UNIVERSITA' DEGLI STUDI DEL MOLISE
Prova scritta del 22/07/2014 – Analisi Matematica
Corso di studi in Ingegneria edile
Prof. R. Capone
I modulo

ES.1	Studiare la seguente funzione e rappresentarla graficamente evidenziando se presenta discontinuità $f(x) = x(log^2x - 2logx - 2)$
ES.2	Si risolva il seguente limite, senza necessariamente ricorrere ai limiti notevoli $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x+4} - \sqrt[3]{x}$
ES. 3	Si calcoli Il dominio della seguente funzione e lo si rappresenti nel piano cartesiano $f(x,y) = log(2^{x-1} - 1) - log(3^{x+5} - 27) + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

Sol.1

Insieme di definizione:

$$x \in]0;+\infty[$$

Studio del segno:

$$x(log^2x - 2logx - 2) > 0$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ log^2x - 2logx - 2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x < e^{1-\sqrt{3}} \cup x > e^{1+\sqrt{3}} \end{cases}$$

Pertanto la funzione assume valori positivi per $x \in \left]0, e^{1-\sqrt{3}}\right[\cup \left]e^{1+\sqrt{3}}, +\infty\right[$

Comportamento agli stremi dell'Insieme di definizione

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

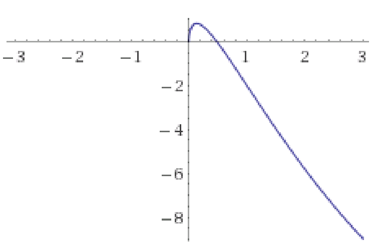
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

Proprietà di monotonia

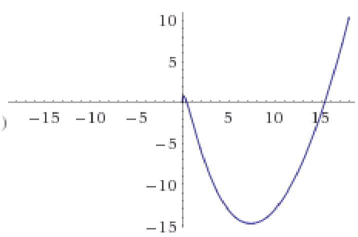
$$f'(x) = log^2x - 2logx - 2 + x\left(\frac{2logx}{x} - \frac{2}{x}\right) = log^2x - 4$$

$$log^2x - 4 > 0 \quad \iff \quad x < e^{-2} \cup x > e^2$$

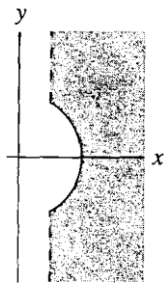
La funzione presenta un massimo relativo nel punto $M = (e^{-2}, 4e^{-2})$ e un minimo relativo nel punto $m = (e^2, -2e^2)$



(x from −3 to 3)



(x from −15 to 15)

Sol.2	$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+4)^2}+\sqrt[3]{(x)^2}+\sqrt[3]{(x+4)(x)})}{\sqrt[3]{(x+4)^2}+\sqrt[3]{(x)^2}+\sqrt[3]{(x+4)(x)}} = $$ $$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+4-x}{\sqrt[3]{(x+4)^2}+\sqrt[3]{(x)^2}+\sqrt[3]{(x+4)(x)}} = 0$$
Sol.3	Il dominio della funzione si ottiene risolvendo il seguente sistema: $$\begin{cases} 2^{x-1}-1>0 \\ 3^{x+5}-27>0 \\ x^2+y^2-4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-1}>2^0 \\ 3^{x+5}>3^3 \\ x^2+y^2\geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-2 \\ x^2+y^2\geq 4 \end{cases}$$ 

II modulo

Es. 1	Si calcoli il seguente integrale triplo $$\iiint_T e^y xzdxdydz$$ dove T è il dominio definito dalle limitazioni $$0\leq x\leq 1, 0\leq y\geq x^2, 0\leq z\leq 2$$
Es. 2	Si risolva almeno una delle seguenti equazioni differenziali: $$a. \quad y'=\sqrt{1-y^2}\cos(logx)$$ $$b. \quad \begin{cases} y''-2y'-3y=(2x+1)e^x \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$
Es. 3	Dato il campo di forze: $$F(x,y)=\left(xlog(x^2+y^2+1)\right)\hat{\imath}+ylog(x^2+y^2+1)\hat{\jmath}$$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m lungo la curva $y=x^2+1$ tra i punti A(0,1) e B(2,5).
Es. 4	Calcolare i momenti d'inerzia I_x,I_y,I_0 di un disco omogeneo D di densità $\rho(x,y)=\rho^2$ avente

	centro nell'origine degli assi e raggio 3.

Sol.1	L'insieme T è un dominio normale rispetto al piano (x,z). applicando le formule di riduzione si ha: $$\iiint_T e^y xzdxdydz = \int_0^1\int_0^2 xzdxdz\int_0^{x^2} e^y dy = \int_0^1\int_0^2 xz[e^y]_0^{x^2} dxdz = \int_0^1\int_0^2 xz\left(e^{x^2}-1\right)dxdz =$$ $$= \int_0^1 x\left(e^{x^2}-1\right)dx\int_0^2 zdz = \int_0^1 x\left(e^{x^2}-1\right)\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 dx = 2\int_0^1 x\left(e^{x^2}-1\right)dx$$ $$= \int_0^1 2xe^{x^2}dx - 2\int_0^1 xdx = \boldsymbol{e-2}$$
Sol.2a	Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili: $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}\cos(logx) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \cos(logx)dx$$ Integrando ambo i membri, ottengo: $$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \cos(logx)dx$$ Il primo è un integrale immediato: $$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = arcsiny + c$$ Il secondo integrale si risolve per sostituzione ponendo $$t = logx, x = e^t, dx = e^t$$ $$\int \cos(logx)dx = \int e^t costdt$$ che si risolve per parti $$\int e^t costdt = e^t cost + \int e^t sintdt = e^t cost + e^t sint - \int e^t costdt$$ In definitiva: $$\int e^t costdt = e^t\frac{sint + cost}{2} + c = x\frac{\sin(logx)+\cos(logx)}{2} + c$$ In definitiva: $$arcsiny = x\frac{\sin(logx)+\cos(logx)}{2} + c \Leftrightarrow y(x) = \boldsymbol{sin\left(x\frac{\sin(logx)+\cos(logx)}{2}+c\right)}$$
Sol.2b	L'equazione caratteristica dell'omogenea associata ammette come soluzioni $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ La soluzione generale dell'omogenea associata è: $$y_0(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$$ La soluzione particolare è del tipo $$y(x) = y_0(x) + u(x)$$ Dove $$u(x) = (Ax+B)e^x$$ $$u'(x) = (Ax+B)e^x + Ae^x$$ $$u''(x) = (Ax+B)e^x + 2Ae^x$$ Si ottiene così: $$A = -\frac{1}{2}; B = -\frac{1}{4}.$$

	La soluzione dell'equazione differenziale è quindi: $$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} + e^x\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$$ Applicando le condizioni di Cauchy, ricavo $c_1 = -\frac{1}{4}$ e $c_2 = \frac{1}{2}$ La soluzione del problema di Cauchy è pertanto: $$\boldsymbol{y(x) = -\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{3x} + e^x\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)}$$
Sol.3	La forma è definita in $\Omega = R^2$ che è semplicemente connesso. Il campo è irrotazionale essendo $$\frac{\partial}{\partial y}xlog(x^2+y^2+1) = \frac{2xy}{x^2+y^2+1} = \frac{\partial}{\partial x}ylog(x^2+y^2+1)$$ Esso è quindi conservativo in Ω. Detta $F(x,y)$ il potenziale, si ha: $$F(x,y) = \int xlog(x^2+y^2+1)dx = \frac{1}{2}\left[(x^2+y^2+1)log(x^2+y^2+1) - (x^2+y^2+1)\right] + c(y)$$ Per determinare la funzione $c(y)$ occorre imporre: $$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = ylog(x^2+y^2+1) + \frac{1}{2}(x^2+y^2+1)\frac{2xy}{x^2+y^2+1} - \frac{1}{2}2y + c'(y) = ylog(x^2+y^2+1)$$ Allora $c'(y) = 0 \iff c(y) = 0$ Quindi risulta: $$F(x,y) = \frac{1}{2}\left[(x^2+y^2+1)log(x^2+y^2+1) - (x^2+y^2+1)\right] + c$$ Il lavoro, essendo il campo conservativo, dipende solo dal valore che la primitiva assume agli estremi ed è: $$\int_\gamma \omega = F(P_2) - F(P_1) = \boldsymbol{15log30 - log2 - 14}$$
Sol.4	Si considerino le coordinate polari $$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases}$$ dove $0 \le \rho \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ Si ha che: $$I_x = \iint_D x^2\rho(x,y)dxdy = \int_0^3\int_0^{2\pi} \rho^2cos^2\theta\rho^2\rho d\rho d\theta = \int_0^3 \rho^5 d\rho\int_0^{2\pi} cos^2\theta d\theta = \pi\int_0^3 \rho^5 d\rho = \frac{243\pi}{2}$$ $$I_y = \iint_D y^2\rho(x,y)dxdy = \int_0^3\int_0^{2\pi} \rho^2sin^2\theta\rho^2\rho d\rho d\theta = \int_0^3 \rho^5 d\rho\int_0^{2\pi} sin^2\theta d\theta = \pi\int_0^3 \rho^5 d\rho = \frac{243\pi}{2}$$ $$I_0 = I_x + I_y = \boldsymbol{243\pi}$$