

# UNIVERSITA' DEGLI STUDI DEL MOLISE

## Dipartimento di Bioscienze e Territorio - Corso di studi in Ingegneria edile

Anno Accademico 2013/14

Disciplina: Analisi Matematica

Docente: prof. Roberto Capone

### Programma svolto

#### MODULO I

##### Funzioni reali di una variabile reale

Funzioni reali di una variabile reale: estremi di una funzione; minimi e massimi; funzioni monotone; funzioni pari e dispari; funzioni iniettive, suriettive, biettive; funzioni monotone a tratti. Esempi di funzioni reali di una variabile reale (funzione lineare, funzione valore assoluto, funzione parte intera, funzione caratteristica di un insieme; funzione potenza con esponente un intero positivo; funzione potenza con esponente un intero negativo; funzione radice n-esima, funzione potenza con esponente un numero reale; funzione esponenziale; funzione logaritmo)

Funzioni reali di una variabile reale (funzioni periodiche; funzioni seno e coseno; funzioni tangente e cotangente; le funzioni trigonometriche inverse: arcoseno, arcocoseno, arcotangente, arcocotangente; le funzioni iperboliche)

##### Limiti e continuità delle funzioni reali di una variabile reale.

Premessa storica sulla nozione di limite; nozioni di topologia della retta numerica; derivato, interno, frontiera, chiusura di un insieme; insiemi chiusi e insiemi aperti; teorema di Bolzano-Weierstrass; insiemi compatti della retta numerica; teorema di Heine-Borel; punti di accumulazione a sinistra o a destra per un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ . Elementi di topologia del piano cartesiano.

Nozione di limite per una funzione reale di una variabile reale; teorema di unicità del limite; teorema sul carattere locale della nozione di limite; limite sinistro e limite destro; teorema sull'esistenza del limite di una funzione monotona; nozione di continuità per una funzione reale; teorema sulla continuità di una funzione monotona; teorema di Bolzano. Punti di discontinuità di una funzione

Teoremi di confronto sui limiti delle funzioni: teorema del confronto; teorema di permanenza del segno; teorema di regolarità per confronto; operazioni sui limiti. Teorema di Weierstrass; teorema degli zeri; teorema di Bolzano; funzioni uniformemente continue. Teorema di Cantor.

Infinitesimi ed infiniti; confronto fra infinitesimi, ordine di un infinitesimo, infinitesimi equivalenti; applicazioni al calcolo dei limiti; gli infiniti; ordine di un infinito; confronto fra infiniti.

##### Funzioni reali di due variabili reali

Elementi di topologia in  $\mathbb{R}^n$ ; disuguaglianza di Cauchy-Schwarz; proiezioni e sezioni di un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ . Insiemi connessi di  $\mathbb{R}^n$ . Funzioni reali di più variabili reali; diagramma di una funzione reale di più variabili reali; estremi, minimi e massimi assoluti e relativi. Funzioni vettoriali. Curve nel piano cartesiano. Campo di esistenza per le funzioni di due variabili reali. Curve di livello.

### **Limiti e continuità delle funzioni reali di due variabili reali.**

Limiti e continuità per le funzioni reali di più variabili reali; infinitesimi, infiniti e loro ordine; teorema sull'inversione di limiti; lemma fondamentale sulla caratterizzazione delle funzioni continue; teorema di Bolzano; teorema di Weierstrass; teorema degli zeri; teorema di Cantor. Omeomorfismi

### **Calcolo differenziale per le funzioni reali di una variabile reale**

Nozione di derivata e suo significato geometrico; il problema della tangente; legame tra derivabilità e continuità; derivata destra e derivata sinistra; punti di non derivabilità; calcolo dell'equazione della retta tangente alla funzione in un punto; operazioni sulle funzioni derivabili; le derivate delle funzioni elementari; le derivate di ordine superiore; teorema di Rolle; teorema di Lagrange; teorema di Cauchy; teorema di Fermat.

Il teorema di L'Hospital; infinitesimi e infiniti. Nozione di differenziale. Applicazioni del calcolo differenziale allo studio delle funzioni; funzioni crescenti e decrescenti; massimi e minimi relativi; funzioni concave e funzioni convesse; punti di flesso.

### **Calcolo differenziale per le funzioni reali e vettoriali di più variabili reali**

Nozione di differenziale per una funzione reale di più variabili reali; condizione sufficiente per la differenziabilità data attraverso la continuità delle derivate parziali; operazioni sulle funzioni differenziabili; derivate parziali di ordine superiore; teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione; teorema di Lagrange per le funzioni reali di più variabili reali; funzioni con derivate parziali identicamente nulle; funzioni omogenee; teorema di Eulero.

Funzioni implicite; teorema del Dini per una equazione. Omeomorfismi e omeomorfismi locali di classe  $C^m$ . Teorema di invertibilità locale di una trasformazione; teoremi sui minimi e massimi relativi per le funzioni di più variabili; regolarità degli insiemi di livello; baricentro e momento d'inerzia.

## **MODULO II**

### **Il Calcolo integrale**

Introduzione storica; il metodo di esaurimento; Integrazione secondo Riemann per le funzioni reali di una variabile reale; proprietà dell'integrale di una funzione continua; I teorema fondamentale del calcolo integrale; Il teorema fondamentale del calcolo integrale; teorema di integrazione per parti; teorema di integrazione per sostituzione. Proprietà dell'integrale di una funzione limitata e integrabile. Integrazione delle funzioni elementari; integrazione immediata; integrazione per

decomposizione in fratti semplici; integrazione per parti; integrazione per sostituzione. Applicazioni al calcolo delle aree

Curve piane e sghembe: curve semplici aperte; curve semplici chiuse; curve semplici piane rappresentate in coordinate polari; orientamento delle curve semplici, aperte o chiuse; curve semplici regolari; curve semplici rettificabili; sistema di ascisse curvilinee su una curva semplice. Curve notevoli: la cicloide, l'elica cilindrica; la spirale di Archimede; la spirale logaritmica; curve di Jordan; teorema di Jordan; l'asteroide; il deltoide; le rodonee. Lunghezza di una curva.

Integrali curvilineo di una funzione di due o di tre variabili. Applicazioni degli integrali curvilinei al calcolo del baricentro di una lamina sottile

Forme differenziali lineari; indipendenza dalla parametrizzazione. Integrale curvilineo di una forma differenziale lineare. Circuitazione di un vettore lungo la frontiera di un dominio o lungo il bordo di una superficie

### **Integrali multipli**

Integrali doppi: elementi di teoria della misura per gli insiemi di punti dello spazio. Volume del cilindroide; integrale doppio di una funzione continua in un insieme compatto e misurabile. Proprietà degli integrali doppi. Insiemi normali del piano e dello spazio;

Formule di riduzione degli integrali doppi. Formula di inversione di Dirichlet. Formule di Gauss e di Green. Teorema della divergenza e teorema di Stokes nel piano. Cambiamento di variabili negli integrali doppi. Interpretazione geometrica dello jacobiano. Calcolo di integrali doppi; cambiamento di variabili; passaggio a coordinate polari; calcolo delle aree

Integrali tripli: formule di riduzione per strati e per fili; cambiamento di variabili: passaggio a coordinate polari, coordinate cilindriche, coordinate sferiche.

### **Forme differenziali**

Forme differenziali su curve generalmente regolari; teorema fondamentale per gli integrali curvilinei; forme differenziali esatte; forme differenziali chiuse; domini connessi e semplicemente connessi; chiusura ed esattezza;

### **Equazioni differenziali**

Equazioni differenziali ordinarie; equazioni a variabili separabili; equazioni lineari; equazioni di Bernoulli; teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy; esistenza globale; equazioni lineari scalari di ordine  $n$ ; equazione omogenea; equazione non omogenea; equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti omogenee e non omogenee; equazioni di Eulero; equazioni risolvibili con cambiamento di variabile.

### **Complementi sul calcolo integrale**

Integrali impropri; integrali superficiali; superfici di rotazione e teorema di Pappo-Guldino; teorema della divergenza; teorema del rotore; lavoro di una forza; campi vettoriali; campi conservativi; campi irrotazionali; caratterizzazione dei campi conservativi; flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie

### **Successioni e serie**

Limiti e successioni: le successioni numeriche; rappresentazione grafica, esempi; limite di una successione; successioni numeriche: limitatezza; successioni convergenti e divergenti; teorema di unicità del limite; infiniti e infinitesimi; la monotonia, teorema sul limite delle successioni monotone; operazioni coi limiti; successioni e polinomi; il numero di Nepero; la successione geometrica di ragione  $q$ ; limiti e ordinamento; teorema di permanenza del segno nella prima forma e nella seconda forma; teorema del confronto; legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni (teorema ponte);

Le serie numeriche: condizioni di convergenza; la serie geometrica; il criterio di Cauchy per le serie; serie a termini non negativi; la serie armonica; serie a termini alterni; convergenza assoluta e convergenza incondizionata; il criterio del rapporto; il criterio della radice; il criterio del confronto

Successioni e serie di funzioni di una variabile reale: convergenza puntuale e convergenza uniforme; serie di potenze nel campo reale; serie di Taylor; sviluppo in serie di Taylor per le funzioni elementari; considerazioni geometriche