



Prof. Roberto Capone

Successioni e serie numeriche

Corso di Analisi Matematica
2013/2014

Corso di laurea in Ingegneria edile



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DEL MOLISE

Serie di funzioni

Definizione

Sia $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali definite in un intervallo $X \subset \mathbb{R}$. Sia $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali:

$$\begin{aligned} S_1(x) &= f_1(x); \\ S_2(x) &= f_1(x) + f_2(x); \\ S_3(x) &= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x); \\ &\dots\dots \\ S_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x); \end{aligned}$$

Tale successione di funzioni si chiama «serie di funzioni di termine generale $f_k(x)$ » e si indica come

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

Convergenza puntuale e convergenza uniforme

Definizione

La serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge puntualmente (in X) se

$$S_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

converge puntualmente (in X), il che equivale a dire che $\exists S(x)$ (detta somma della serie) tale che:

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}: |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall n > \nu$$

Definizione

La serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente (in X) se

$$S_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

converge uniformemente (in X), il che equivale a dire che $\exists S(x)$ (detta somma della serie) tale che:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}: |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall n > \nu$$

Convergenza totale

Definizione

La serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge totalmente (in X) se esiste una successione numerica $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ positiva ($M_n > 0$) tale che:

1. $|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$;
2. La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge

Ciò equivale a richiedere che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in X} |f_n(x)|$$

converga.

Criteri per la convergenza

Criterio di Cauchy per la convergenza puntuale

La serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge puntualmente in $X \subset R$ se e solo se:

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon, x) \in N: \left| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right| < \varepsilon, \forall m > \nu, \forall n > m$$

Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme

La serie di funzioni $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente in $X \subset R$ se e solo se:

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in N: \left| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right| < \varepsilon, \forall m > \nu, \forall n > m$$

Criterio di Weierstrass

Sia $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ una serie convergente totalmente in X , allora essa converge anche uniformemente in X (ma non viceversa)

Serie di funzioni note

Serie geometrica

$$\sum_{n=k}^{\infty} x^n$$

$$D = \mathbb{R}; I =] - 1; 1[$$

$$S(x) = \frac{x^k}{1-x}$$

Serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$D = \mathbb{R}; I = \mathbb{R}$$

$$S(x) = e^x$$

Serie di Leibnitz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-; I = D$$

$$S(x) = \frac{1}{x+1}$$

Serie di Mc Laurin del coseno

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$D = \mathbb{R}; I = \mathbb{D}$$

$$S(x) = \cos x$$

Serie di Mc Laurin del seno

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$D = \mathbb{R}; I = \mathbb{D}$$

$$S(x) = \sin x$$

Serie di Mc Laurin del coseno iperbolico

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$D = \mathbb{R}; I = \mathbb{D}$$

$$S(x) = \cosh x$$

Serie di Mc Laurin del seno iperbolico

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$D = \mathbb{R}; I = \mathbb{D}$$

$$S(x) = \sinh x$$

Serie logaritmica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$D = \mathbb{R}; I =]-1, 1[$$

$$S(x) = \log(1+x)$$

Serie dell'arcotangente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

$$D = \mathbb{R}; I =]-1, 1[$$

$$S(x) = \operatorname{artg} x$$

Serie di potenze

Definizione

Si definisce serie di potenze la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x - x_0)^n = f_0 + f_1(x - x_0) + f_2(x - x_0)^2 + \cdots f_n(x - x_0)^n$$

dove

- $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione numerica reale
- x è una variabile reale;
- $f_n(x - x_0)^n$ prende il nome di termine generale della serie
- f_n prende il nome di coefficiente n-esimo della serie
- Il numero reale x_0 è detto centro della serie di potenze suddetta

Poiché si può pensare di cambiare variabile tramite una traslazione ponendo

$$y = x - x_0$$

Si potrà anche scrivere

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot y^n$$

supponendo che il centro sia $x_0 = 0$

Raggio di convergenza

Definizione

Si definisce raggio di convergenza di una serie di potenze, l'estremo superiore $\rho \in [0, +\infty[$ dell'insieme in cui la serie converge puntualmente

Definizione

L'insieme di convergenza è un intervallo detto intervallo di convergenza della serie

La serie di potenze converge solo in 0, ovvero la serie converge solo nel centro

$$\rho = 0$$

La serie di potenze converge $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\rho = +\infty$$

La serie di potenze converge per $|x| < r$ e non converge per $|x| > r$

$$\rho = r$$

Criterio di convergenza della radice

Criterio di convergenza di Cauchy-Hadamard o della radice

La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot y^n$ converge nell'intervallo di convergenza di raggio ρ tale che:

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{se } L = +\infty \\ \frac{1}{L} & \text{se } 0 < L < +\infty \\ +\infty & \text{se } L = 0 \end{cases}$$

dove

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n|}$$

se tale limite esiste

Criterio di convergenza del rapporto

Criterio di convergenza di D'Alembert o del rapporto

La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot y^n$ converge nell'intervallo di convergenza di raggio ρ tale che:

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{se } L = +\infty \\ \frac{1}{L} & \text{se } 0 < L < +\infty \\ +\infty & \text{se } L = 0 \end{cases}$$

dove

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right|$$

se tale limite esiste

La serie di Taylor di una funzione

Definizione

Data una funzione $f(x)$ indefinitamente derivabile in un intorno I di x_0 , chiamiamo serie di Taylor relativa a $f(x)$ e al punto iniziale x_0 la serie di potenze di $(x - x_0)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = 2^x$.

$f(x)$ è derivabile indefinitamente in ogni punto. Scegliamo $x_0 = 1$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} f^{(n)}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} 2(\ln 2)^n = 2 + (x-1) 2(\ln 2) + \frac{(x-1)^2}{2} 2(\ln 2)^2 + \dots$$

La serie di Mc Laurin di una funzione

Nella serie di Taylor, scegliamo il punto iniziale $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = \\ &= f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots \end{aligned}$$

Questo sviluppo è detto di Maclaurin.

Nello sviluppo di Maclaurin, il fattore

$$(x - x_0)^n$$

che compare nei termini della serie di Taylor, diventa semplicemente:

$$x^n.$$

ESEMPIO

Scriviamo la serie di Maclaurin di 2^x .

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} (\ln 2)^n \\ &= 1 + x \ln 2 + \frac{x^2}{2} (\ln 2)^2 + \dots \end{aligned}$$

Lo sviluppo in serie

Definizione

Una funzione $f(x)$ indefinitamente derivabile in un intorno I di x_0 si dice **svilupppabile in serie di Taylor** nel punto x_0 se la relativa serie di Taylor converge e la somma della serie coincide con la funzione, $\forall x \in I$

In simboli:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0), \quad \forall x \in I.$$

Se $x_0 = 0$, la funzione si dice **svilupppabile in serie di Maclaurin**.

Esempio

Consideriamo $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

La funzione è indefinitamente derivabile in $x = 0$ con tutte le derivate nulle in tale punto.

La serie di Maclaurin è

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} 0 = 0$$

e converge a 0 per ogni valore di x .

La somma della serie **non coincide** con la funzione.

Non tutti gli sviluppi in serie di Taylor (o Maclaurin) convergono a $f(x)$.

Lo sviluppo in serie

Teorema (Condizione sufficiente per la sviluppabilità)

Data una funzione $f(x)$ derivabile indefinitamente in un intorno I di x_0 , se **esiste un numero $L > 0$** tale che

allora $f(x)$ è sviluppabile in serie di potenze in x_0 se e solo se **esiste un numero $L > 0$ tale che**

$$|f^{(n)}(x)| \leq L, \quad \forall x \in I \text{ e } \forall n \in \mathbb{N},$$

l'intervallo I con punto iniziale x_0 .

Gli sviluppi in serie di Maclaurin

$$f(x) = e^x$$

Per questa funzione, $f^{(n)}(x) = e^x$,
tutte le derivate coincidono con la
funzione e^x .

Scegliamo l'intorno di x_0 : $I = [-d ; d]$.

Per tutte le $x \in I$, $e^{-d} \leq f^{(n)}(x) \leq e^d$.

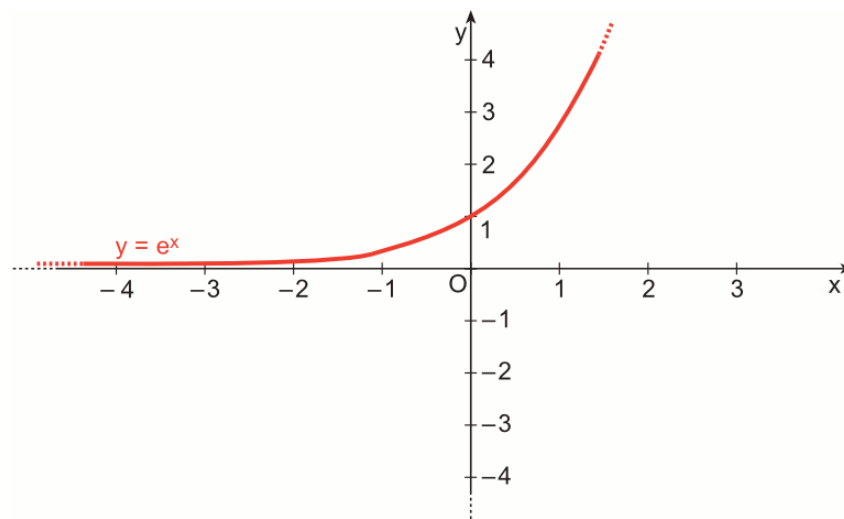
Per ogni d , ponendo $L = e^d$, si ha
dunque $|f^{(n)}(x)| \leq L$
qualunque sia n .



La funzione è sviluppabile in serie di \mathbb{R}
Maclaurin su tutto \mathbb{R} .

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

L'approssimazione migliora man mano
che si aggiungono termini alla somma.



Gli sviluppi in serie di MacLaurin

$$f(x) = \cos x$$

$$f^{(n)}(x) = -\sin x, \text{ per } n = 1, 5, 9, \dots$$

$$f^{(n)}(x) = -\cos x, \text{ per } n = 2, 6, 10, \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin x, \text{ per } n = 3, 7, 11, \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \cos x, \text{ per } n = 4, 8, 12, \dots$$

Per ogni x ,

$$|\sin x| \leq 1 \text{ e } |\cos x| \leq 1,$$

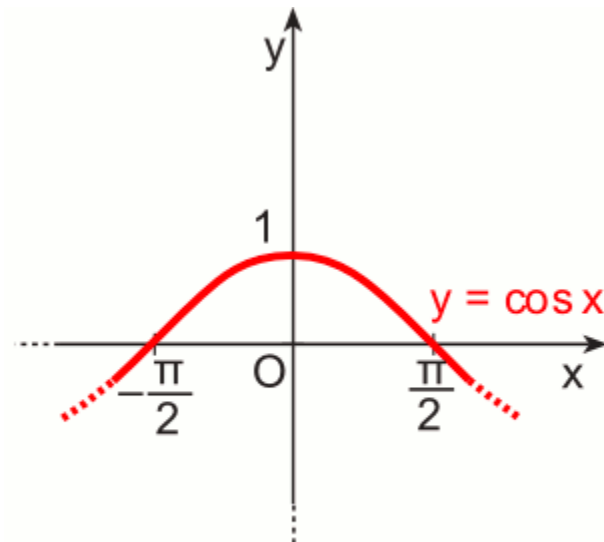
e perciò

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1.$$



La funzione è sviluppabile
in serie di MacLaurin su tutto \mathbb{R} .

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$



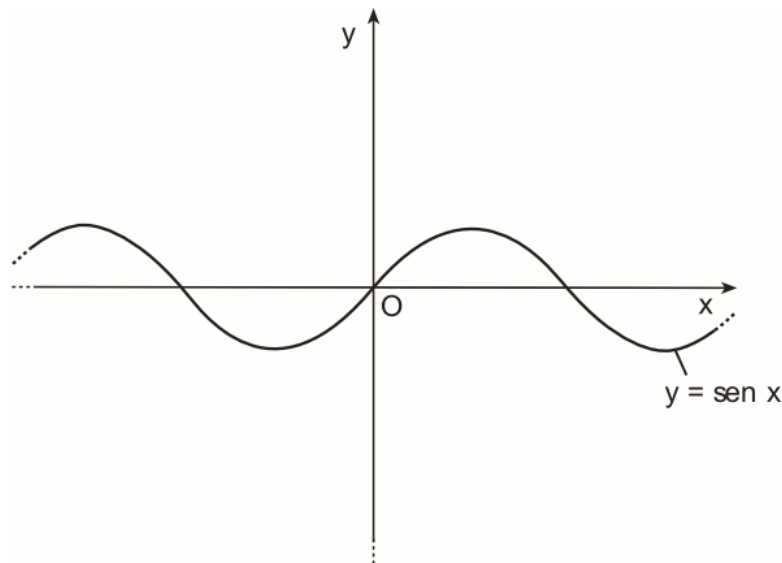
Gli sviluppi in serie di MacLaurin

$$f(x) = \text{sen } x$$

La discussione è del tutto analoga a quella di $f(x) = \text{cos } x$.

→ La funzione è sviluppabile in serie di Maclaurin su tutto \mathbb{R} .

$$\text{sen } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$



Gli sviluppi in serie di MacLaurin

$$f(x) = \ln(1+x)$$

Le derivate della funzione non sono equilimitate in nessun intorno di $x = 0$.

Dunque non vale la [condizione sufficiente per la sviluppabilità](#).

Nonostante questo, si può dimostrare che la serie di Maclaurin converge ai valori della funzione nell'intervallo $] -1 ; 1[$.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

La derivata di $\operatorname{arctg} x$ è $\frac{1}{1+x^2}$

Se $x^2 < 1$, questa espressione equivale alla somma di una serie geometrica di ragione $-x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n.$$

Integrando la serie si ottiene lo sviluppo di $\operatorname{arctg} x$ valido in $] -1 ; 1[$.

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo la serie di Taylor della funzione $f(x) = \sqrt{e^x}$, con punto iniziale 1.

Riscriviamo $f(x)$:

$$f(x) = (e^x)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}x}.$$

Calcoliamo la derivata prima e seconda:

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}f(x), \quad f''(x) = \frac{1}{2}f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 f(x).$$

La derivata n -esima vale:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}f^{(n-1)}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n f(x).$$

Quindi la serie di Taylor è:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} f^{(n)}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{e}(x-1)^n}{2^n n!}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Utilizzando gli sviluppi notevoli, sviluppiamo in serie di Maclaurin indicando l'intervallo di convergenza.

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{1+2x}}$$

Essendo

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+2x}} = (1+2x)^{-\frac{1}{3}},$$

utilizziamo la serie binomiale, con $\alpha = -\frac{1}{3}$ e $2x \in]-1; 1[$, cioè $x \in \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right[$,

$$\begin{aligned} (1+2x)^{-\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{-\frac{1}{3}}{1!} 2x + \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{2!} (2x)^2 + \frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)}{3!} (2x)^3 + \dots = \\ &= 1 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{9}x^2 - \frac{112}{81}x^3 + \dots \end{aligned}$$