TAVOLA DEGLI INTEGRALI INDEFINITI

Integrazione di funzioni elementari	Integrazione di funzioni composte
$\int dx = x + c$	
$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\int [f(x)]^{\alpha} \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x \rvert + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x) \rvert + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc\tan x + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan(f(x)) + c$
$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} arc\tan\frac{x}{a} + c$	
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{lna} + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \arcsin f(x) + c$
$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$	$\int -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \arccos f(x) + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int f'(x) \cdot \cos f(x) dx = \sin f(x) + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + c$
$\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	
$\int coshx dx = sinhx + c$	$\int coshf(x) f'(x) dx = sinhf(x) + c$
$\int sinhx dx = coshx + c$	$\int sinhf(x) f'(x) dx = coshf(x) + c$
$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + c$	$\int \frac{f'(x)dx}{cos^2 f(x)} = tgf(x) + c$
$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -cotgx + c$	$\int \frac{f'(x)dx}{sin^2 f(x)} = -cotgf(x) + c$
$\int \frac{dx}{cosh^2 x} = tghx + c$	$\int \frac{f'(x)dx}{cosh^2 f(x)} = tghf(x) + c$

GLI INTEGRALI INDEFINITI IMMEDIATI

Calcola i seguenti integrali.

1	$\int (x^3 + 2x^2 - x - 2) dx$	18	$\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{1+x^2} \right) dx$
2	$\int (2x^3 + x^2 - 3x - 3) dx$	19	$\int x^2 \sqrt{x^3 - 1} dx$

3	$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$	20	$\int x^3\sqrt{x^4-2}dx$
4	$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx$	21	$\int\frac{7x^6-10x^4-2x^{-3}}{2x^7-4x^5+2x^{-2}+4}dx$
5	$\int\frac{x^3-x^2-3x-2}{x^2}dx$	22	$\int\frac{6x^2-12x-6x^{-4}}{x^3-3x^2+x^{-3}+7}dx$
6	$\int\frac{2x^3+2x^2-x-4}{x^2}dx$	23	$\int e^{\operatorname{sen}x}\cdot\cos x dx$
7	$\int\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	24	$\int -e^{\cos x}\operatorname{sen}x dx$
8	$\int-\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}dx$	25	$\int\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$
9	$\int\frac{x^2}{\left(x^3+1\right)^2}dx$	26	$\int\frac{-2e^{-2x}-e^{-x}}{e^{-2x}+e^{-x}}dx$
10	$\int\frac{x^3}{\left(x^4-1\right)^2}dx$	27	$\int\left(\frac{1}{2x-1}+\frac{3}{x+5}\right)dx$
11	$\int\left(2e^x-\cos x+\sqrt[3]{x}\right)dx$	28	$\int\left(\frac{4}{3x+2}-\frac{1}{x-1}\right)dx$
12	$\int\left(3e^x-\operatorname{sen}x-\sqrt[3]{x}\right)dx$	29	$\int\frac{2x+1}{4x^2-1}dx$
13	$\int\frac{4\operatorname{sen}^3 x+\cos x+\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}x}dx$	30	$\int\frac{x^2+3x+9}{x^3-27}dx$
14	$\int\frac{-4\cos^3 x+2\operatorname{sen}x+\cos(3x)}{\cos x}dx$	31	$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$
15	$\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$	32	$\int\frac{x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}dx$
16	$\int\frac{5^{x+1}}{1+5^{2x}}dx$	33	$\int\frac{1+e^x}{\left(x+e^x\right)\ln\left(x+e^x\right)^2}dx$
17	$\int\frac{3^{x+2}}{1+3^{2x}}dx$	34	$\int\frac{2+\cos x}{(1+2x+\operatorname{sen}x)\ln(1+2x+\operatorname{sen}x)^2}dx$

L'INTEGRAZIONE PER PARTI

Teorema di integrazione per parti

Se f e g sono due funzioni reali di classe C^1 nell'intervallo [a,b], si ha:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx=[f(x)\cdot g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Dimostrazione:

pressoché ovvia. Essendo per la regola di derivazione del prodotto di due funzioni:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

si ha

$$\int_a^b (f \cdot g)'(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx$$

da cui l'asserto.

Es.1
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \boldsymbol{x \cdot cosxdx}$$

La funzione integranda si presenta come il prodotto di due funzioni. L'integrale si risolve seguendo la formula dell'integrazione per parti

$$\int f(x)g(x)dx = f(x) \cdot G(x) - \int f'(x) \cdot G(x)\,dx$$

Avendo indicato con $G(x)$ una primitiva di $g(x)$ e avendo scelto $f(x)$ come fattore finito e $g(x)$ come fattore differenziale. Nel nostro caso:

$$\int x \cdot cosxdx = x \cdot sinx - \int sinxdx = xsinx + cosx + c$$

Es.2
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \boldsymbol{\sqrt{x}logxdx}$$

In questo esercizio, la scelta di $logx$ come fattore finito è obbligata perché non se ne conosce una primitiva. Pertanto, si ha:

$$\int \sqrt{x}logxdx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}logx - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + c$$

Es.3
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \boldsymbol{x \cdot arctgxdx}$$

Anche in questo caso, la scelta di $arctgx$ come fattore finito è obbligata. Si ha:

$$\int x \cdot arctgxdx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx\right) = \boldsymbol{\frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}(x - arctgx) + c}$$

NB: la scelta del fattore differenziale dipende sostanzialmente da due condizioni; deve essere una funzione di cui si conosce con semplicità la primitiva; inoltre deve essere tale che il nuovo integrale che compare dall'applicazione della formula di integrazione per parti sia di difficoltà pari o minore a quello di partenza.

Alcuni artifici ed esempi

Es.4
Si calcolino i seguenti integrali

$$\int \boldsymbol{tgxdx}, \qquad \int \boldsymbol{cotgxdx}$$

$$\int tgxdx = \int \frac{sinx}{cosx}dx = -log|cosx| + c$$
$$\int cotgxdx = \int \frac{cosx}{sinx}dx = log|sinx| + c$$

Es.5
Si calcolino i seguenti integrali

$$\int \boldsymbol{\frac{dx}{sinx \cdot cosx}}, \qquad \int \boldsymbol{\frac{dx}{sinx}}, \qquad \int \boldsymbol{\frac{dx}{cosx}}$$

$$\int \frac{dx}{sinx \cdot cosx} = \int \frac{dx}{tgxcos^2x} = log|tgx| + c$$

$$\int \frac{dx}{sinx} = \int \frac{dx}{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2tg\frac{x}{2}cos^2\frac{x}{2}} = log\left|tg\frac{x}{2}\right| + c = log\frac{1-cosx}{|sinx|} + c$$

$$\int \frac{dx}{cosx} = \int \frac{dx}{sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = log\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c = log\frac{1+sinx}{|cosx|} + c$$

Es.6
Si calcolino i seguenti integrali

$$\int \frac{dx}{sinhx}, \quad \int \frac{dx}{coshx}$$

$$\int \frac{dx}{sinhx} = 2\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = 2\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = -2\int \frac{de^x}{1-(e^x)^2} = log\frac{|1-e^x|}{1+e^x} + c$$

$$\int \frac{dx}{coshx} = 2\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 2\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = 2\int \frac{de^x}{1+(e^x)^2} = 2arctge^x + c$$

Calcola i seguenti integrali.

1	$\int (x+2)\sin x dx$	16	$\int x^2 cosxdx$
2	$\int (x+3)\cos x dx$	17	$\int log(3x+5)dx$
3	$\int x^3 \log x dx$	18	$\int x^2 \cdot e^{3x}dx$
4	$\int x^4 \log x dx$	19	$\int x^3 \cdot e^{-x}dx$
5	$\int e^{2x} \operatorname{arctg}\left(e^{-x}\right)dx$	20	$\int x^2 sinxdx$
6	$\int x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2x}\right)dx$	21	$\int e^x \cdot sinxdx$
7	$\int 3^x \sin^2(2x)dx$	22	$\int e^x \cdot cos2xdx$
8	$\int 2^x \cos^2(3x)dx$	23	$\int cos^2(5x+1)dx$
9	$\int logxdx$	24	$\int x \cdot arctgxdx$
10	$\int log^2xdx$	25	$\int \sqrt{9+x^2}dx$
11	$\int x^2e^xdx$	26	$\int x^2 \cdot log(x+2)dx$
12	$\int x \cdot cosxdx$	27	$\int \sqrt{x}log3x \cdot dx$
13	$\int sin^2xdx$	28	$\int xlog^2xdx$
14	$\int x \cdot sinxdx$	29	$\int e^{\sqrt{x}}dx$

15	$\int tg^2 x dx$	30	$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

L'INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Per calcolare l'integrale $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$ di una funzione in cui il grado del denominatore sia maggiore del numeratore

si scompone D(x) nel prodotto di fattori irriducibili;

si riscrive la funzione integranda come somma di frazioni semplici aventi come denominatore i fattori di D(x);

si applicano le regole di integrazione immediata

$ax+b$	$\frac{A}{ax+b}$	$\frac{1}{x(x-1)(x-2)}$	$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}$
$(ax+b)^n$	$\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3}+\ldots+\frac{N}{(ax+b)^n}$	$\frac{x^2+1}{(x-1)^3}$	$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}$
$ax^2+bx+c; \Delta<0$	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$	$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+2)}$	$\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$
$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$ $\Delta< 0$	$\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} arctg \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$		
$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$ $\Delta> 0$	$\int \frac{A}{a(x-x_1)} dx + \int \frac{B}{x-x_2} dx$		
$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$ $\Delta= 0$	$\int \frac{A}{a(x-x_1)} dx + \int \frac{B}{a(x-x_2)^2} dx$		
$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$ $\Delta< 0$	$\frac{m}{2a} log\|ax^2+bx+c\| + \frac{2an-mb}{2a} \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$		

Se il grado del Denominatore è minore o uguale al grado del Numeratore si procede alla divisione dei due polinomi

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}dx = \int Q(x)dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}dx$$

dove R(x) e Q(x) sono rispettivamente il resto e il quoziente della divisione.

1	$\int \frac{dx}{(x-2)^3}$	31	$\int \frac{3x+1}{x^2+2x-3}dx$
2	$\int \frac{dx}{(x+3)^4}$	32	$\int \frac{x-7}{x^2+4x-5}dx$
3	$\int \frac{dx}{(x+1)^5}$	33	$\int \frac{dx}{x^2-2x-3}dx$
4	$\int \frac{dx}{(2x+3)^4}$	34	$\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$
5	$\int \frac{dx}{(3x-1)^5}$	35	$\int \frac{dx}{x^2-x-6}$
6	$\int \frac{dx}{(5x+2)^4}$	36	$\int \frac{dx}{x^2+x-2}$
7	$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx$	37	$\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$
8	$\int \frac{3x-1}{x^2+x+1}dx$	38	$\int \frac{dx}{x^2-3x}$
9	$\int \frac{3x+4}{x^2+x+2}dx$	39	$\int \frac{dx}{x^2-4}$
10	$\int \frac{5x+1}{x^2+2x+3}dx$	40	$\int \frac{2x-1}{3x^2+7x+2}dx$
11	$\int \frac{3x-2}{x^2+3x+7}dx$	41	$\int \frac{x+1}{6x^2+7x+2}dx$
12	$\int \frac{3x+2}{2x^2+x+1}dx$	42	$\int \frac{xdx}{2x^2-3x+1}$
13	$\int \frac{5x-1}{3x^2+x+1}dx$	43	$\int \frac{dx}{4x^2-4x-3}$
14	$\int \frac{3x-1}{2x^2+2x+5}dx$	44	$\int \frac{dx}{4x^2-8x-5}$
15	$\int \frac{2x+3}{5x^2+x+1}dx$	45	$\int \frac{dx}{9x^2+3x-2}$
16	$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$	46	$\int \frac{dx}{2x^2-3x}$
17	$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$	47	$\int \frac{dx}{4x^2-9}$
18	$\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$	48	$\int \frac{dx}{9x^2-4}$
19	$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$	49	$\int \frac{2x+11}{(x+5)^2}dx$
20	$\int \frac{dx}{(x^2+x+2)^2}$	50	$\int \frac{x-5}{(x-6)^2}dx$
21	$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$	51	$\int \frac{2x-3}{(2x-5)^2}dx$
22	$\int \frac{dx}{(x^2+3x+5)^2}$	52	$\int \frac{6x-23}{(2x-7)^2}dx$

23	$\int \frac{3x+2}{(1+x^2)^2}dx$	53	$\int \frac{4x+7}{(4x+5)^2}dx$
24	$\int \frac{5x+1}{(1+x^2)^3}dx$	54	$\int \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}dx$
25	$\int \frac{3x+1}{(1+x^2)^4}dx$	55	$\int \frac{(x+1)^2}{x(x^2+3)}dx$
26	$\int \frac{3x+7}{(x^2+2x+5)^2}dx$	56	$\int \frac{3x^2+x-2}{(x+3)(x^2+2)}dx$
27	$\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}dx$	57	$\int \frac{x^2-7x+1}{(3x+1)(x^2-x+3)}dx$
28	$\int \frac{15x+7}{(5x^2+2x+1)^2}dx$	58	$\int \frac{11x^2-21x+16}{(2x-1)(x^2-3x+4)}dx$
29	$\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$	59	$\int \frac{4x^2+2x-21}{(4x+3)(x^2-2x+3)}dx$
30	$\int \frac{3x+4}{x^2+3x+2}dx$	60	$\int \frac{x^2-6x+7}{(x-1)(x^2-5x+6)}dx$

L'INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$\int R(cosx, sinx,)dx,$ con R funzione razionale	$tg\left(\frac{x}{2}\right)=t$ $x=2arctgt$ $dx=\frac{2}{1+t^2}$ $sinx=\frac{2t}{1+t^2}; cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\int R(e^x)dx$	$e^x=t$ $x=logt$ $dx=\frac{1}{t}$
$\int R(tgx)dx$	$tgx=t$ $x=arctgt$ $dx=\frac{1}{1+t^2}$
$\int R(\sqrt{x})dx$	$\sqrt{x}=t$ $x=t^2$ $dx=2t$

Integrali del tipo

$$\int R(e^x)dx$$

1	$\int \frac{3e^{2x}+2e^x}{2e^{2x}+3e^x+1}dx$	$log(e^x+1)+\frac{1}{2}log(2e^x+1)$

2	$\int \frac{e^{2x}}{3e^{2x}-2e^x-1}dx$	$\frac{1}{4}log\|e^x-1\|+\frac{1}{12}log(3e^x+1)$
3	$\int \frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^{2x}+e^x+1}dx$	$x+\frac{2}{\sqrt{3}}artg\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}$
4	$\int \frac{e^{2x}+3e^x}{(e^x+1)^2}dx$	$log(e^x+1)-\frac{2}{e^x+1}$
5	$\int \frac{e^x-1}{2e^x-1}dx$	$x-\frac{1}{2}log\|2e^x-1\|$
6	$\int \frac{e^{2x}+9e^x+9}{e^{2x}+3e^x+3}dx$	$3x-log(e^{2x}+3e^x+3)+\frac{6}{\sqrt{3}}arctg\frac{2e^x+3}{\sqrt{3}}$
7	$\int \frac{e^{3x}+6e^{2x}+9e^x}{(e^x-3)(e^{2x}+3)}dx$	$3log\|e^x-3\|-log(e^{2x}+3)$
8	$\int \frac{11e^{2x}-17e^x+12}{e^{2x}-3e^x+4}dx$	$3x+4log(e^{2x}-3e^x+4)+\frac{8}{\sqrt{7}}artg\frac{2e^x-3}{\sqrt{7}}$
9		

Integrali del tipo

$$\int \boldsymbol{R(sinx, cosx)dx}$$

1	$\int \frac{1}{1-cosx}dx$	
2	$\int \frac{2}{1+sinx-2cosx}dx$	
3	$\int \frac{sinx}{1+sinx}dx$	
4	$\int \frac{dx}{1+sinx+cosx}$	
5	$\int \frac{1+sinx}{1-sinx}dx$	
6	$\int \frac{dx}{sinx-cosx-1}$	$log\left\|tg\frac{x}{2}-1\right\|$
7	$\int \frac{dx}{sinx-cosx+1}$	$log\left\|cotg\frac{x}{2}+1\right\|$
8	$\int \frac{dx}{1-cosx-3sinx}$	$\frac{1}{3}log\left\|1-3cotg\frac{x}{2}\right\|$
9	$\int \frac{sinx-cosx-1}{sinx(2sinx-cosx-1)}dx$	$log\left\|tg\frac{x}{2}\right\|-\frac{1}{2}log\left\|2tg\frac{x}{2}-1\right\|$
10	$\int \frac{dx}{3(1+sinx)+cosx}$	$log\left\|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{2+tg\frac{x}{2}}\right\|$
11	$\int \frac{4sinx-3cosx+3}{sinx(7sinx+cosx+5)}dx$	$log\left\|tg\frac{x}{2}+3\right\|+\frac{1}{2}log\left\|2tg\frac{x}{2}+1\right\|$
12	$\int \frac{2sinx+11cosx+11}{(6cosx+sinx+6)^2}dx$	$2log\left\|tg\frac{x}{2}+6\right\|+\frac{1}{tg\frac{x}{2}+6}$

Integrali del tipo

$$\int \boldsymbol{sin^n x \cdot cos^m x dx}, \quad \int \boldsymbol{\frac{dx}{sin^n x}}, \quad \int \boldsymbol{\frac{dx}{cos^n x}}$$

Per n=1 ricorriamo ad una sostituzione con formule parametriche. Per n=2 si ricorre ad artifici.

Es.7

Si risolva il seguente integrale

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{sin^2xcos^2x}}$$

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{sin^2xcos^2x}} = \int \frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2xcos^2x}dx = \int \frac{dx}{cos^2x} + \int \frac{dx}{sin^2x} = tgx - cotgx + c$$

1	$\int sin^2x \cdot cos^2xdx$	
2	$\int sin^3x \cdot cos^3xdx$	
3	$\int sin^4x \cdot cos^4xdx$	
4	$\int sin^3x \cdot cos^nxdx$	
5	$\int sin^nx \cdot cos^3xdx$	
6	$\int sin^5x \cdot cos^nxdx$	
7	$\int sin^nx \cdot cos^5xdx$	
8	$\int sin^2x \cdot cos^4xdx$	
9	$\int sin^4x \cdot cos^2xdx$	
10	$\int \frac{dx}{sin^4x}$	
11	$\int \frac{dx}{sin^6x}$	
12	$\int \frac{dx}{cos^4x}$	
13	$\int \frac{dx}{cos^6x}$	

Alcuni integrali di espressioni trigonometriche si risolvono con formule di ricorrenza

Es. 8

Si calcolino i seguenti integrali

$$\int \boldsymbol{sin^nxdx}, \qquad \int \boldsymbol{cos^nxdx}, \qquad \int \boldsymbol{tg^nxdx}$$

Vale la seguente formula di ricorrenza di cui si omette la dimostrazione

$$\int sin^nxdx = -\frac{1}{n}sin^{n-1}x\,cosx + \frac{n-1}{n}\int sin^{n-2}xdx$$

Analogamente per il secondo e il terzo:

$$\int cos^n x dx = \frac{1}{n} cos^{n-1} x sinx + \frac{n-1}{n} \int cos^{n-2} x dx$$

$$\int tg^n x dx = \frac{1}{n-1} tg^{n-1} x - \int tg^{n-2} x dx$$

Integrali del tipo

$$\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}}\right) \boldsymbol{dx}$$

La sostituzione da effettuare è:

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$$

che fornisce:

$$x = \frac{t^n d - b}{a - ct^n}, \quad dx = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2} dt$$

Un caso particolare è dato quando la funzione integranda presenta due o più radici con indice diverso. Il questo caso basta porre uguale a t la radice n-sima di un certo radicando, dove n rappresenta il m.c.m. degli indici.

Es. 9

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{x}} + \sqrt[3]{\boldsymbol{x}}}$$

Si adopera la sostituzione:

$$t = \sqrt[6]{x}$$

che fornisce:

$$x = t^6, \quad dx = 6t^5 dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\log(t+1) + c$$

E quindi:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6log\left(1 + \sqrt[6]{x}\right) + c$$

1	$\int \frac{\frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{2x+1}}}{1+\sqrt{\frac{x+1}{2x+1}}}dx$	
2	$\int \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}\left(2x-3\sqrt{x}-2\right)}dx$	
3	$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}\left(6x+5-\sqrt{x+1}\right)}dx$	
4	$\int \frac{\sqrt[3]{x}-6}{6x\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^2}-7x}dx$	
5	$\int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{3(x+2)\sqrt[3]{x+2}-2x-4-\sqrt[3]{(x+2)^2}}dx$	
6	$\int \frac{7\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(7\sqrt{x}-1\right)^2}dx$	
7	$\int \frac{\sqrt{x+3}+1}{(x+7)\sqrt{x+3}+4(x+3)}dx$	
8	$\int \frac{\sqrt[3]{x}+3}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$	
9	$\int \frac{\sqrt[3]{x}+3}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$	
10	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$	
11	$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-2\sqrt[3]{x+2}}$	
12	$\int \frac{\sqrt[6]{x}-3}{6x\sqrt[6]{x}-2\sqrt[6]{x^5}-x}dx$	
13	$\int \frac{3+\sqrt{2x+5}}{\sqrt{2x+5}\left(4x+8-3\sqrt{2x+5}\right)}dx$	

14	$$\int \frac{\sqrt[3]{\frac{3x+1}{5x+2}}+3}{\sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{5x+2}\right)^2\left(1+\sqrt[3]{\frac{3x+1}{5x+2}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{(5x+2)^2}dx$$	
15	$$\int \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}\left(2x-3\sqrt{x}-2\right)}dx$$	

Integrali del tipo

$$\int \boldsymbol{R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx}$$

Caso $\boldsymbol{a>0}$

Un integrale del genere si risolve per sostituzione. La sostituzione fa effettuare è

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}(t-x)$$

$$x=\frac{at^2-c}{b+2at}; \qquad dx=\frac{2a(at^2+bt+c)}{(b+2at)^2}dt$$

In questo modo l'integranda si riduce a una funzione della variabile t:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\left(t-\frac{at^2-c}{b+2at}\right)=\sqrt{a}\left(\frac{at^2+bt+c}{b+2at}\right)$$

A titolo di esempio:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad con\ a>0$$

ammette come soluzione, facilmente verificabile tramite la sostituzione appena vista:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}log\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right|+k$$

16	$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+3}}$$	
17	$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+5}}$$	
18	$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+x+1}}$$	
19	$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+x+2}}$$	
20	$$\int \sqrt{x^2+3}dx$$	

21	$\int \frac{dx}{2x+\sqrt{x^2+3}}$	
22	$\int \frac{dx}{3x+\sqrt{x^2+5}}$	
23	$\int \frac{dx}{3x+2\sqrt{x^2+1}}$	
24	$\int \frac{dx}{x-3\sqrt{x^2+5}}$	
25	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2}-1}$	
26	$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+5}-2}$	
27	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3}-2}$	
28	$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+8}-3}$	
29	$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}-1}$	
30	$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}-2}$	

Caso $a < 0$

La sostituzione da effettuare in questo caso è la seguente:

$$\sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}} = t$$

dove x_1, x_2 sono le soluzioni del polinomio sotto radice, che avrà un $\Delta > 0$.

Dalla sostituzione si ricava:

$$x = \frac{x_2+x_1t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2(x_1-x_2)}{(1+t^2)^2}tdt$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \left(\sqrt{|a|}\frac{x_2+x_1t^2}{1+t^2} - x_1\right)t = \sqrt{|a|}(x_2-x_1)\frac{t}{1+t^2}$$

A titolo di esempio:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{2}{\sqrt{|a|}} artg\sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}} + k$$

Come si può facilmente verificare ammettendo la sostituzione appena vista.

31	$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+6}}$	
32	$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+20}}$	
33	$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-5x-6}}$	

34	$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$	
35	$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+8x-3}}$	
36	$\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+9x-2}}$	
37	$\int \frac{dx}{\sqrt{-25x^2+15x-2}}$	
38	$\int \frac{(15x-4)dx}{\sqrt{-25x^2+15x-2}}$	
39	$\int \sqrt{-25x^2+15x-2}\,dx$	
40	$\int \sqrt{-9x^2+15x-4}\,dx$	
41	$\int \sqrt{-x^2+1}\,dx$	

Altri esempi

Es. 10

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{\boldsymbol{sin^4x}}{\boldsymbol{cos^8x}}\boldsymbol{dx}$$

Possiamo procedere per sostituzione di variabile, ponendo

$$tgx = t, \qquad \frac{1}{cos^2x}dx = dt$$

Si ottiene così:

$$\int \frac{sin^4x}{cos^8x}dx = \int \frac{sin^2x \cdot sin^2x}{cos^2x \cdot cos^2x \cdot cos^2x \cdot cos^2x}dx = \int tg^4x(1+tg^2x)\cdot\frac{1}{cos^2x}dx = \int (t^4+t^6)\,dt$$
$$= \frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}+c = \frac{tg^7x}{7}+\frac{tg^5x}{5}+c$$

NB. La sostituzione $tgx = t$ è possibile ogni volta che l'elemento $f(x)dx$ è invariante rispetto a $x \to \pi + x$

Es. 11

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \boldsymbol{cos^5xdx}$$

Tale integrale può essere considerato un particolare caso di integrali del tipo:

$$\int cos^n x\,dx, con\ n\ dispari$$

$$\int cos^5xdx = \int cos^4xcosxdx$$
$$= \int (1 - sin^2x)^2 d(sinx)$$
$$= \int (1 + sin^4x - 2sin^2x) d(sinx) = sinx + \frac{sin^5x}{5} - 2\frac{sin^3x}{3} + c$$

Es. 12

Si calcoli il seguente integrale

$$\int \boldsymbol{cos^4xdx}$$

$$\int cos^4xdx = \int cos^3x \cdot cosxdx$$

Integrando per parti, si ottiene:

$$\int cos^3x \cdot cosxdx$$
$$= cos^3x \cdot sinx + \int sin^2x \cdot 3cos^2xdx = cos^3x \cdot sinx + 3\int (cos^2x - cos^4x)dx = cos^3x$$
$$\cdot sinx + 3\int cos^2xdx - 3\int cos^4xdx$$

Portando il valore dell'ultimo integrale a primo membro e sfruttando la proprietà di additività si ha:

$$\int cos^4xdx = \frac{1}{4}cos^3xsinx + \frac{3}{4}\int cos^2xdx$$

Essendo poi:

$$\int cos^2xdx = \frac{1}{2}\int (1 + cos2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{sin2x}{2}\right)$$

segue che

$$\int cos^4xdx = \frac{3}{16}sin2x + \frac{3}{8}x + \frac{cos^3xsinx}{4} + c$$

Formula di Newton-Leibnitz o secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f:[a,b] \to R$ una funzione che ammette una primitiva F su [a,b]. Se f è integrabile si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[G(x)\right]_a^b = G(b) - G(a)$$

Tale relazione è detta *formula fondamentale del calcolo integrale*.

1	$\int_1^2 \left(x^3 - x + 2\right) dx$	$\left[\frac{17}{4}\right]$
2	$\int_1^2 \left(x^3 + x - 1\right) dx$	$\left[\frac{17}{4}\right]$
3	$\int_1^4 \frac{2x^2+3}{x} dx$	$[15+3\ln 4]$
4	$\int_1^3 \frac{3x^3+2}{x} dx$	$[26+2\ln 3]$
5	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen} x - \cos x) dx$	$\left[1-\sqrt{2}\right]$
6	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \operatorname{sen} x) dx$	$\left[1-\sqrt{2}\right]$
7	$\int_0^2 x e^{x^2} dx$	$\left[\frac{e^4-1}{2}\right]$
8	$\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$	$\left[\frac{e-1}{3}\right]$
9	$\int_{-1}^1 \frac{2x^3-3x^2-10x+9}{x+2} dx$	$\left[\frac{28}{3}+\ln 3\right]$
10	$\int_3^6 \frac{x^3+2x^2-2x+2}{x-1} dx$	$\left[\frac{213}{2}+3\ln\frac{5}{2}\right]$
11	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{\sqrt{1-x}} dx$	$\left[\frac{8-5\sqrt{2}}{3}\right]$
12	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{\sqrt{1+x}} dx$	$\left[\frac{8-3\sqrt{6}}{3}\right]$
13	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+2\cos^2 x} dx$	$\left[\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right]$
14	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+2\operatorname{sen}^2 x} dx$	$\left[\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right]$
15	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1)\operatorname{sen} x\, dx$	$\left[1-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right]$
16	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+1)\cos x dx$	$\left[\frac{\pi\sqrt{2}}{8}+\sqrt{2}-1\right]$

IL CALCOLO DELLE AREE DI SUPERFICI PIANE

Disegna le superfici delimitate dall'asse *x* e dal grafico delle funzioni seguenti, definite negli intervalli indicati, poi calcolane l'area.

1	$y=e^x+1$, $[0;2]$.	$\left[e^2+1\right]$
2	$y=e^x+2$, $[0;1]$.	$[e+1]$
3	$y=-x^2+2x$, $[-1;2]$.	$\left[\frac{8}{3}\right]$
4	$y=-x^2-2x$, $[-2;1]$.	$\left[\frac{8}{3}\right]$
5	$y=x^3-6x^2+11x-6$, $[1;3]$	$\left[\frac{1}{2}\right]$
6	$y=x^3-3x^2+2x$, $[0;2]$.	$\left[\frac{1}{2}\right]$
7	Determina l'area della regione finita di piano delimitata dalla retta di equazione $2x+2y-9=0$ e dall'iperbole di equazione $y=\frac{2}{x}$. $\left[\frac{63}{8}-3\ln 4\right]$	
8	Determina l'area della regione finita di piano delimitata dalla retta di equazione $2x-2y-9=0$ e dall'iperbole di equazione $y=-\frac{2}{x}$. $\left[\frac{63}{8}-3\ln 4\right]$	

Esercizi di riepilogo sugli integrali

1	$\int \frac{3x-2}{9x^2-6x+1}dx$	
2	$\int \frac{2}{x^2+8x+18}dx$	
3	$\int \frac{1}{4x^2-4x+3}dx$	
4	$\int \frac{x+4}{x^2+2x+3}dx$	
5	$\int \frac{x-2}{x^2+2x+5}dx$	
6	$\int \frac{x-2}{x^2+2x+5}dx$	
7	$\int \frac{2x+1}{x^3-1}dx$	
8	$\int \frac{x-3}{1-x^3}dx$	
9	$\int \frac{5x^4+2x^2+4x}{3x^5+2x^3+6x^2-3}dx$	
10	$\int \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+1}dx$	
11	$\int \frac{3x-1}{x+2}dx$	

12	$\int \frac{2x-1}{2x+1} dx$	
13	$\int \frac{2x-1}{x^2+2x-24} dx$	
14	$\int \frac{x-7}{x^2-2x-8} dx$	
15	$\int \frac{x+1}{x^2-8x+16} dx$	
16	$\int \frac{tgx}{1-cosx} dx$	
17	$\int \frac{2}{3+\sqrt{x}} dx$	
18	$\int \frac{2}{e^x+e^{-x}} dx$	
19	$\int \sqrt[3]{e^{2x}}(e^x+1)dx$	
20	$\int \frac{xcos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx$	
21	$\int \frac{dx}{cosx \cdot sin^2x}$	
22	$\int \frac{cosx}{cos^2x-2sinx-3} dx$	
23	$\int \frac{3+tgx}{cosx} dx$	
24	$\int \frac{1}{1+sinx+cosx} dx$	$log\left\|1+tg\frac{x}{2}\right\|+c$
25	$\int \frac{1+sinx}{1-sinx} dx$	$-x+\frac{4}{cotg\frac{x}{2}-1}+c$
26	$\int \frac{3+tgx}{cosx} dx$	$\frac{1}{cosx}+3log\left\|\frac{tg\frac{x}{2}+1}{tg\frac{x}{2}-1}\right\|+c$
27	$\int \frac{1}{1+cosx} dx$	$tg\frac{x}{2}+c$
28	$\int \frac{1}{1+cos^2x} dx$	$\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}}+c$
29	$\int e^{3-4x}dx$	$-\frac{1}{4}e^{3-4x}+c$
30	$\int \frac{x^4-3x}{x^2+2x+1} dx$	$3x-x^2+\frac{1}{3}x^3-7log\|x+1\|-\frac{4}{x+1}+c$
31	$\int \frac{e^x(x+1)}{xe^x+1} dx$	$log(xe^x+1)+c$
32	$\int \frac{cosx-1}{sin\frac{x}{2}} dx$	$4cos\frac{\pi}{2}+c$
33	$\int \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx$	$-2\sqrt{4-x}+c$
34	$\int sin^6xcosx\,dx$	$\frac{sin^7x}{7}+c$

35	$\int \frac{2}{x^2+x+1}dx$	$\frac{4}{3}\sqrt{3}arctg\frac{1}{3}\sqrt{3}(2x+1)+c$
36	$\int \sqrt[3]{x}logxdx$	$\frac{3}{16}x\sqrt[3]{x}(4logx-3)+c$
37	$\int \frac{x+1}{x}logxdx$	$xlogx-x+\frac{1}{2}log^2x+c$
38	$\int \frac{1}{\sqrt{4+9x^2}}dx$	$\frac{1}{3}log\left(\frac{3}{2}x+\sqrt{\frac{9}{4}x^2+1}\right)+c$
39	$\int \sqrt{9+x^2}dx$	$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9}+\frac{9}{2}log\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)+c$
40	$\int \frac{cos2x}{cosx+sinx}dx$	$sinx+cosx+c$
41	$\int \frac{sin2x+sinx}{sinx}dx$	$x+2sinx+c$
42	$\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx$	$arctg(x+2)+c$
43	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+9}}dx$	$-\frac{1}{3}log\left\|\frac{3+\sqrt{x^2+9}}{x}\right\|+c$
44	$\int \frac{1}{x\sqrt{16-x^2}}dx$	$-\frac{1}{4}log\left\|\frac{4+\sqrt{16-x^2}}{x}\right\|+c$
45	$\int \frac{x^2}{(x^2-9)^2}dx$	$\frac{1}{12}log\left\|\frac{x-3}{x+3}\right\|-\frac{x}{2x^2-18}+c$
46	$\int arccosxdx$	$xarccosx-\sqrt{1-x^2}+c$
47	$\int \frac{logx}{x^3}dx$	$-\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x^2}logx+c$
48	$\int \frac{x^3-x^2}{x^2+4}dx$	$\frac{1}{2}x^2-x-2log(x^2+4)+2arctg\frac{x}{2}+c$
49	$\int loge^{x^2}dx$	$\frac{x^3}{3}+c$
50	$\int e^{2x}cos3xdx$	$\frac{e^{2x}}{13}(2cos3x+3sin3x)+c$
51	$\int \frac{3x^3+7x^2+4x-1}{3x^2+7x+2}dx$	
52	$\int \frac{4x^3+4x^2-18x+11}{2x^2+5x-3}dx$	
53	$\int \frac{3x^4-10x^2+9x-4}{(x-1)^2}dx$	
54	$\int \frac{x^4+2x^3+9x^2+8x+2}{x(x^2+2x+2)}dx$	
55	$\int \frac{2x^4+x^3+7x^2+5x+2}{x(x^2+x+2)}dx$	
56	$\int \frac{x^4+x^3+x^2+3x+18}{(x+1)^2(x^2+2x+5)^2}dx$	