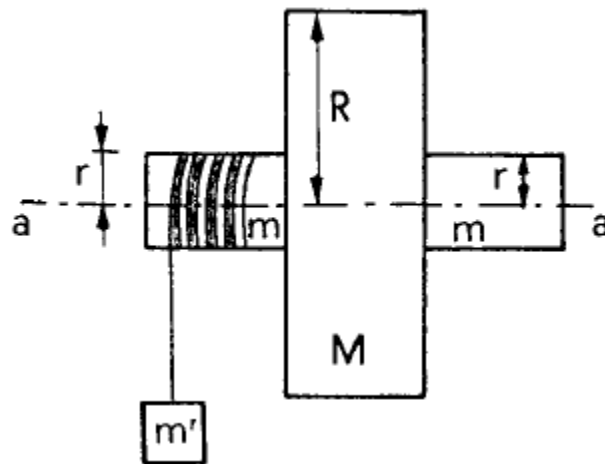


Lezione 5 - Meccanica del punto materiale

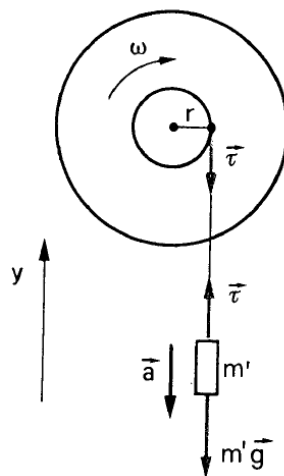
Esercizio 1

Un volano è costituito da un cilindro rigido omogeneo, di massa  $M$  e raggio  $R$ , saldato ad un albero cilindrico rigido ed omogeneo, coassiale al primo cilindro, di raggio  $r$  e massa  $2m$ . L'asse  $a$  dell'intero sistema è disposto orizzontalmente e non ci sono attriti apprezzabili. Intorno all'albero è avvolto un sottile filo inestensibile, in modo da non slittare sull'albero, alla cui estremità è appesa una massa  $m'$ . Si calcoli l'accelerazione angolare del volano

$$\dot{\omega} = \frac{2m'gr}{MR^2 + 2(m + m')r^2}$$



Svolgimento



Il problema può essere risolto applicando la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi sull'asse  $a$ :

$$M = \frac{dP}{dt}$$

Sull'asse a:

$$M_a = \frac{dP_a}{dt} = \frac{d(I_a \omega)}{dt} = I_a \dot{\omega}$$

Essendo  $M_a = r \cdot \tau$

Dove  $\tau$  è la tensione del filo e

$$\tau = m'g - m'\dot{\omega}r$$

Dunque:

$$r \cdot \tau = r(m'g - m'\dot{\omega}r) = I_a \dot{\omega}$$

E' necessario ancora valutare  $I_a$ :

$$I_a = \frac{1}{2}MR^2 + 2 \frac{1}{2}mr^2 = \frac{MR^2 + 2mr^2}{2}$$

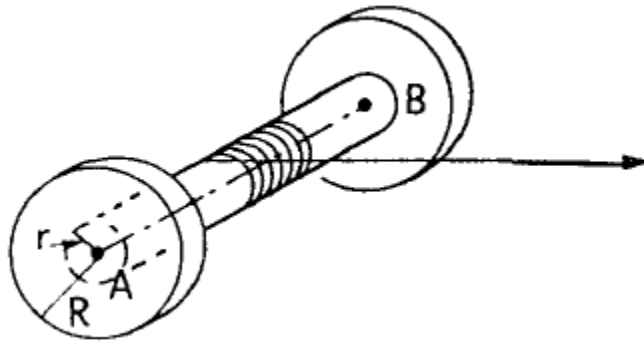
Per cui:

$$\dot{\omega} = \frac{2m'gr}{MR^2 + 2mr^2 + 2m'r^2} = \frac{2m'gr}{MR^2 + 2(m+m')r^2}$$

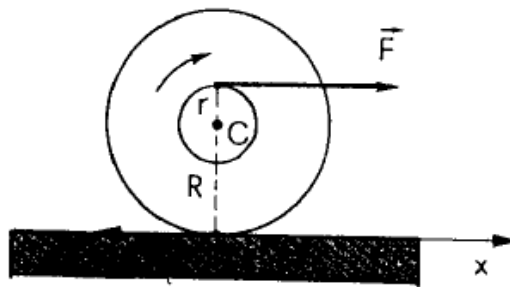
## Esercizio 2

Un sistema rigido omogeneo a forma di rocchetto è costituito da due ruote cilindriche di raggio R collegate da un asse cilindrico di raggio r. Il momento d'inerzia del sistema, rispetto al suo asse di simmetria AB, vale I, mentre la massa totale del rocchetto è M. un filo inestensibile, flessibile e di massa trascurabile è avvolto intorno all'asse e non può scivolarvi sopra. Al filo è applicata una forza F orizzontale, perpendicolare all'asse del rocchetto e costante. Il filo si svolge dalla parte superiore dell'asse. Si determini l'accelerazione del centro di massa del rocchetto nell'ipotesi di puro rotolamento

$$a = \frac{R(R+r)}{I + MR^2} F$$



### Svolgimento



### METODO 1

Applichiamo le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi:

$$\begin{cases} F_x = F - f_A = M a_c \\ M_c = rF + Rf_A = I\dot{\omega} = I \frac{a_c}{R} \end{cases}$$

La forza di attrito  $f_A$  garantisce il puro rotolamento.

Dal sistema si ricava:

$$a_c = \frac{R(R+r)}{I + MR^2} F$$

### METODO 2

Applichiamo il teorema dell'energia cinetica:

$$F \cdot x_A = \Delta K = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_c^2}{R^2}$$

Derivando rispetto al tempo da entrambe le parti:

$$F \cdot v_A = \left( \frac{1}{2} M + \frac{1}{2} \frac{I}{R^2} \right) 2v_c a_c$$

Da osservare che  $v_A \neq v_c$

Infatti:

$$x_A = x_c + r\Delta\theta = x_c + r\frac{x_c}{R} = x_c\left(\frac{R+r}{R}\right)$$

Derivando rispetto al tempo:

$$v_A = v_c\left(\frac{R+r}{R}\right)$$

Pertanto:

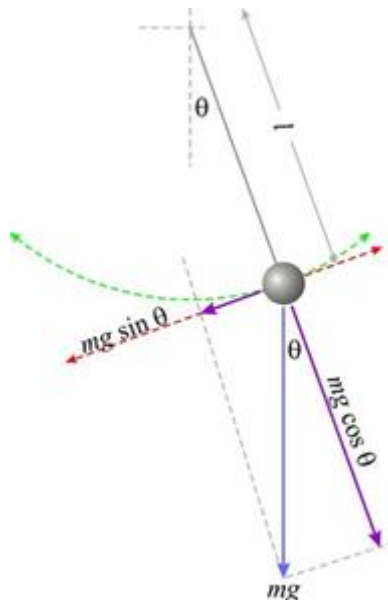
$$Fv_c\left(\frac{R+r}{R}\right) = \left(\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}\right)2v_c a_c$$

Da cui, con opportune semplificazioni:

$$a_c = \frac{R(R+r)}{I + MR^2}F$$

## Il pendolo semplice

Il **pendolo semplice** o **pendolo matematico** è un sistema fisico costituito da un filo inestensibile e da una massa puntiforme  $m$  fissata alla sua estremità e soggetta all'attrazione gravitazionale (che supponiamo uniforme nello spazio e costante nel tempo). Questo sistema apparentemente banale è stato reso celebre dall'impegno sperimentale e teorico profuso da Galileo Galilei, che ne ha correttamente descritto la proprietà principale, ovvero l'isocronismo.



Analizziamo nel dettaglio la dinamica di questo sistema.

Il sistema è in equilibrio quando la massa  $m$  occupa la posizione verticale (centro di oscillazione) cioè quando si trova sulla verticale passante per  $O_1$  (centro di sospensione).

La pallina, se spostata dalla posizione di equilibrio e poi lasciata, compie delle oscillazioni. Se si considera la posizione **in figura** (massimo spostamento positivo) e si scompone il peso  $P$  della pallina nelle due

componenti perpendicolare e parallela allo spostamento, si osserva che solo la componente parallela produce moto, dato che la componente perpendicolare è equilibrata dalla tensione del filo.

L'intensità della forza è massima nella posizione in figura diminuisce man mano che la pallina si sposta verso la posizione di equilibrio **O**, diventa nulla in quest'ultima posizione.

La pallina, giunta in **O**, prosegue per inerzia, però rallentando (in **O** la forza cambia verso e diventa opposta al moto), e raggiunge la posizione di massimo spostamento negativo che è pressoché simmetrica di quella **in figura** rispetto alla posizione di equilibrio.

In questa nuova posizione la forza che produce moto ha intensità massima, ma tale intensità diminuisce man mano che la pallina, invertito il senso di moto, si sta riportando verso la posizione di equilibrio.

La massa dunque oscilla da entrambe le parti rispetto alla sua posizione di equilibrio realizzando un moto armonico semplice. Per descrivere il moto dal punto di vista dinamico supponiamo innanzitutto che

- Il filo è inestensibile e privo di massa
- Non si considera l'attrito dell'aria

Le forze che agiscono sulla massa nella posizione in figura sono:

la forza peso  $mg$  rappresentata da un vettore di colore azzurro decomposta secondo una componente parallela al moto  $mg \sin \theta$  e perpendicolare al moto  $mg \cos \theta$

Applichiamo la ben nota legge di Newton

$$F = ma$$

Poiché la massa è obbligata a muoversi su un percorso circolare non vi è necessità di considerare nessun'altra forza che sia responsabile di accelerare la massa. Pertanto possiamo scrivere

$$F_{\parallel} = mg \sin \theta = ma$$

cioè la massa è soggetta ad una accelerazione

$$a = g \sin \theta$$

che non dipende dalla massa del pendolo

La forza perpendicolare, equilibrata dalla tensione del filo è, invece,

$$F_{\perp} = mg \cos \theta$$

Se vogliamo ricavare la velocità con cui la massa  $m$  passa per la posizione di equilibrio, dobbiamo tenere presente che l'accelerazione  $a$  a cui essa è sottoposta è una accelerazione centripeta

$$a_c = \frac{v^2}{l}$$

Dove  $l$  è la lunghezza del filo, ovvero il raggio dell'arco di circonferenza descritto dal punto materiale.

Pertanto, sostituendo nella relazione  $a = g \sin \theta$ , si ha:

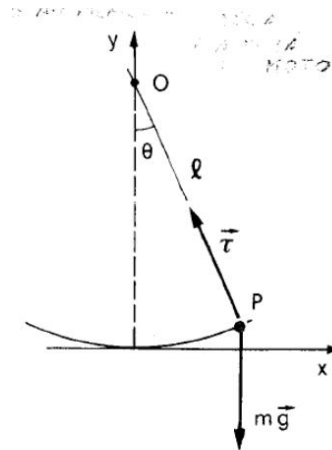
$$\frac{v^2}{l} = g \sin \theta$$

e cioè

$$v = \sqrt{lg \sin \theta}$$

Si tratta di un moto periodico ovvero del moto di un punto materiale che dopo un certo intervallo di tempo (che prende il nome di periodo) torna nelle condizioni iniziali. Tale periodo vale

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} *$$



Se scegliamo come polo il punto di sospensione O, potremo scrivere, relativamente al momento esercitato dalle forze:

$$m = OP \times F = OP \times (\tau + mg) = OP \times mg$$

Avendo tenuto presente che OP e  $\tau$  sono fra loro paralleli.

$$OP \times mg = \frac{dp}{dt} = \frac{d(OP \times mv)}{dt}$$

$$-lmg \sin\theta = lm \frac{dv}{dt} = lm \frac{d\left(l \frac{d\theta}{dt}\right)}{dt} = l^2 m \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Eseguendo le opportune semplificazioni si ottiene:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

Nello scrivere questa equazione si è tenuto conto che:

Il vettore OP (di modulo pari a l) e il vettore mg formano un angolo  $\theta$ : il modulo del loro prodotto vettoriale vale pertanto  $|lmg \sin\theta|$ ;

La proiezione lungo l'asse z di tale prodotto vettoriale vale  $-lmg \sin\theta$ ;

La velocità v del punto materiale è tangenziale alla circonferenza di raggio l e centro O ed è dunque ortogonale a OP. Inoltre,  $v = OP \cdot \frac{d\theta}{dt} = l \cdot \frac{d\theta}{dt}$ .

Per valori di  $\theta$  molto piccoli, si può approssimare  $\sin\theta = \theta$ , ottenendo così l'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

La soluzione di tale equazione ci fornisce l'espressione:

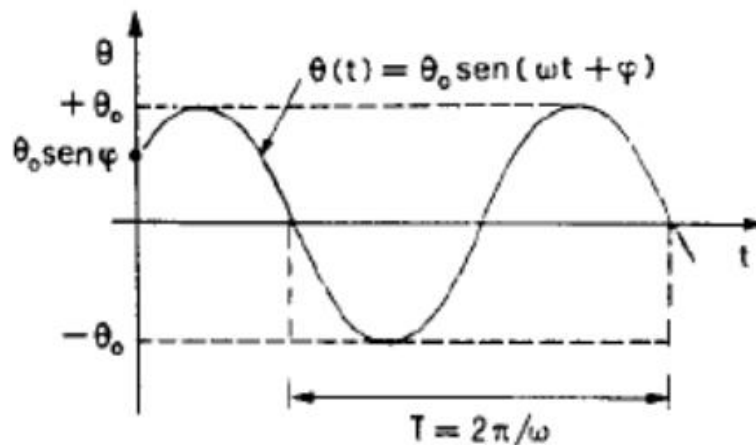
$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

che esprime come varia l'angolo  $\theta$  in funzione del tempo.

Un moto, la cui legge oraria è rappresentata da una espressione siffatta prende il nome di moto oscillatorio armonico:

- $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  rappresenta la pulsazione del moto armonico;
- l'angolo  $\theta$  rappresenta l'ampiezza angolare del moto;
- all'istante  $t=0$ , l'angolo  $\theta = \theta_0 \sin \varphi$ , dove  $\varphi$  rappresenta la fase iniziale;
- il moto si ripete con regolarità ogni qualvolta trascorre un tempo caratteristico  $T$  detto periodo legato alla pulsazione dalla relazione:

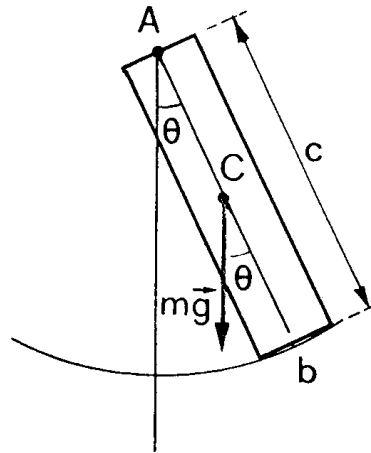
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$



### Il pendolo conico

Una piastra metallica rettangolare omogenea di massa  $m$  con i lati  $b$  e  $c$ , è appesa a un'asse orizzontale ortogonale ad essa e passante per il punto mediano  $A$  del suo lato minore  $b$ . Si determini:

- La legge del moto per piccole oscillazioni;
- La risultante  $R$  e il momento risultante  $\tau$  delle reazioni vincolari



La sola forza attiva è la forza peso; pertanto:

$$|AC \times mg| = I_a \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Proiettando sull'asse a del momento della forza peso:

$$|AC \times mg| = -mg \frac{c}{2} \sin\theta$$

Da cui:

$$-mg \frac{c}{2} \sin\theta = I_a \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

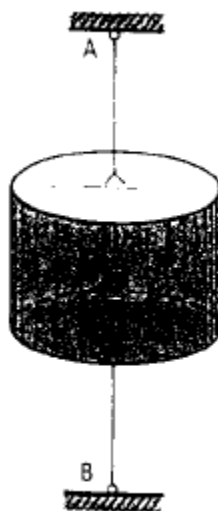
Per piccole oscillazioni  $\sin\theta = \theta$ :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgc}{2I_a} \theta = 0$$

La soluzione è del tipo:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Il pendolo di torsione



**Il pendolo di torsione** è costituito da un cilindro omogeneo teso fra due vincoli A e B. Ruotando inizialmente il cilindro di un angolo  $\theta_0$  e abbandonandolo da fermo esso prende a oscillare in virtù del momento assiale di richiamo  $M = -c\theta$  con cui il filo reagisce alla torsione. Si avrà:



$$-c\theta = I_a \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ovvero:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{I_a}\theta = 0$$