UNIVERSITA' DEGLI STUDI DEL MOLISE

Prova scritta del 23/09/2014 – Analisi Matematica

Corso di studi in Ingegneria edile

Prof. R. Capone

I modulo

SOL.1

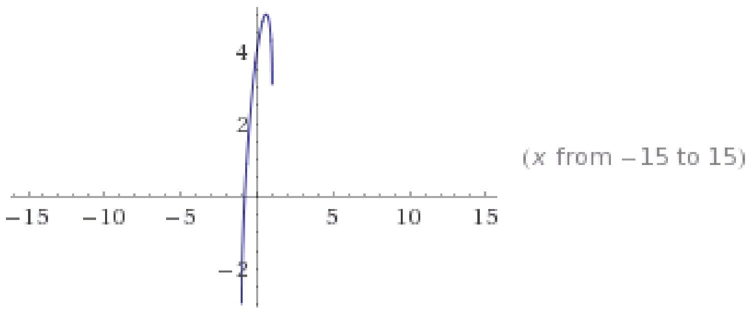
Studiare la seguente funzione e rappresentarla graficamente evidenziando se presenta discontinuità

$$f(x) = 3x + 4\sqrt{1-x^2}$$

La funzione è definita per $x \in [-1; 1]$
Inoltre risulta $y(-1) = -3$ e $y(1) = 3$
Non ci sono asintoti
La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{1-x^2} - 4x}{\sqrt{1-x^2}}$$

che si annulla soltanto per $x = \frac{3}{5}$
Non vi sono flessi.
Il grafico della funzione è il seguente:



SOL.2

Si risolva il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x^3} - \sqrt{1+x^3}}{(\sqrt[4]{1+x^2} - 1)\cdot(3^x - 1)}$$

La forma indeterminata 0/0 si può facilmente risolvere facendo ricorso ai limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left[(1+2x^3)^{\frac{1}{2}} - 1\right] - \left[(1+x^3)^{\frac{1}{2}} - 1\right]}{\left((1+x^2)^{\frac{1}{4}} - 1\right)\cdot(3^x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\left[(1+2x^3)^{\frac{1}{2}} - 1\right]}{2x^3} 2x^3 - \frac{\left[(1+x^3)^{\frac{1}{2}} - 1\right]}{x^3} x^3}{\frac{\left((1+x^2)^{\frac{1}{4}} - 1\right)\cdot(3^x - 1)}{x^3} x^3}$$

Con semplici calcoli si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x^3} - \sqrt{1+x^3}}{(\sqrt[4]{1+x^2} - 1)\cdot(3^x - 1)} = \frac{2}{log3}$$

SOL. 3

Si calcoli Il dominio della seguente funzione e lo si rappresenti nel piano cartesiano

$$f(x,y) = arcsin\left(\frac{x+y-1}{x-y+1}\right)$$

Si calcoli, se esiste, il gradiente della funzione nel punto (0,0)

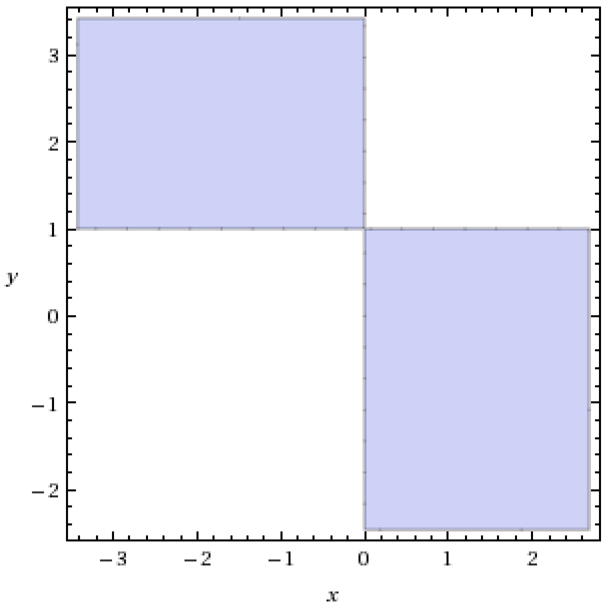
La funzione è definita sotto le condizioni

$$-1 \leq \frac{x+y-1}{x-y+1} \leq 1, \qquad x-y+1 \neq 0$$

Si è così ricondotti a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y-1}{x-y+1} \leq 1 \\ \dfrac{x+y-1}{x-y+1} \geq -1 \\ x-y+1 \neq 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema di ottiene:



II modulo

SOL. 1

Si calcoli il seguente integrale doppio

$$\iint_D \cos(x+y) \cdot e^{x-y} dxdy$$

dove D è il dominio definito dalle limitazioni

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 : |x+y| \leq \frac{\pi}{2}, |x-y| \leq 1\right\}$$

Si può effettuare il cambiamento di variabili:

$$x+y=u, \quad x-y=v$$

	Al dominio D, corrisponde, nel piano (u, v), il dominio T definito dalle limitazioni: $$\|u\| \leq \frac{\pi}{2}, \quad \|v\| \leq 1$$ Il determinante funzionale vale: $$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$ Si ha quindi: $$\iint_D \cos(x+y) \cdot e^{x-y} dxdy = \frac{1}{2} \iint_T cosu \cdot e^v dudv = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cosudu \int_{-1}^{1} e^v dv = e - \frac{1}{e}$$
SOL. 2	Si risolva almeno una delle seguenti equazioni differenziali: $$a. \quad y' + ysinx = sin2x$$ Si tratta di una equazione lineare del I ordine non omogenea $$b. \quad y''' - 2y'' + 5y' = e^x(x^2 + 3x + 1)$$ b. Le radici dell' equazione caratteristica della omogenea associata sono: $$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1 - 2i, \lambda_3 = 1 + 2i$$ Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea vale: $$y_0(x) = c_1 + e^x(c_2 cos2x + c_3 sin2x)$$ Un integrale particolare sarà nella forma $$y_p(x) = e^x(Ax^2 + Bx + C)$$ Per cui, sostituendolo all'interno dell'equazione differenziale e utilizzando il principio di identità tra polinomi, si ottiene: $$A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}, C = -\frac{1}{8}$$
SOL. 3	Dimostrare che la seguente forma differenziale è esatta e trovare il suo integrale indefinito $$(2x \cdot cosy - y^2 sinx)dx + (2y \cdot cosx - x^2 siny)dy$$ L'integrale indefinito della forma differenziale è $$f(x,y) = x^2 cosy + y^2 cosx + c$$
SOL. 4	Calcolare l'integrale curvilineo di $f(x,y) = x + y$ lungo la curva γ, parametrizzazione del triangolo di vertici A(1,0), O(0,0), B(0,1). La curva γ che parametrizza il bordo del triangolo di vertici siffatti è regolare a tratti. Siano $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ le curve che parametrizzano rispettivamente i lati OA, AB e BO. Dunque si ha che: $$\int_\gamma f \cdot ds = \int_{\gamma_1} f \cdot ds + \int_{\gamma_2} f \cdot ds + \int_{\gamma_3} f \cdot ds$$ dove: $$\gamma_1: [0,1] \to R^2 \qquad \gamma_1(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$$ $$\gamma_2: [0,1] \to R^2 \qquad \gamma_2(t) = \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases}$$ $$\gamma_3: [0,1] \to R^2 \qquad \gamma_3(t) = \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \end{cases}$$

	Le curve $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono regolari. Infatti sono derivabili con derivata continua. Inoltre, $\forall t \in [0,1]$, si ha che: $$f(\gamma_1(t)) = f(t,0) = t \qquad \|\gamma_1'(t)\| = 1$$ $$f(\gamma_2(t)) = f(1-t,t) = 1 \qquad \|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{2}$$ $$f(\gamma_3(t)) = f(0,1-t) = 1-t \qquad \|\gamma_3'(t)\| = 1$$ Dunque, l'integrale curvilineo è: $$\int_\gamma f \cdot ds = \int_{\gamma_1} f \cdot ds + \int_{\gamma_2} f \cdot ds + \int_{\gamma_3} f \cdot ds = \int_0^1 t dt + \sqrt{2}\int_0^1 dt + \int_0^1 (1-t) dt = 1 + \sqrt{2}$$