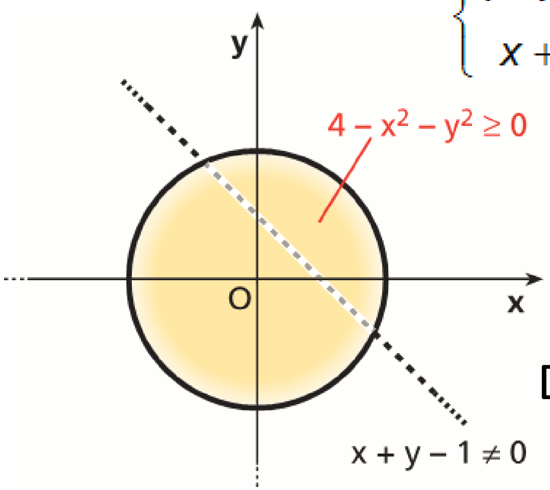
**ESEMPIO**

Consideriamo la funzione:

$$z = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{x+y-1} \quad .$$

Condizione di esistenza:

$$\begin{cases} 4-x^2-y^2 \geq 0 \\ x+y-1 \neq 0 \end{cases} \quad .$$




Dominio

# Insieme di definizione

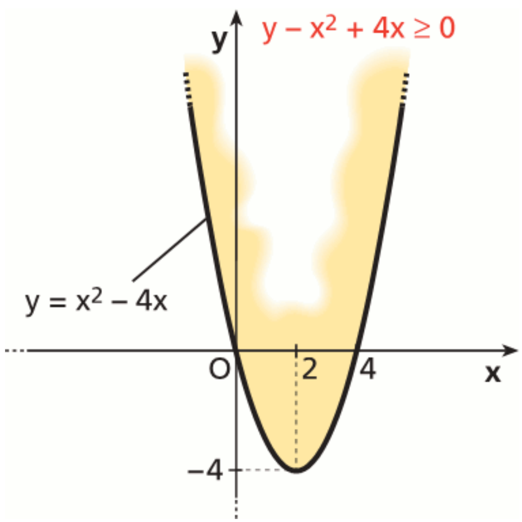
**ESEMPIO**

Determiniamo il dominio della funzione:

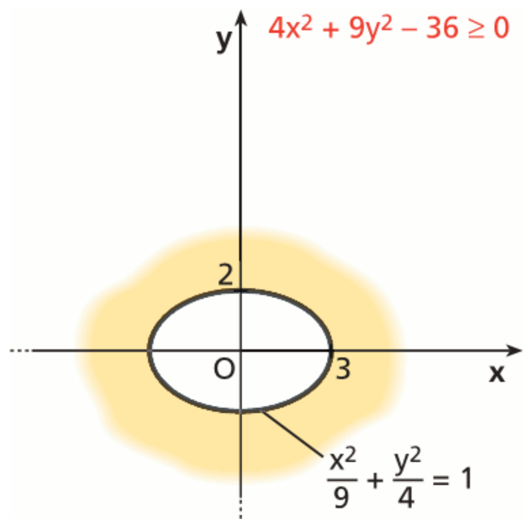
$$z = \frac{\sqrt{y - x^2 + 4x}}{\sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36} + 7}.$$

Condizione di esistenza:

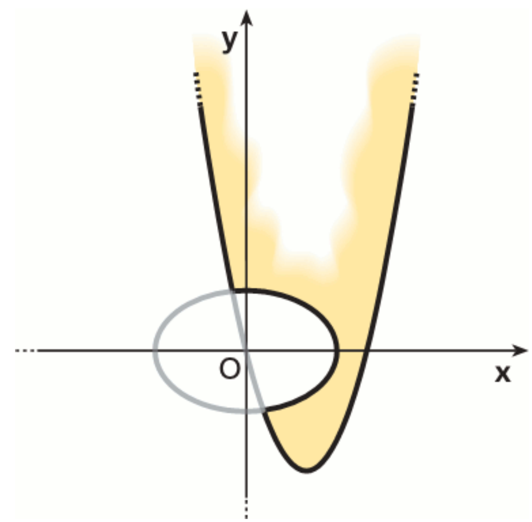
$$\begin{cases} \boxed{y - x^2 + 4x \geq 0} \\ \boxed{4x^2 + 9y^2 - 36 \geq 0} \end{cases}.$$




Prima disequazione




Seconda disequazione

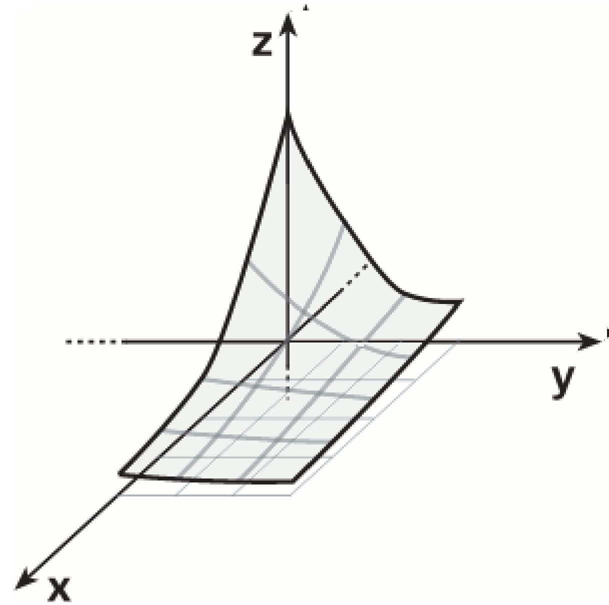


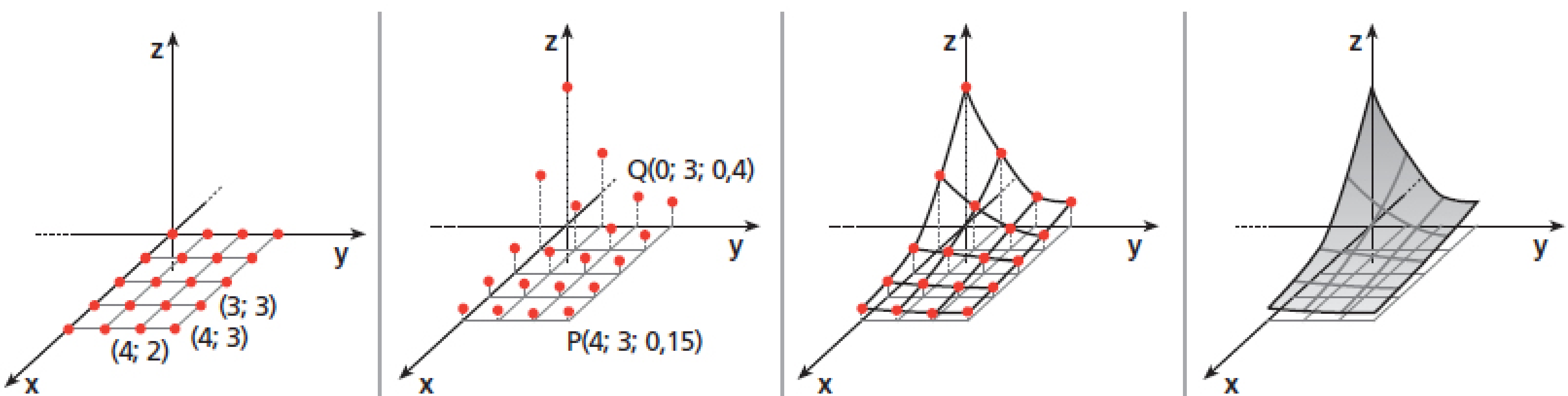

Intersezione

# Grafico delle funzioni in due variabili

## I grafici per punti

Grafico di $z = f(x; y)$: si individua un reticolo all'interno della porzione di dominio che si vuole rappresentare;
si innalzano le quote di ciascun nodo;
si congiungono con delle linee i punti ottenuti;
i quadrilateri ottenuti forniscono una rappresentazione approssimativa della superficie curva $z = f(x; y)$.




**a.** Tracciamo i lati di un reticolo.

**b.** Innalziamo le quote da ciascun nodo.

**c.** Congiungiamo i punti ottenuti con delle linee.

**d.** Otteniamo la rappresentazione della superficie nello spazio.

# Grafico delle funzioni in due variabili

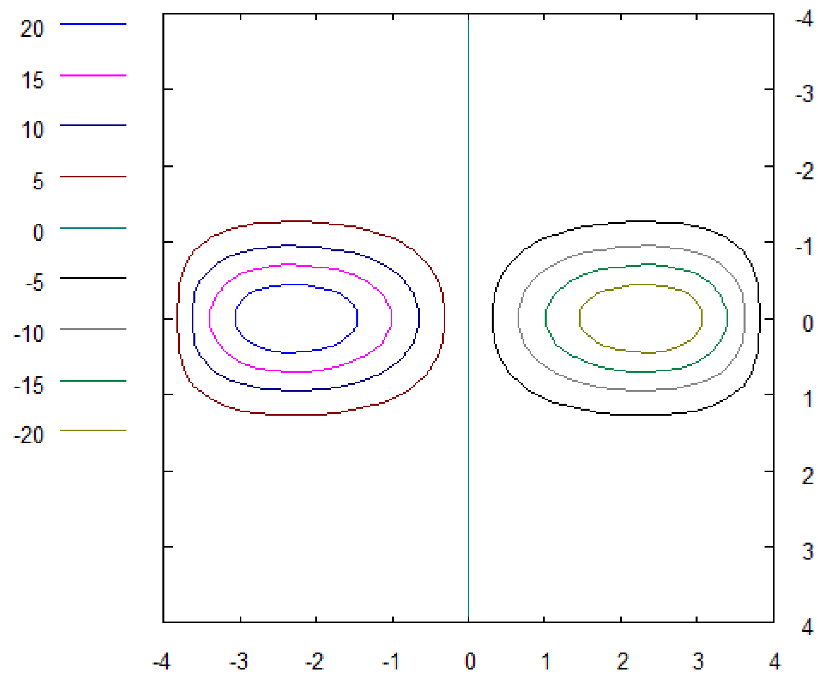
**Le linee di livello**

Grafico di $z = f(x; y)$:

• si interseca la superficie curva $z = f(x; y)$ con piani $z = k$;

• si riportano su un piano le **linee di livello** cioè le curve d'intersezione tra il piano $z = k$ e la superficie da rappresentare;

• si riportano sul grafico le quote $k$ corrispondenti alle linee disegnate.



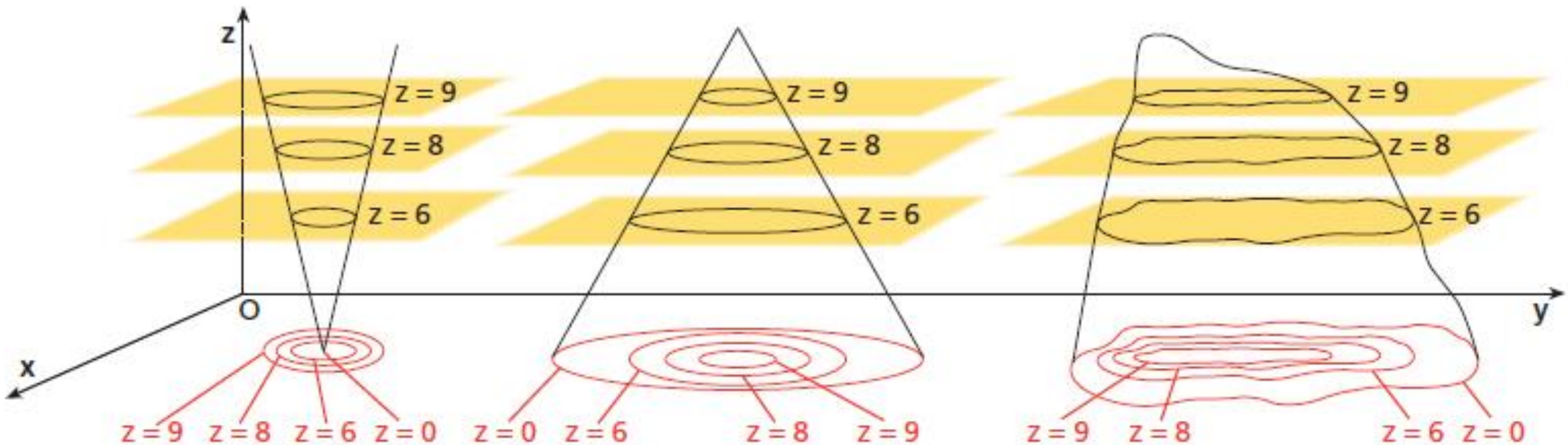

Come nell'esempio, una famiglia di linee di livello concentriche può rappresentare sia un **picco** della superficie (a sinistra) sia un **avvallamento** (a destra).

# Linee di livello

**DEFINIZIONE**

**Linea di livello**

Una linea di livello è l'insieme delle proiezioni ortogonali sul piano $Oxy$ dei punti di una superficie che hanno tutti la stessa quota $z = k$.



# Nozioni di Topologia in $R^2$

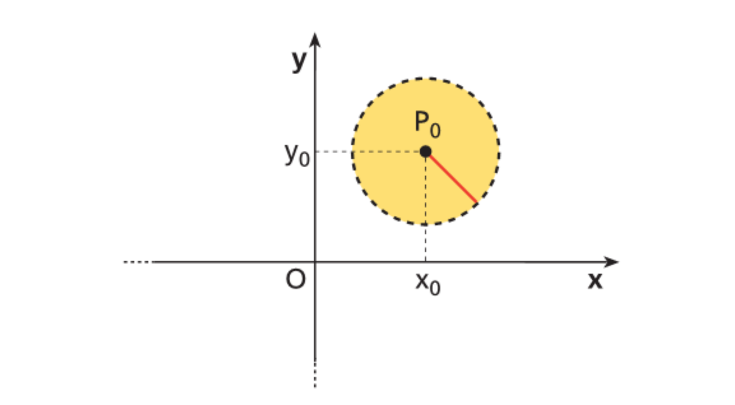
**DEFINIZIONE**

**Intorno circolare**

Si chiama intorno circolare di un punto $P_0(x_0; y_0)$ del piano l'insieme dei punti del piano le cui coordinate $(x; y)$ soddisfano la disequazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2,$$

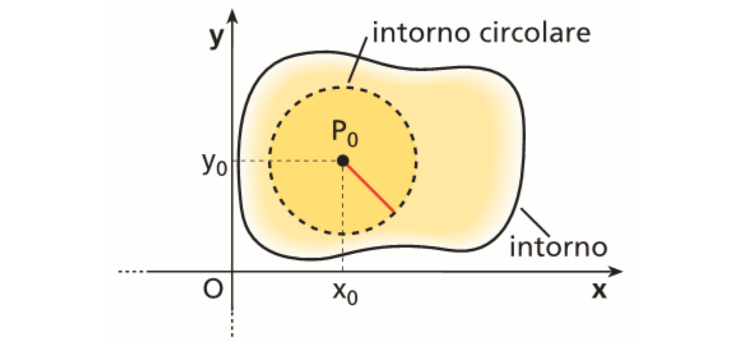
con $r$ numero reale positivo.




**DEFINIZIONE**

**Intorno**

Si chiama intorno di un punto $P_0$ del piano ogni sottoinsieme di **R** x **R** che contiene un intorno circolare di centro $P_0$.



# Nozioni di Topologia in $R^2$

**ESEMPIO**

Consideriamo l'insieme

$$I = \{ (x;y) \mid (x;y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \wedge$$
$$\wedge\, x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 < 0 \}.$$

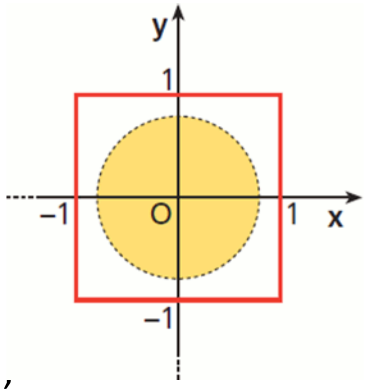
$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$$

è l'equazione di una circonferenza centrata in $P_0$ (3;2) con raggio $r$ = 1.

→ $I$ è un intorno circolare di raggio 1 del punto $P_0$ (3;2).

**ESEMPIO**

Consideriamo l'insieme $I$ rappresentato nella figura.




$$-1 \le x \le 1 \wedge -1 \le y \le 1,$$

$I$ contiene in intorno circolare di $O$ (0;0) di raggio 0,75.

→ $I$ è un intorno di $O$ (0;0).

$O$ è un **punto di accumulazione** per $I$.

DEFINIZIONE

**Punto di accumulazione**

Dato un insieme $I$ di punti di un piano, un punto $P_0$ si dice di accumulazione per $I$ se, comunque fissato un intorno circolare di $P_0$, tale intorno contiene infiniti punti di $I$.

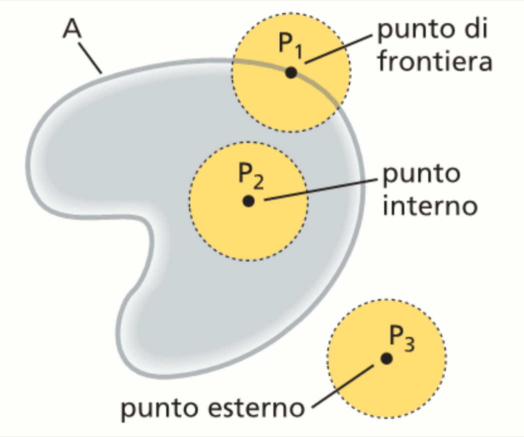
# Nozioni di Topologia in $R^2$

DEFINIZIONE

**Punti interni, esterni, di frontiera**

Dato un insieme *A* di punti del piano, un punto *P* è:

- **di frontiera** per *A,* se ogni intorno di *P* ha punti di *A* e punti che non appartengono ad *A*;
- **interno** ad *A*, se *P* appartiene ad *A* e se esiste un intorno di *P* i cui punti sono soltanto punti di *A*;
- **esterno** ad *A,* se esiste un intorno di *P* che non ha punti appartenenti ad *A*.




ESEMPIO

Dato un cerchio:
sono **esterni** i punti che non appartengono al cerchio;
sono **interni** i punti del cerchio che non appartengono alla circonferenza;
la circonferenza è la **frontiera**.

DEFINIZIONE

**Insieme aperto, insieme chiuso**

Un insieme di punti del piano si dice:

- **aperto**, se ogni suo punto è *interno;*
- **chiuso**, se il suo complementare è aperto.

ESEMPIO

Un poligono è un insieme **chiuso**.
Un poligono privato dei lati è un insieme **aperto**.

# Il limite per una funzione in due variabili

**DEFINIZIONE**

**Limite finito per $P$ tendente a $P_0$**

Data una funzione $z = f(x; y)$, di dominio $D$, e un punto $P_0(x_0; y_0)$ di accumulazione per $D$,
si dice che la funzione ammette limite finito $l$ per $P(x;y)$ tendente a $P_0(x_0;y_0)$ e si scrive

$$\lim_{P \to P_0} f(x;y) = l \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = l$$

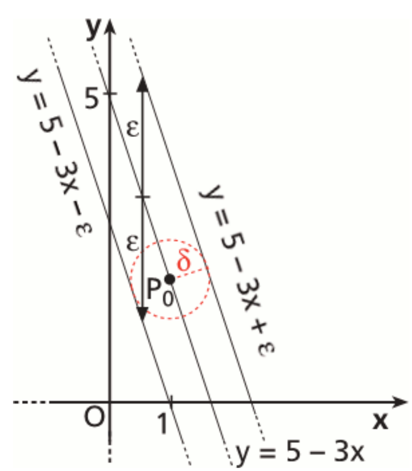
se, fissato arbitrariamente un numero positivo e , si può determinare un intorno circolare di $P_0$, di raggio d dipendente da e, per ogni punto del quale, escluso $P_0$, sia $|f(x;y) - l| < \varepsilon$ .

**ESEMPIO**

Verifichiamo che: $\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (3x + y) = 5$ .

Cerchiamo, per ogni e , un intorno circolare di (1;2) in cui $| 3x + y | <$ e .

Ossia: 5 – e < $3x + y$ < 5 + e ,
5 – $3x$ – e < $y$ < 5 – $3x$ + e .




La disequazione rappresenta lo spazio compreso tra le due rette esterne, che comprende un intorno circolare di (1;2).

# Il limite per una funzione in due variabili

**DEFINIZIONE**

**Limite infinito per *P* tendente a $P_0$**
Data una funzione $z = f(x; y)$, di dominio *D*, e un punto $P_0(x_0; y_0)$ di accumulazione per *D*,
si dice che la funzione ammette limite infinito per $P(x; y)$ tendente a $P_0(x_0; y_0)$ e si scrive

$$\lim_{P \to P_0} f(x;y) = \infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = \infty$$

se, fissato arbitrariamente un numero positivo *M*, si può determinare un intorno circolare di $P_0$, di raggio d dipendente da *M*, per ogni punto del quale, escluso $P_0$, sia $|f(x; y)| > M$ .

**DEFINIZIONE**

**Limite finito per *P* tendente a *infinito***
Data una funzione $z = f(x; y)$, di dominio *D* illimitato,
si dice che la funzione ammette limite finito *l* per $P(x; y)$ tendente a e si scrive

$$\lim_{P \to \infty} f(x;y) = l \quad \text{oppure} \quad \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(x;y) = l$$

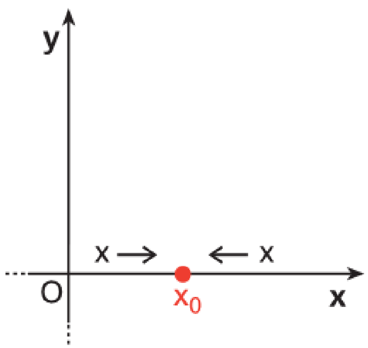
se, fissato arbitrariamente un numero positivo e , si può determinare un intorno circolare di $P_0$, di raggio d dipendente da e, tale che per tutti i punti di *D esterni* ad esso risulti

$$|f(x;y) - l| < \varepsilon .$$

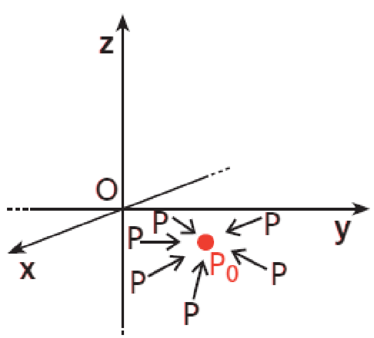
# Il limite per una funzione in due variabili

**Limite destro e limite sinistro?**

Nell'asse reale, un punto $x_0$ divide i propri intorni in due parti.
Si possono definire i limiti destro e sinistro di una funzione intorno a $x_0$.




Nel piano, il punto $P_0(x_0; y_0)$ non divide l'intorno.
I limiti destro e sinistro non hanno senso.




DEFINIZIONE

**Funzione continua**

Una funzione $z = f(x; y)$ definita in un insieme $D$ si dice continua in un punto $P_0(x_0; y_0)$, appartenente a $D$ e di accumulazione per $D$ stesso,
se esiste finito il $\lim_{P \to P_0} f(x; y)$ e se tale limite è uguale al valore assunto dalla funzione in $P_0$.
Scriviamo: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0)$.

ESEMPIO

$z = \dfrac{x+y}{x-y}$ è continua per $x \neq y$ .

# Ricerca del dominio

**ESERCIZIO GUIDA**

**Determiniamo il dominio della funzione:**

$$z = \frac{\sqrt{\ln(x^2+y^2-15)} + 7x^2 - 6x}{\sqrt{x^2-y^2-1}}.$$

Dobbiamo imporre che siano contemporaneamente verificate le seguenti condizioni:

- il denominatore diverso da 0;
- il radicando al numeratore maggiore o uguale a 0;
- l'argomento del logaritmo maggiore di 0;
- il radicando al denominatore maggiore oppure uguale a 0.

Otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-y^2-1} \neq 0 & \rightarrow \; x^2-y^2-1 \neq 0 \\ \ln(x^2+y^2-15) \geq 0 \\ x^2+y^2-15 > 0 \\ x^2-y^2-1 \geq 0 \end{cases}$$

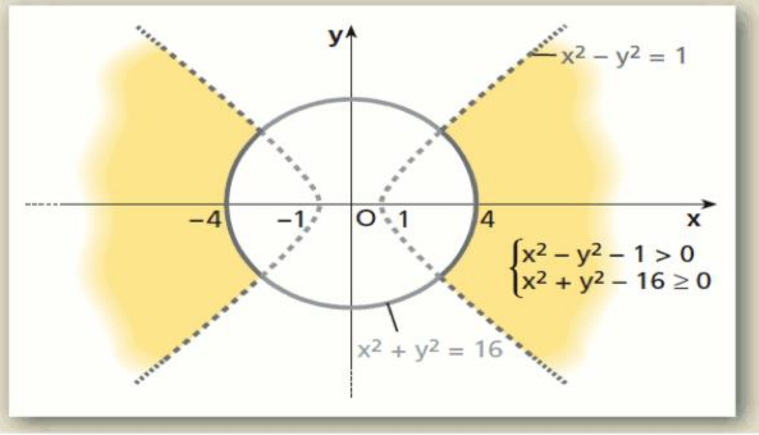
Considerando la prima e l'ultima condizione contemporaneamente e ricordando che $\ln a \geq 0$ per $a \geq 1$, il sistema si riduce a:

$$\begin{cases} x^2-y^2-1 > 0 \\ x^2+y^2-15 \geq 1 \\ x^2+y^2-15 > 0 \end{cases}$$

Osserviamo che la seconda e la terza disequazione sono entrambe vere soltanto se il primo membro è maggiore o uguale a 1:

$$\begin{cases} x^2-y^2-1 > 0 \\ x^2+y^2-15 \geq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2-y^2-1 > 0 \\ x^2+y^2-16 \geq 0 \end{cases}$$

Il dominio della funzione è rappresentato da tutti i punti del piano della parte colorata della figura.



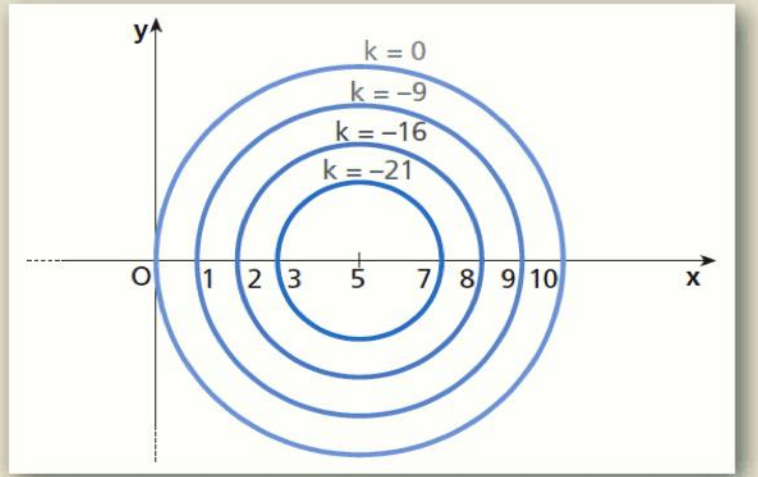
# Rappresentazione delle linee di livello

**ESERCIZIO GUIDA**

**Studiamo l'andamento delle linee di livello della funzione $z = x^2 + y^2 - 10x$ e rappresentiamone alcune.**

Sezioniamo la superficie con piani paralleli al piano $Oxy$, cioè con piani di equazione $z = k$, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 10x \\ z = k \end{cases}$$




Le sezioni ottenute hanno equazioni $k = x^2 + y^2 - 10x$, una per ogni valore di $k$. Le linee di livello, al variare di $k$, sono le circonferenze $x^2 + y^2 - 10x - k = 0$ di centro $C(5; 0)$ e raggio $r = \sqrt{25 + k}$. Se, per esempio, sezioniamo con il piano $z = -16$, otteniamo la circonferenza $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$, che è di centro $C(5;\ 0)$ e raggio $r = \sqrt{25 - 16} = 3$. In figura abbiamo rappresentato alcune linee di livello e i corrispondenti valori di $k$.

Dalla relazione $r = \sqrt{25 + k}$ si ricava $25 + k \geq 0$, quindi $k \geq -25$. Per $k = -25$ si ha il punto $(5; 0)$. Le linee di livello non esistono se $k < -25$.

# Verifica di un limite

**ESERCIZIO GUIDA**

**Verifichiamo, applicando la definizione:**

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \frac{x^3 + xy^2}{x} = 2.$$

Raccogliamo $x$ a fattor comune e dividiamo per $x \neq 0$:

$$\frac{x^3 + xy^2}{x} = \frac{\cancel{x}(x^2 + y^2)}{\cancel{x}} = x^2 + y^2.$$

Dobbiamo mostrare che esiste un intorno circolare di $P_0(1; 1)$ tale che:

$$|x^2 + y^2 - 2| < \varepsilon.$$

Sviluppiamo i calcoli:

$$|x^2 + y^2 - 2| < \varepsilon \rightarrow -\varepsilon < x^2 + y^2 - 2 < \varepsilon \rightarrow$$
$$\rightarrow 2 - \varepsilon < x^2 + y^2 < 2 + \varepsilon.$$

La doppia disuguaglianza è verificata in tutta la parte di piano compresa nella corona circolare delimitata dalle circonferenze $x^2 + y^2 = 2 - \varepsilon$ e $x^2 + y^2 = 2 + \varepsilon$, e quindi in qualsiasi intorno circolare di $P_0$ di raggio minore o uguale alla distanza di $P_0$ da ciascuna circonferenza (figura $b$).