Curve e lunghezza di una curva

Definizione 1

Si chiama curva il luogo geometrico dello spazio di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

descritto da punto p, $\forall t \in [a,b]$ chiuso e limitato.

Definizione 2

Si dice che il luogo C è una curva semplice e regolare se sono verificate le seguenti tre condizioni:

1. Le funzioni $x(t), y(t), z(t)$ sono derivabili in tutto l'intervallo [a,b] e le loro derivate sono ivi continue;
2. Le tre derivate $x'(t), y'(t), z'(t)$ non sono mai simultaneamente nulle;
3. Non accade mai che per due valori distinti t', t'' del parametro t si ottenga lo stesso punto p di C, cioè non possono mai risultare contemporaneamente per $t' \neq t''$ soddisfatte le tre relazioni:
$$x(t') = x(t''), y(t') = y(t''), z(t') = z(t'')$$

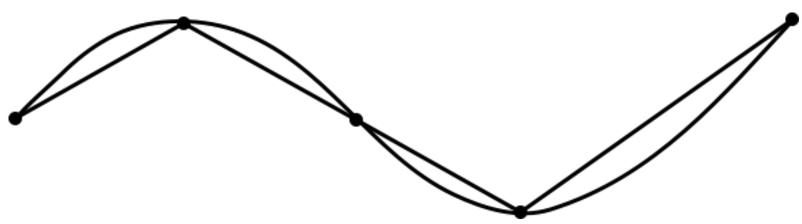
Se sono verificate queste condizioni, si dice che le equazioni scritte sopra costituiscono una rappresentazione parametrica regolare della curva C. L'intervallo [a,b] in cui varia il parametro t si chiama intervallo base della curva C.

Definizione 3

Una curva si dice regolare a tratti se è continua e si può dividere l'intervallo [a,b] in un numero finito di intervalli in ognuno dei quali la curva è regolare.

Lunghezza di una curva

Una curva nel piano può essere approssimata collegando un limitato numero di punti sulla curva e utilizzando segmenti di linea per creare un percorso poligonale . Poiché è facile calcolare la lunghezza di ogni segmento lineare (utilizzando il teorema di Pitagora nello spazio euclideo, per esempio), la lunghezza totale della approssimazione può essere trovata sommando le lunghezze di ciascun segmento lineare



La somma delle lunghezze dei segmenti è la lunghezza del "cammino poligonale". La lunghezza del segmento sarà definita come la distanza tra i due estremi.

La lunghezza della curva è il più piccolo numero che la lunghezza del cammino poligonale non può superare, ovvero è l'estremo superiore della lunghezza del cammino della poligonale, al variare delle poligonali

Definizione 4

Sia $\gamma: [a, b] \to R$ una curva continua, si consideri una partizione $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ dell'intervallo $[a, b]$. La poligonale P, inscritta nel sostegno della curva e di vertici $\gamma(a), \gamma(t_1), \dots, \gamma(b)$ ha (per definizione) lunghezza pari a:

$$l(P) = \sum_{1=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

Si definisce lunghezza della curva γ il valore:

$$L(\gamma) = \sup_{P} l(P)$$

dove P rappresenta tutte le possibili poligonali inscritte.

Definizione 5

Una curva γ si dice rettificabile se

$$L(\gamma) = \sup_{P} l(P)$$

assume un valore finito

Teorema

Se $\gamma: [a, b] \to R^n$ è una curva di classe C^1 allora essa è rettificabile e la sua lunghezza $L(\gamma)$ è data dall'integrale:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

dove $\|v\|$ rappresenta la norma euclidea di un generico vettore v.

La forma

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

può anche essere espressa come:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

In particolare, se γ è una curva piana rappresentata, nell'intervallo [a,b] dall'equazione $y = f(x)$, con $f(x)$ continua con la sua derivata prima, la lunghezza $L(\gamma)$ è espressa da:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

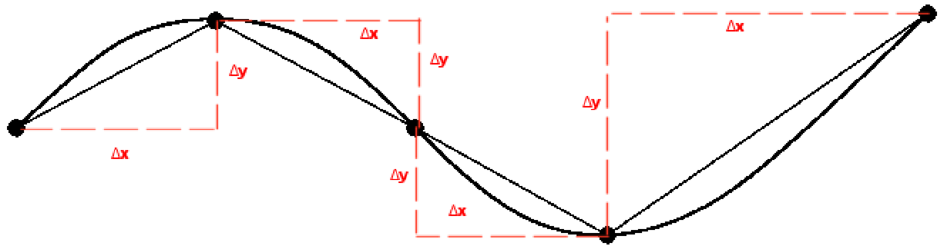
Infine, se la curva γè rappresentata, nell'intervallo $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ dall'equazione polare

$$\rho = \rho(\theta)$$

con $\rho(\theta)$ continua con la sua derivata prima, allora si ha:

$$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta$$

Dimostrazione



Supponiamo che esista una curva rettificabile data da una funzione $f(x)$. Per approssimare la lunghezza dell'arco S tra due punti possiamo costruire una serie di triangoli rettangoli come mostrato in figura. Per comodità, le basi di tutti i triangoli possono essere posti uguali a Δx, in modo che ad ognuno di essi sia associato un Δy . La lunghezza di ogni ipotenusa è data dal teorema di Pitagora:

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

La somma delle lunghezze delle n ipotenuse approssima S :

$$S \sim \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

Moltiplicando il radicando da $\Delta x^2 / \Delta x^2$ produce:

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)\frac{\Delta x^2}{\Delta x^2}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}\Delta x = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\ \Delta x$$

Poi, il nostro risultato precedente diventa:

$$S \sim \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ \Delta x_i$$

Se la lunghezza Δx di questi segmenti viene presa sempre più piccola, l'approssimazione migliora. Il limite dell'approssimazione, quando Δx va a zero, è pari a S:

$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\ \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

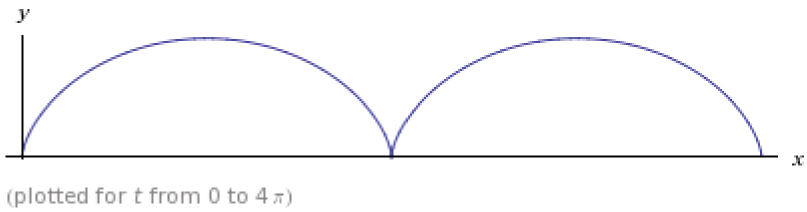
Si può dimostrare che tale lunghezza non dipende né dagli assi di riferimento né dalla particolare rappresentazione parametrica ma dipende soltanto dalla curva γ.

Es.1

Calcolare la lunghezza dell'arco di cicloide ordinaria:

$$\boldsymbol{x = r(t - sint), y = r(1 - cost)}$$

che ha per estremi i punti corrispondenti a $\boldsymbol{t = 0}$ e $\boldsymbol{t = 2\pi}$



Si ha:

$$x' = r(1 - cost), \quad y' = r \cdot sint$$

e quindi:

$$x'^2 + y'^2 = r^2(1 - 2cost + cos^2t + sin^2t) = r^2(1 - 2cost + 1) = 2r^2(1 - cost) = 4r^2\frac{(1 - cost)}{2}$$

Da qui segue:

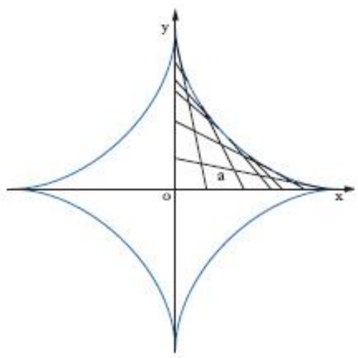
$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = 2r\sqrt{\frac{(1 - cost)}{2}} = 2r \cdot sin\frac{t}{2}$$

Per la lunghezza della curva si ha:

$$\boldsymbol{L(\gamma)} = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \int_0^{2\pi} 2r \cdot sin\frac{t}{2}dt = 4r\left[-cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = \boldsymbol{8r}$$

Es.2

Calcolare la lunghezza dell'asteroide.



L'equazione cartesiana dell'asteroide è

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

Da essa si ricava:

$$y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Da cui:

$$y'=\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)$$

e quindi:

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)x^{-\frac{2}{3}}}=a^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$$

Ne segue che:

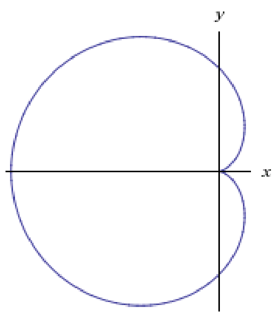
$$L=4\int_0^a a^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}dx=4a^{\frac{1}{3}}\cdot\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_0^a=6a$$

Es.3

Calcolare la lunghezza della cardioide.

L'equazione polare della cardioide è:

$$\rho=2a(1+cos\theta)$$



(plotted for t from 0 to 2π)

$$\rho'=-2a\cdot sin\theta$$

$$\rho^2+\rho'^2=4a^2\cdot(1+2cos\theta+cos^2\theta+sin^2\theta)=8a^2(1+cos\theta)=16a^2\cdot cos\frac{\theta}{2}$$

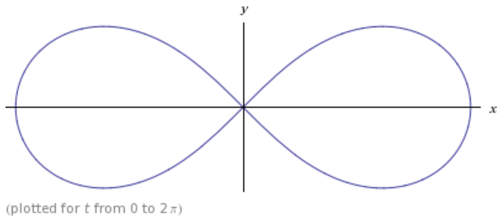
Pertanto la lunghezza L della cardioide è data da:

$$L=\int_0^{\pi}4a\cdot cos\frac{\theta}{2}d\theta=16a\int_0^{\pi}cos\frac{\theta}{2}d\left(\frac{\theta}{2}\right)=16a\left[sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=16a$$

Es.4

Calcolare la lunghezza L della lemniscata di Bernoulli la cui equazione in coordinate polari è:

$\boldsymbol{\rho^2 = 2a^2 cos2\theta}$.



Applicando la formula

$$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta$$

si ha:

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2a^2 cos2\theta + 2a^2 \frac{sin^2 2\theta}{cos2\theta}} d\theta = 4\sqrt{2}a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{cos2\theta}} d\theta$$

L'integrale si risolve per sostituzione:

$\sqrt{cos2\theta} = cost$ da cui $cos2\theta = cos^2 t$ e $sin2\theta d\theta = cost \cdot sintdt$

$$d\theta = \frac{cost \cdot sint}{\sqrt{1 - cos^2 2\theta}} dt = \frac{cost \cdot sint}{\sqrt{sin^2 t(1 + cos^2 t)}} dt = \frac{cost}{\sqrt{1 + cos^2 t}} dt$$

Ottenendo così:

$$L = 4\sqrt{2}a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{cost} \cdot \frac{cost}{\sqrt{1 + cos^2 t}} dt = 4\sqrt{2}a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2 - sin^2 t}} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} sin^2 t}} dt$$

Si tratta di un integrale ellittico la cui risoluzione si omette che ci fornisce, in definitiva:

$$L = 2a\pi \left[1 + \left(\frac{1}{2}k\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^2\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}k^3\right)^2 + \cdots \right]$$

con $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Esercizi proposti

1	Determinare la lunghezza dell'arco di curva di equazione $y = 2\sqrt{7x^3}$ situato nel primo quadrante degli assi e compreso tra i punti corrispondenti alle ascisse $x = 0, x = 1$.	$\boldsymbol{\frac{146}{27}}$
2	Determinare la lunghezza dell'arco di curva di equazione $y = (x - 2)^3$ compreso tra i punti (2,0) e (6,8)	

3	Le equazioni parametriche di una curva piana sono: $\begin{cases} x = 50(1-cost)+50(2-t)sint \\ 50sint+50(2-t)cost \end{cases}$ Trovare la lunghezza dell'arco di curva che ha per estremi i punti corrispondenti a t=0 e t=2	**100**
4	Trovare la lunghezza dell'arco di curva $y = a \cdot log\left(\frac{a^2}{a^2-x^2}\right)$ compreso tra l'origine delle coordinate ed il punto di ascissa x=a/2.	
5	Trovare la lunghezza dell'arco di curva $y = log\frac{e^x+1}{e^x-1}$ compresa tra i punti di ascissa x=1 e x=2.	**$\log(e+e^{-1})$**
6	Trovare la lunghezza dell'arco di curva $\rho = a \cdot sin^3\frac{\theta}{3}$ con $\theta \in [0, 3\pi]$.	$\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi a}$
7	Calcolare la lunghezza di quell'arco di curva esponenziale $y = e^x$ che ha per estremi i punti con le ascisse 0 e a>0.	
8	Trovare la lunghezza dell'arco di curva di equazioni: $\begin{cases} x = a(t - sint \cdot cost) \\ y = 4a \cdot sint \end{cases}$ $con\ t \in [0, \pi]$	$\boldsymbol{3\pi a}$
9	Trovare la lunghezza del cappio della curva di equazione $\begin{cases} x = 4t^3 - 3t \\ y = 6t^2 \end{cases}$	$\boldsymbol{6\sqrt{3}}$
10	Trovare la lunghezza dell'arco di curva: $\begin{cases} x = e^t sint \\ y = e^t cost \end{cases}$ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\boldsymbol{\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)}$
11	Trovare la lunghezza dell'arco di curva: $\begin{cases} x = \frac{3t-t^3}{4} - \frac{3t}{t^2+1} \\ y = \frac{3t^2-1}{4} + \frac{3}{t^2+1} \end{cases}$ $t \in [0,2]$	$\boldsymbol{\frac{7}{2} - 3arctg2}$
12	Data la spirale di Archimede: $\rho = a\theta$ con $a > 0$, si determini la lunghezza dell'arco che ha per estremi i punti di anomalia 0 e $\pi/6$.	
13	Trovare la lunghezza dell'arco della curva dello spazio di equazione: $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ z = \frac{1}{8}logx \end{cases}$ avente per estremi i punti $P(1,1,0)$, $Q(e, \sqrt{e}, \frac{1}{8})$	**3-7/8**
14	Trovare la lunghezza dell'arco di elica circolare: $\begin{cases} \boldsymbol{x = r \cdot cost} \\ \boldsymbol{y = r \cdot sint} \\ \boldsymbol{z = kt} \end{cases}$ avente per estremi due punti consecutivi posti su una medesima generatrice	

15	Trovare la lunghezza dell'arco di curva $y = sinx$ che corrisponde a un periodo	
16	Trovare la lunghezza dell'arco di curva: $$\rho(\theta) = 1 - cos\theta$$ con $\theta \in [0, 2\pi]$	**8**
17	Trovare la lunghezza dell'arco di curva: $$\begin{cases} \boldsymbol{x = t} \\ \boldsymbol{y = log(cost)} \end{cases} \quad \boldsymbol{t} \in \left[\boldsymbol{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{4}}\right]$$	**arcsinh1**
18	Trovare la lunghezza dell'arco di curva: $$\begin{cases} \boldsymbol{x = t} \\ \boldsymbol{y = t^2 - 1} \end{cases} \quad \boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{3}]$$	
19	Trovare la lunghezza dell'arco di curva: $$\begin{cases} \boldsymbol{x = t} \\ \boldsymbol{y = e^{-t}} \end{cases} \quad \boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$$	
20	Trovare la lunghezza dell'arco di curva: $$y = \sqrt{x}$$ con $x \in [0,1]$	

Integrali curvilinei

Definizione 1

Sulla curva γ di rappresentazione parametrica $\varphi: [a, b] \rightarrow R^n$ si fissa un orientamento (o verso di percorrenza) ordinando i punti in modo tale che il punto $P_1 = \varphi(t_1)$ precede il punto $P_2 = \varphi(t_2)$ nel verso delle t crescenti, se $t_1 < t_2$.

Definizione 2

Siano γ una curva regolare di R^n, $\varphi: [a, b] \rightarrow R^n$ una sua rappresentazione parametrica esi consideri una funzione continua sul sostegno della curva:

$$f: \Gamma = \varphi([a, b]) \subset D \subseteq R^n \rightarrow R$$

L'integrale:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt$$

prende il nome di integrale curvilineo della funzione f esteso alla curva γ e si denota anche col simbolo

$$\int_\gamma fds$$

Dalla definizione di integrale curvilineo, risulta che, se γ è una curva di rappresentazione parametrica:

$$\varphi: [a, b] \rightarrow (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \in R^3$$

si ha:

$$\int_\gamma f(x, y, z)ds = \int_a^b f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \sqrt{[\varphi_1'(t)]^2 + [\varphi_2'(t)]^2 + [\varphi_3'(t)]^2} dt$$

Se la curva γ è data dalla rappresentazione parametrica in coordinate polari:

$$\gamma: \rho = \rho(t), \theta = \theta(t), t \in [a, b]$$

allora

$$ds = \sqrt{[\rho'(t)]^2 + \rho^2(t)[\theta'(t)]^2}dt$$

e la formula per il calcolo dell'integrale curvilineo diventa:

$$\int_\gamma f(x, y, z)ds = \int_a^b f(\rho(t)cos\theta(t), \rho(t)sin\theta(t))\sqrt{[\rho'(t)]^2 + \rho^2(t)[\theta'(t)]^2}dt$$

Quando la curva γ è data attraverso la rappresentazione esplicita in coordinate polari:

$$\gamma: \rho = \rho(\theta), \ \ \theta \in [a, b]$$

l'arco elementare è

$$ds = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta$$

e l'integrale curvilineo diventa:

$$\int_\gamma f(x, y, z)ds = \int_a^b f(\rho cos\theta, \rho sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta$$

ES. 1

Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_\gamma \boldsymbol{xds}$$

dove

$$\boldsymbol{\gamma}: \begin{cases} \boldsymbol{x = t} \\ \boldsymbol{y = t^2} \end{cases}, \ \ \boldsymbol{t \in [0, a], con\, a \geq 0}$$

La funzione $f(x, y) = x$ è definita in R^2. Quindi il sostegno di $\gamma: [0, a] \to R^2$ è contenuto all'interno del dominio di f. la curva γ è regolare. Infatti è derivabile con derivata continua $\forall t \in (0, a)$. Inoltre, $\forall t \in [0, a]$ si ha che:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

Si ha, dunque:

$$\int_\gamma xds = \int_0^a t\sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \left[\frac{1}{12}(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{1}{12}[(1 + 4a^2)^{\frac{3}{2}} - 1]$$

Es. 2

Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{y^2 ds}$$

dove

$$\boldsymbol{\gamma(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{x = t} \\ \boldsymbol{y = e^t} \end{cases} \boldsymbol{t \in [0, log2]}$$

La funzione $f(x,y) = y^2$ è definita su R^2. Quindi il sostegno di $\gamma: [0, log2] \to R^2$ è contenuto all'interno del dominio di f. La curva γ è regolare. Infatti è derivabile con derivata continua:

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x' = 1 \\ y' = e^t \end{cases}$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + e^{2t}}$$

Dunque segue che:

$$\int_{\gamma} y^2 ds = \int_0^{log2} e^{2t} \sqrt{1 + e^{2t}} dt = \left[\frac{1}{3}(1 + e^{2t})^{\frac{3}{2}}\right]_0^{log2} = \frac{1}{3}\left[\left(1 + e^{2log2}\right)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{3}$$

ES. 3

Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{\frac{1}{x} ds}$$

dove

$$\boldsymbol{\gamma(t)}: \begin{cases} \boldsymbol{x = t} \\ \boldsymbol{y = t \cdot logt} \end{cases} \quad \boldsymbol{t \in [1, 2]}$$

La funzione $f(x,y) = \frac{1}{x}$ è definita su $\{(x,y) \in R^2 : x \neq 0\}$. La curva $\gamma: [1,2] \to R^2$ ha sostegno contenuto all'intero dominio di f. La curva γ è regolare. Infatti derivabile con derivata continua:

$$\gamma'(t): \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 1 + logt \end{cases}$$

Inoltre:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + (1 + logt)^2}$$

Quindi, l'integrale curvilineo è:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{x} ds = \int_1^2 \frac{1}{t}\sqrt{1 + (1 + logt)^2} dt = \int_1^{1+log2} \sqrt{1 + z^2} dz$$

avendo posto $z = 1 + logt$ da cui $dz = \frac{1}{t} dt$.

Per calcolare l'integrale $\int \sqrt{1 + z^2} dz$ poniamo $z = sinhu$ da cui $u = settsinhz, z = log\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right)$ e $dz = coshu \cdot du$.

Pertanto si ha che:

$$\int \sqrt{1+z^2}dz = \int cosh^2u \cdot du = \frac{1}{2}(u + sinhucoshu) + c = \frac{1}{2}\left[z\sqrt{1+z^2} + log\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)\right] + c$$

Segue, dunque che:

$$\int_1^{1+log2} \sqrt{1+z^2}dz = \frac{1}{2}\left[z\sqrt{1+z^2} + log\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)\right]_1^{1+log2}$$
$$= \frac{1}{2}log\left(1+log2+\sqrt{1+(1+log2)^2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}log\left(1+\sqrt{2}\right)$$

ES. 4

Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\boldsymbol{\int_\gamma \frac{1}{y}ds}$$

dove

$$\boldsymbol{\gamma(t)\colon \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{8}{5}\right]}$$

La curva è regolare. Infatti è derivabile con derivata continua:

$$\gamma'(t)\colon \begin{cases} x'(t) = 2t \\ y'(t) = 3t^2 \end{cases}$$

Inoltre, $\forall t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{8}{5}\right]$, si ha che:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = t\sqrt{4+9t^2}$$

Quindi l'integrale curvilineo è:

$$\int_\gamma \frac{1}{y}ds = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{8}{5}} \frac{1}{t^3} t\sqrt{4+9t^2}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{8}{5}} \frac{\sqrt{4+9t^2}}{t^2}dt$$

Risolvendo per parti l'ultimo integrale, si ha che:

$$\int \frac{\sqrt{4+9t^2}}{t^2}dt = -\frac{\sqrt{4+9t^2}}{t} + 9\int \frac{1}{\sqrt{4+9t^2}}dt = -\frac{\sqrt{4+9t^2}}{t} + settsinh\left(\frac{3}{2}t\right)$$

Dunque segue che:

$$\int_\gamma \frac{1}{y}ds = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{8}{5}} \frac{\sqrt{4+9t^2}}{t^2}dt = \left[-\frac{\sqrt{4+9t^2}}{t} + settsinh\left(\frac{3}{2}t\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{8}{5}} = \frac{7}{4} + settsinh\left(\frac{12}{5}\right) - 3settsinh\left(\frac{3}{4}\right)$$

ES. 5

Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \sqrt{1-y^2}ds$$

dove

$$\gamma:\begin{cases} x = sint \\ y = cost \end{cases} \quad t \in [0,\pi]$$

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua:

$$y'(t):\begin{cases} x'(t) = cost \\ y'(t) = sint \end{cases} \quad t \in]0,\pi[$$

Inoltre, $\forall t \in [0,\pi]$, si ha che:

$$f(\gamma(t)) = \sqrt{cos^2t + sin^2t} = 1$$

Quindi, l'integrale curvilineo è uguale a:

$$\int_0^\pi sintdt = [-cost]_0^\pi = 2$$

ES.6

Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \sqrt{x^2-y^2}ds$$

dove

$$\gamma:\begin{cases} x = 2(cost + tsint) \\ y = 2(sint - tcost) \end{cases} \quad t \in [0,2\pi].$$

La curva γ è regolare. Infatti, è derivabile con derivata continua:

$$\gamma'(t):\begin{cases} x'(t) = 2t \cdot cost \\ y'(t) = 2t \cdot sint \end{cases} \quad t \in]0,2\pi[$$

Inoltre,

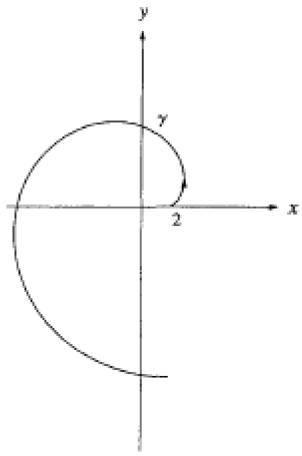
$$f(\gamma(t)) = 2\sqrt{1+t^2}$$

e

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2cos^2t + 4t^2sin^2t} = 2t$$

Quindi, l'integrale curvilineo è:

$$\int_0^{2\pi} 4t\sqrt{1+t^2}dt = \left[\frac{4}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\left[(1+4\pi)^{\frac{3}{2}}-1\right]$$



La rappresentazione della curva parametrizzata e del verso di percorrenza sono indicati nella figura a lato

ES.7

Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{\boldsymbol{y}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2-y^2}}}\boldsymbol{ds}$$

dove

$$\boldsymbol{\gamma(t)}:\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = cos^3t} \\ \boldsymbol{y(t) = cos^2t \cdot sint} \end{cases} \quad \boldsymbol{t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$$

La curva γ è regolare. Infatti è derivabile con derivata continua:

$$\gamma'(t):\begin{cases} -3sint \cdot cos^2t \\ -2cost \cdot sin^2t + cos^3t \end{cases}$$

Inoltre, $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, si ha che:

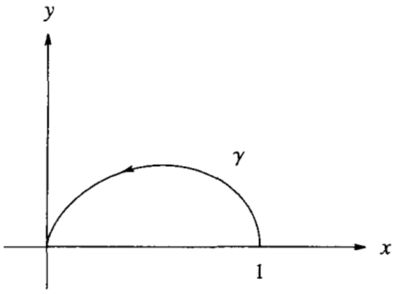
$$f(\gamma(t)) = \frac{cos^2t \cdot sint}{\sqrt{cos^6t + cos^4t \cdot sin^2t}} = sint$$

e

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9sin^2t \cdot cos^4t + (-2cost \cdot sin^2t + cos^3t)^2} = cost\sqrt{4-3cos^2t}$$

Quindi l'integrale curvilineo è:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sint \cdot cost\sqrt{4-3cos^2t}dt = \frac{1}{9}\left[(4-3cos^2t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{9}$$



La rappresentazione della curva parametrizzata e del verso di percorrenza sono indicati nella figura a lato

ES.8

Calcolare l'integrale curvilineo di $f(x, y) = x + y$ lungo la curva γ, parametrizzazione del triangolo di vertici A(1,0), O(0,0), B(0,1).

La curva γ che parametrizza il bordo del triangolo di vertici siffatti è regolare a tratti. Siano $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ le curve che parametrizzano rispettivamente i lati OA, AB e BO. Dunque si ha che:

$$\int_\gamma f \cdot ds = \int_{\gamma_1} f \cdot ds + \int_{\gamma_2} f \cdot ds + \int_{\gamma_3} f \cdot ds$$

dove:

$$\gamma_1 : [0,1] \to R^2 \qquad \gamma_1(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\gamma_2 : [0,1] \to R^2 \qquad \gamma_2(t) = \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases}$$

$$\gamma_3 : [0,1] \to R^2 \qquad \gamma_3(t) = \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \end{cases}$$

Le curve $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono regolari. Infatti sono derivabili con derivata continua.

Inoltre, $\forall t \in [0,1]$, si ha che:

$$f(\gamma_1(t)) = f(t, 0) = t \qquad \|\gamma_1'(t)\| = 1$$

$$f(\gamma_2(t)) = f(1 - t, t) = 1 \qquad \|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{2}$$

$$f(\gamma_3(t)) = f(0, 1 - t) = 1 - t \qquad \|\gamma_3'(t)\| = 1$$

Dunque, l'integrale curvilineo è:

$$\int_\gamma f \cdot ds = \int_{\gamma_1} f \cdot ds + \int_{\gamma_2} f \cdot ds + \int_{\gamma_3} f \cdot ds = \int_0^1 t dt + \sqrt{2} \int_0^1 dt + \int_0^1 (1 - t) dt = 1 + \sqrt{2}$$

Calcolare i seguenti integrali curvilinei

1	$\int_\gamma xds$	$\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{2}{3}t\sqrt{t} \end{cases} \quad t \in [0,1]$	$\boldsymbol{\frac{4}{15}(1+\sqrt{2})}$
2	$\int_\gamma \sqrt{z}ds$	$\gamma: \begin{cases} x = cost \\ y = sint \\ z = t^2 \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$	
3	$\int_\gamma \pi(1-x^2)ds$	$\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases} \quad t \in [0,1]$	$\boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}$
4	$\int_\gamma \frac{y}{\sqrt{1+4x^2}}ds$	$\gamma: \begin{cases} x = t^2 \\ y = logt \end{cases} \quad t \in [1,2]$	$\boldsymbol{\frac{log^2 2}{2}}$
5	$\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}ds$	$\gamma: \begin{cases} x = tcost \\ y = tsint \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$	
6	$\int_\gamma \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}ds$	$\gamma: \begin{cases} x = tcost \\ y = tsint \end{cases} \quad t \in [0,4\pi]$	$\boldsymbol{4\pi}$
7	$\int_\gamma \frac{2x+y+z}{(x+1)\sqrt{1+4x^2y^2+x^4}}ds$	$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \frac{1}{t} \end{cases} \quad t \in [1,2]$	
8	$\int_\gamma (z+1)\sqrt{x^2+y^2+2}ds$	$\gamma: \begin{cases} x = cost \\ y = sint \\ z = t \end{cases} \quad t \in [-2,0]$	**0**
9	$\int_\gamma \frac{y^2}{x^2+y^2}ds$	$\gamma: \begin{cases} x = Rcost \\ y = Rsint \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$	$\boldsymbol{\pi R}$
10	$\int_\gamma xyds$	γ è il quadrato di vertici (2,0), (0,2), (-2,0), (0,-2)	**0**
11	$\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}ds$	γ è l'arco dell'iperbole $x^2-y^2=1$ dal punto (1,0) al punto (2, $\sqrt{3}$)	$\boldsymbol{2\sqrt{3}}$
12	$\int_\gamma yds$	$\gamma: \begin{cases} x = \sqrt{3}(t-sint) \\ y = \sqrt{3}(1-cost) \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$	**32**

13	$\int_{\gamma(Q',Q'')} \frac{(sin^2x)arctgx}{y^2(1+x^2)\sqrt{cos^2x+1}}ds$	$\gamma = grafico\ di\ sinx;\ Q',Q''\ punti\ di\ ascisse\ 0{,}1$	$\frac{\pi^2}{32}$
14	$\int_{\gamma(Q',Q'')} \frac{ylog^2x}{\sqrt{2x^2+1}}ds$	$\gamma = grafico\ di\ \sqrt{1+x^2};\ Q',Q''\ punti\ di\ ascisse\ 1,e$	$e-2$
15	$\int_{\gamma(Q',Q'')} \frac{ylog^2x(x+sinz-1)}{\sqrt{2x^2+1}}ds$	$\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1+t^2} \\ z = \pi/2 \end{cases} \quad t \in [1,e]$	$e-2$
16	$\int_{\gamma(Q',Q'')} \left(\sqrt[3]{x^2-1}\right) sin \sqrt[3]{y^2}ds$	$\gamma: \begin{cases} x = (1+t)\sqrt{1+t} \\ y = (\pi-t)\sqrt{\pi-t} \end{cases} \quad t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{3}{2}\sqrt{1+\pi}$
17	$\int_{\gamma(Q',Q'')} \frac{x+1}{(x+1)(3y+4)-y^2}ds$	γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1 privata dei punti situati nel III quadrante; $Q' = (1,0), Q'' = (0,1)$	$log\frac{4}{3}$

18	$\int_{\partial A} \frac{ylogx}{\sqrt{2x^2+1}} ds$	$A = rettangoloide\ di\ base\ [1,e]\ relativo\ alla\ funzione\ \sqrt{1+x^2}$	
19	$\int_{\gamma(Q',Q'')} \frac{x^2+e^{\sqrt[3]{y}}}{(x+2)^2\sqrt{x^2+9log^4x}} ds$	$\gamma: \begin{cases} x = e^t \\ y = t^3 \end{cases} \quad t \in [0, log2]$	$log\frac{4}{3} - \frac{1}{12}$
20	$\int_{\partial A} \frac{y}{x+2} ds$	$A = intersezione\ del\ semipiano\ y \geq 0\ con\ il\ cerchio\ di\ centro\ (0,0)\ e\ raggio\ 1$	$log3$
21	$\int_{\partial A} \frac{x^2+y^2}{3-y} ds$	$A = cerchio\ di\ centro\ (0,0)\ e\ raggio\ 1$	$\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$
22	$\int_{\gamma(Q',Q'')} \frac{xe^{arctg\frac{y}{x}}}{\sqrt{1+arctg^2\frac{y}{x}}} ds$	γ è la curva di equazione polare $\rho = \theta$, con $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$	
23	$\int_{\gamma(A,B)} \frac{y-x}{xy} ds$	$\gamma = retta\ passante\ per\ A = (2,5)\ e\ B = (3,6)$	$\sqrt{2\log\frac{5}{4}}$
24	$\int_{\gamma(Q',Q'')} \frac{ds}{(x+y^2)\sqrt{4x+1}}$	$\gamma = curva\ di\ equazione\ implicita\ x - (y-1)^2 = 0;\ Q^I = (1,0);\ Q^{II} = (0,1)$	$\frac{\pi}{2}$
25	$\int_{\gamma(Q',Q'')} \frac{ds}{(x+y)\sqrt{2+(x+y)(x+y-2)}}$	$\gamma = \begin{cases} x = \log\|t\| \\ y = t - \log\|t\| \end{cases} t\epsilon[-2,-1]\ ; Q^I, Q^{II}\ estremi\ di\ \gamma$	$-\frac{1}{2}$
26	$\int_{\gamma(Q',Q'')} \frac{arctan^2\frac{x}{y}}{\sqrt{arctan^2\frac{x}{y}+1}} ds$	$\gamma = curva\ di\ equazione\ polare\ \rho = \theta, \theta = [0,1];\ Q^I, Q^{II}\ estremi\ di\ \gamma$	$\frac{1}{3}$
27	$\int_{\gamma(Q',Q'')} \frac{x^2+9+6\log y}{(x-3)(log^2y+3)\sqrt{1+y^2}} ds$	$\gamma = grafico\ di\ e^x;\ Q^I, Q^{II} punti\ di\ \gamma\ di\ ascisse\ 1\ e\ 2$	$-\log 14$
28	$\int_{\gamma(Q',Q'')} \frac{ysen^2xcos^4\log y}{e^x\sqrt{1+e^{2x}}} ds$	$\gamma = grafico\ di\ e^x;\ Q^I, Q^{II}\ punti\ di\ \gamma\ di\ ascisse\ 0\ e\ 2\pi$	$\frac{\pi}{8}$
29	$\int_{\gamma(Q',Q'')} \frac{ds}{\sqrt{(4y^2-20y+26)x}}$	$\gamma: x = (y-2)(3-y);\ Q', Q''\ punti\ di\ \gamma\ di\ ascissa\ \frac{3}{16}$	$\frac{\pi}{3}$
30	$\int_{\gamma(Q',Q'')} \frac{xy(1+y)}{\sqrt{1+4y(1+y)^2}} ds$	$\gamma: \begin{cases} x = arctant \\ y = t^2 \end{cases} t \in [0, \sqrt{3}];\ Q', Q''\ estremi\ di\ \gamma$	$\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\log 2$
31	$\int_{\gamma(Q',Q'')} \frac{ds}{\sqrt{y(5-4y)}}$	$\gamma: 4x - y - 3 - x^2 = 0;\ Q', Q''\ punti\ di\ \gamma\ di\ ascisse\ 2\ e\ \frac{5}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
32			

Forme differenziali lineari

Sia $\Omega \subset R^3$ un insieme aperto e siano $A, B, C: \Omega \to R$ funzioni continue in Ω. Si definisce forma differenziale ω in Ω l'espressione

$$\omega = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$$

Data la curva orientata semplice e regolare γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in [a,b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

si chiama integrale della forma differenziale lineare (o anche integrale curvilineo di seconda specie), lungo la curva γ, il numero

$$\int_a^b (A(x(t), y(t), z(t))x'(t) + B\,(x(t), y(t), z(t))y'(t) + C(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt$$

Tale espressione viene anche indicata:

$$\int_\gamma \; A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)\,dz$$

o, anche

$$\int_\gamma \; \omega$$

Per una forma differenziale si possono definire le seguenti operazioni:

I – Dato un vettore $r(r_1, r_2)$ e un punto $(x,y) \in \Omega$, il prodotto scalare tra ω ed r è: $\omega \cdot r = A(x,y)r_1 + B(x,y)r_2$

II – dato uno scalare $c \in R$ ed una funzione definita in Ω e a valori in R, si definisce la moltiplicazione della forma differenziale c per f nel modo seguente: $c \cdot \omega = cXdx + cYdy$ e $f \cdot \omega = (fX)dx + (fY)dy$;

III – date due forme differenziali ω_1 e ω_2 si definisce addizione di ω_1 e ω_2 la seguente forma:

$$\omega_1 + \omega_2 = (X_1 dx + Y_1 dy) + (X_2 dx + Y_2 dy) = (X_1 + X_2)dx + (Y_1 + Y_2)dy$$

Teorema

La formula

$$\int_a^b (A(x(t), y(t), z(t))x'(t) + B\,(x(t), y(t), z(t))y'(t) + C(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt$$

non dipende dalla parametrizzazione della curva orientata semplice e regolare γ ma dipendono dall'orientazione della curva stessa.

Nel caso di una curve orientata, semplice regolare γ, poiché γ si può considerare come l'unione di curve regolari $\gamma_1, \ \gamma_2, \ \dots, \ \gamma_n$, l'integrale della forma differenziale esiste anche in questo caso e si ha:

$$\int_\gamma \; \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \; \omega + \cdots + \int_{\gamma_n} \omega$$

Nel fare gli integrali curvilinei delle forme differenziali occorre prestare molta attenzione all'orientamento della curva. Per questo motivo, gli integrali curvilinei delle forme differenziali sono detti integrali orientati.

Definizione di forma differenziale esatta

Una forma differenziale $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i$ definita in un aperto $A \subset R^n$ si dice esatta se è il differenziale di qualche funzione, in altre parole, se esiste una funzione detta primitiva della forma ω:

$$f: A \to R$$

di classe C^1 tale che:

$$\omega = df$$

o più esplicitamente se $\forall x \in A$:

$$a_k(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}, \ \forall k = 1,2, \dots, n$$

Definizione di forma differenziale chiusa

Una forma differenziale $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i$ definita in un aperto $A \subset R^n$ e di classe $C^1(A)$, si dice chiusa se verifica la seguente relazione:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$$

Osservazione

Se una forma differenziale di classe C^1 è esatta, allora è chiusa; in generale non vale il viceversa. La condizione di essere chiusa, senza opportune ipotesi sul dominio della forma differenziale, non assicura che la forma sia esatta.

Un particolare tipo di insieme ci permette di stabilire alcune importanti proprietà per le forme differenziali, se definite su questi insiemi. Si tratta degli **insiemi connessi.**

Caratterizzazione delle forme differenziali esatte

Dato un aperto connesso $A \subset R^2$ e data una forma differenziale lineare ω di classe C^0in A, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

I - ω è esatta;

II – Se P_0 e P sono due punti qualunque in A e γ_1 e γ_2 sono due curve generalmente regolari orientate contenute in A, che hanno entrambe come primo estremo P_0 e come secondo estremo P, allora:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

vale a dire che l'integrale curvilineo dipende solo dagli estremi e non dal cammino percorso;

III – se γ è una qualunque curva generalmente regolare, chiusa e contenuta in A, allora

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

Integrali curvilinei di forme differenziali lineari

ES. 9

Determinare, se possibile, una primitiva della forma differenziale

$$\boldsymbol{\omega(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy}$$

Dalla definizione, segue che dobbiamo determinare, se esiste, una funzione f di classe C^1 tale che $\omega = df$ ovvero tale che:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

Integriamo la prima rispetto a x:

$$f(x,y) = \int \frac{2x}{x^2+y^2}dx = log(x^2+y^2) + c(y)$$

Deriviamo la f così trovata rispetto a y ed uguagliamo il risultato con la seconda delle due equazioni:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} + c'(y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

Da cui segue che:

$$c'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(y) = c, \forall c \in R.$$

Dunque una primitiva di ω è:

$$f(x,y) = log(x^2+y^2) + c$$

e quindi la forma differenziale è esatta

ES. 10

Determinare, se possibile, una primitiva della forma differenziale

$$\boldsymbol{\omega(x,y) = ydx + 2xdy}$$

Dalla definizione, dobbiamo determinare, se esiste, una funzione f di classe C^1 tale che $\omega = df$ ovvero tale che:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x$$

Integriamo la prima delle due rispetto a x:

$$f(x, y) = \int y dx = xy + c(y)$$

dove $c(y)$ è una funzione della sola variabile y. Deriviamo ora la f rispetto a y ed uguagliamo il risultato con la seconda delle due relazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + c'(y) = 2x$$

da cui segue che

$$c'(y) = x$$

Si può osservare che l'ultima uguaglianza genera un assurdo, dovendo essere la c funzione della sola variabile y. Pertanto, non essendo possibile determinare una primitiva della forma differenziale segue che essa non è esatta.

Teorema

Sia ω una forma differenziale continua in un aperto connesso A. condizione necessaria e sufficiente affinché ω sia esatta è che, per ogni curva chiusa γ regolare a tratti e con sostegno in A, risulti:

$$\oint_{\gamma} \omega = 0$$

Teorema

Se A è un aperto semplicemente connesso di R^n e ω è una forma differenziale chiusa in A, allora ω è esatta in A.

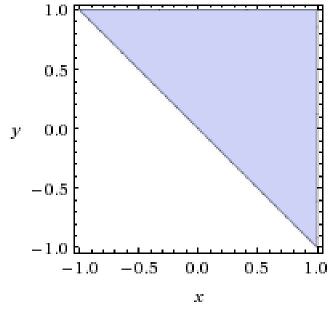
ES. 11

Dimostrare che la forma differenziale

$$\boldsymbol{\omega(x,y) = \frac{3x+y}{\sqrt{x+y}}dx - \frac{x+3y}{\sqrt{x+y}}dy}$$

è esatta.

La forma differenziale è definita in un insieme semplicemente connesso. (Come si può vedere intuitivamente è stellato rispetto a ogni suo punto).



Inoltre, si ha che:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

ES. 12

Dimostrare che la forma differenziale

$$\boldsymbol{\omega(x,y) = \frac{3x+y}{\sqrt{x+y}}dx - \frac{x+3y}{\sqrt{x+y}}dy}$$

è esatta.

Calcolare l'integrale curvilineo delle seguenti forme differenziali estesi alle curve indicate

1	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}} \frac{1}{1+x^2}ds - cos^2 yds$	$\gamma = grafico\ di\ arctanx;$ $Q', Q''\ punti\ di\ \gamma\ di\ ascisse\ 0, \sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$
2	$(\gamma)\int_{Q'}^{Q''} \left[y - e^{\sqrt[3]{\frac{3x+1}{2}}}\left(\sqrt[3]{\frac{3x}{2} - 1}\right)\right]dx + \frac{3x+1}{2}dy$	$\gamma: \begin{cases} x = \frac{2log^3 - 1}{3} \\ y = t(logt - 1) \end{cases} \quad t \in [1, e]$	$9e - 24$
3	$(\gamma)\int_{Q'}^{Q''} \frac{1}{logy}ds + \left(y - e^{\sqrt{x^2-3x+2}}\right)ds$	$\gamma = grafico\ di\ e^{\sqrt{x^2-3x+2}},$ $Q' = P(0), Q'' = P(1)$	$log\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$
4	$(\gamma)\int_{Q'}^{Q''} logxdy$	$\gamma: \begin{cases} x = e^{sen^4 tcos^2 t} \\ y = sent \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{2}{35}$
5	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}} \frac{x^3}{1 + x^3 - 2y\sqrt{1+y^2}}dy$	$\gamma: \begin{cases} x = \sqrt[3]{sen2t} \\ y = sent \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$	$\frac{7}{12}$
6	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}} \frac{(1+\sqrt[3]{y})(3\sqrt[3]{y^2} + e^x - 1)}{(e^x + 1)(1 + \sqrt[3]{y^2})}dx$	$\gamma: \begin{cases} x = \log(1+t) \\ y = t^3 \end{cases} \quad t \in [0,1]$	$log\frac{9\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4}$
7	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}} \frac{5x+1}{3}dy$	$\gamma: \begin{cases} x = \frac{3cos2t - 1}{5} \\ y = e^{3t} \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$-\frac{9}{13}\left(e^{\frac{3}{2}\pi} + 1\right)$
8	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}} \sqrt{ye^{-x}}dx + (y - e^{2x})dy + (z - arctgx - y)dz$	$\gamma: \begin{cases} x = \log t \\ y = t^2 \\ z = t^2 + arctg(logt) \end{cases} \quad t \in [1,2]$	$-2\left(\sqrt{2} - 1\right)$
9	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}} \frac{3^{-\sqrt{x+1}}}{2cosy}dx + ydy + \frac{1}{\sqrt{z+5-x}}dz$	$\gamma: \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = arccost \\ z = t \end{cases} \quad t \in [-1,0]$	?
10	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}} \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}dx + (2y + arcsinx)dy$	γ è la poligonale di vertici $Q'\left(\frac{1}{2}, 1\right), Q\left(-\frac{1}{2}, 0\right), Q''(0,3)$	$8 - \frac{\pi}{6}$
11	$(\gamma)\int_{+\gamma} (2xy^3 + 3)dx + 3x^2y^2dy$	γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1	0

12	$\int_{+\gamma} \frac{1}{\sqrt{y}} dx + dy$	$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, dove γ_1è il diagramma di $2x - x^2 + 3$ con $x \in [0,2]$, γ_2è il segmento congiungente gli estremi di γ_1	$\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}$

Ulteriori esercizi

1	Data la forma differenziale $$\omega(x,y) = (e^{x+y} cosx)dx + \left[\frac{1}{2} e^{x+y}(cosx + sinx)\right] dy$$ stabilire se essa è chiusa, se è esatta ed in tal caso determinarne una primitiva. Calcolare, inoltre, l'integrale della forma differenziale esteso alla curva di equazione $y = \frac{\pi}{2} - x$ tra i punti $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Infine, se la forma è esatta verificarne il risultato con la formula fondamentale degli integrali curvilinei.
2	Sia $F: R^3 \rightarrow R^3$ il campo vettoriale: $$F(x,y,z) = (2y+1, 2x-1, 2z)$$ Stabilire se F ammette potenziale e, in caso affermativo, determinare un potenziale f di F.
3	Data la forma differenziale: $$\omega(x,y) = \frac{1}{\sqrt[3]{(5x+1)^2}} dx + \frac{1}{y-2} dy$$ determinare, se esiste, una primitiva f di ω.
4	Data la forma differenziale: $$\omega(x,y) = \left(x\frac{sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx + \left(y\frac{sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy$$ dire se ω ammette primitiva e, in caso affermativo, determinare una primitiva f di ω.
5	Data la forma differenziale $$\omega(x,y) = \left(\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\right)dx - \left(\frac{y}{\sqrt{e^{2x}-y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\right)$$ verificare se ω ammette primitiva e, in caso affermativo, determinare una primitiva f di ω.
6	Dato il campo di forze $$F(x,y) = \left(\frac{16x}{\sqrt{16x^2-y^2}} - \frac{x}{\sqrt{16y^2-x^2}}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{16y}{\sqrt{16x^2-y^2}} - \frac{y}{\sqrt{16x^2-y^2}}\right)\hat{\jmath}$$ Stabilire se F ammette potenziale e, in caso affermativo, determinare un potenziale f di F.
7	Data la forma differenziale: $$\omega = \frac{2x+y}{\sqrt[3]{(x^2+xy)^2}} dx + \left(\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+xy)^2}} + 2y\right) dy$$ Verificare se essa è chiusa, se è esatta ed in tal caso determinarne una primitiva. Determinare, inoltre, l'integrale della forma differenziale esteso alla bisettrice del primo e del terzo quadrante tra i punti A(1,1) e B(2,2).
8	Data la forma differenziale: $$\omega(x,y) = (xy + sinxy)dx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{cosxy}{y^2} + \frac{x \cdot sinxy}{y}\right)dy$$

	Stabilire se essa è chiusa, se è esatta ed, in tal caso, determinare una primitiva. Calcolare, inoltre, l'integrale della forma differenziale esteso alla curva di equazione $y = \frac{2\pi}{x}$ tra i punti di ascissa 1 e 2.
9	Data la forma differenziale: $$\omega(x,y) = \left(x - \frac{x+y}{\sqrt[3]{(x+y)^2}}\right)dx - \left(\frac{x+y}{\sqrt[3]{(x+y)^2}}\right)dy$$ Stabilire se essa è chiusa, se è esatta ed, in tal caso, determinare una primitiva. Calcolare, inoltre, l'integrale della forma differenziale esteso alla curva di equazione $y = 1 - x$ tra i punti A(1,0) e B(2,-1).
10	Data la forma differenziale: $$\omega(x,y) = (y \cdot arcsinx)dx + \left(\sqrt{1-x^2} + x \cdot arcsinx\right)dy$$ Stabilire se essa è chiusa, se è esatta ed, in tal caso, determinare una primitiva. Calcolare, inoltre, l'integrale della forma differenziale esteso alla curva di equazione $y = arcsinx$ tra i punti di ascissa 0 e 1/2.
11	Dato il campo di forze: $$F(x,y) = \left(x - \frac{1}{\sqrt{2x-y^2}}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{y}{\sqrt{2x-y^2}} + y^2\right)\hat{\jmath}$$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m=1 lungo la curva y=0 tra i punti A(1,0) e B(2,0). Se il campo è conservativo, verificare il risultato utilizzando il potenziale precedentemente calcolato.
12	Dato il campo di forze: $$F(x,y) = e^{\frac{x}{y}}\hat{\imath} + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\hat{\jmath}$$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m lungo la curva y=x tra i punti A(1,1) e B(3,3). Se il campo è conservativo, verificare il risultato utilizzando il potenziale precedentemente calcolato.
13	Dato il campo di forze: $$F(x,y) = \frac{x(1+y^4)}{y^2+x^2(1+y^4)}\hat{\imath} + \frac{y(1+2x^2y^2)}{y^2+x^2(1+y^4)}\hat{\jmath}$$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m lungo la curva y=x dal punto di ascissa 1 al punto di ascissa 2. Se il campo è conservativo, verificare il risultato utilizzando il potenziale precedentemente calcolato.
14	Dato il campo di forze: $$F(x,y) = \left(2xy - \frac{1}{x}\right)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath}$$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m lungo la curva $y = x^2$ tra i punti A(1,1) e B(2,4). Se il campo è conservativo, verificare il risultato utilizzando il potenziale precedentemente calcolato.
15	Dato il campo di forze: $$F(x,y) = -\frac{y}{y^2+x^2}\hat{\imath} + \frac{x}{y^2+x^2}\hat{\jmath}$$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m lungo la curva di equazioni parametriche $x(t) = 1 + \frac{1}{2}cost, y(t) = 1 + \frac{1}{2}sint,\ con\ t \in [0,2\pi]$