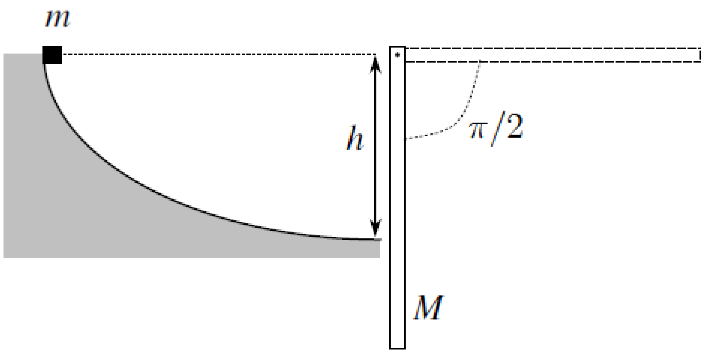
Università degli studi di Salerno – corso di studi in Ingegneria Informatica – TUTORATO DI FISICA

Lezione 5 - Meccanica dei sistemi rigidi

Esercizi svolti

Esercizio n°1

Un corpo di massa $m = 0.50\,kg$, dopo essere scivolato lungo il piano inclinato di figura, urta orizzontalmente un'asta rigida (sottile) verticale di massa $M = 5.0\,kg$ e lunghezza $l = 80\,cm$. Lo scivolo ha un'altezza $h = 50\,cm$ e l'asta è appesa per un suo estremo intorno al quale può ruotare liberamente (vedi figura). Sapendo che l'urto tra corpo e asta è completamente anelastico, determinare la velocità iniziale v_0 con il quale il corpo deve essere lanciato affinché, dopo l'urto, l'asta ruoti di un angolo massimo pari a $\pi/2$.



Soluzione

Nella rotazione finale del sistema asta + corpo si conserva l'energia meccanica. Quindi, detta ω_0 la velocità angolare del sistema asta + corpo subito dopo l'urto, possiamo scrivere

$$\frac{1}{2} I_{tot}\omega_0^2 = \left[mgh + Mg\frac{l}{2}\right]$$

Da qui si può ricavare la velocità angolare

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g(M \cdot l + 2mh)}{I_{tot}}} = 6.09\,rad/s$$

dove

$I_{tot} = I + mh^2$ è il momento d'inerzia del sistema asta + corpo .

Nell'urto completamente anelastico tra corpo ed asta si conserva il momento angolare del sistema rispetto all'asse dove è appesa l'asta. Quindi, se v_h è la velocità del corpo in fondo allo scivolo, possiamo scrivere:

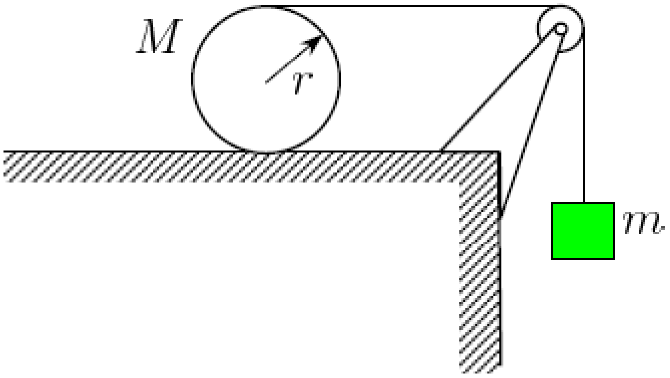
$$mv_h h = I_{tot}\omega_0 \qquad \rightarrow \qquad v_h = \frac{I_{tot}\omega_0}{mh} = 30.0\,m/s$$

Infine, applicando la conservazione dell'energia anche al moto del corpo lungo lo scivolo, otteniamo:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_h^2 \qquad \rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{v_h^2 - 2gh} = 29.8\,m/s$$

Esercizio n°2

Si consideri il sistema rappresentato nella figura a destra in cui un cilindro pieno di massa $M = 5.0\,kg$ e raggio $r = 15\,cm$ viene tirato da una corda (avvolta su di esso) a cui è appeso (all'altro capo) un corpo di massa $m = 2.0\,kg$.
Trattando la puleggia come ideale e la corda come ideali e supponendo che il cilindro rotoli senza scivolare, si determini:
a) l'accelerazione con cui scende il corpo di massa m;
b) il minimo valore del coefficiente di attrito statico $\mu_{s,min}$ necessario affinché il cilindro non scivoli.



Soluzione

Detta T la tensione della corda, considerando le forze applicate ai due corpi, applicando la seconda legge della dinamica possiamo scrivere le seguenti

$$ma = mg - T; Ma_c = T + f_A$$

dove a è l'accelerazione (verso il basso) del corpo di massa m, a_c è l'accelerazione (verso destra) del centro di massa del cilindro e f_A è il modulo della forza di attrito statico (diretto verso destra) tra cilindro e piano d'appoggio. D'altra parte, rispetto al punto di istantaneo contatto del cilindro con il piano d'appoggio, la seconda legge della dinamica in forma angolare ci dà

$$(I + Mr^2)\alpha = 2T \cdot r$$

dove $I = \frac{1}{2}Mr^2$ è il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse passante per il suo centro di massa e $\alpha = a_c/r$ è l'accelerazione del cilindro.
Ora, tenendo presente che la corda tira il cilindro dal punto più alto, si capisce che è $a_c = a/2$.
Perciò, dall'ultima relazione ricaviamo

$$T = \frac{1}{3}Ma$$

e quindi

$$ma = mg - \frac{1}{3}Ma \quad \rightarrow \quad \left(m + \frac{1}{3}M\right)a = mg \quad \rightarrow \quad a = \frac{3mg}{3m + M}$$

Conseguentemente, la forza di attrito è:

$$f_A = Ma_c - T = \frac{1}{2}Ma - \frac{1}{3}Ma = \frac{1}{6}Ma = \frac{mMg}{2(3m + M)}$$

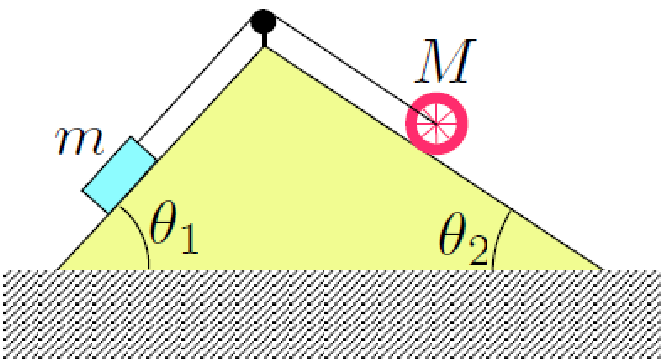
Da questa ricaviamo che il coefficiente di attrito statico deve essere perlomeno pari a

$$\mu_{s,min} = \frac{f_A}{N} = \frac{f_A}{Mg} = \frac{m}{2(3m + M)} = 0.091$$

Esercizio n°3

Una ruota di raggio R e di massa M può rotolare senza strisciare lungo un piano inclinato di un angolo θ_2, ed è collegato tramite un filo inestensibile ad un blocco di massa m, che a sua volta può scivolare su un piano inclinato di un angolo θ_1 e privo di attrito.

1. Disegnare le forze che agiscono sul corpo m e scrivere la legge che determina il suo moto;
2. Disegnare le forze che agiscono sul corpo M e scrivere le leggi che determinano il suo moto;
3. Risolvere le equazioni ottenute nei punti precedenti e determinare l'accelerazione del sistema e la forza di attrito in funzione di m, M, θ_1 , θ_2
4. Determinare i valori espliciti dell'accelerazione e della forza di attrito nel caso particolare di $m = 5\,Kg, M = 7\,Kg, \theta_1 = 60°, \theta_2 = 30°$ e commentare se la ruota sale o scende;
5. Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito (statico o dinamico?) del piano su cui si trova la ruota, affinché la ruota rotoli senza strisciare



Lo svolgimento dettagliato è stato fatto a lezione

(NOTA BENE: E' importante notare la differenza tra il presente caso di un anello che rotola senza strisciare ed il caso di un punto materiale che striscia lungo un piano scabro. Per l'anello che rotola senza strisciare la forza di attrito è di tipo statico ed è un'incognita. Al contrario, se al posto dell'anello avessimo avuto un punto materiale di massa M, la forza di attrito sarebbe stata di tipo dinamico, e sarebbe stata pari a $\mu_d M g cos\theta$, dove μ_d denota il coefficiente di attrito dinamico.)

Esercizi proposti

Esercizio n°1

Un cilindro omogeneo di massa $M = 10\,Kg$ e raggio $R = 0.5\,m$, inizia a muoversi da una altezza $h = 1\,m$, lungo un piano inclinato scabro di angolo $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale. Si determini il valore minimo del coefficiente di attrito statico tra il piano ed il cilindro perché questo rotoli senza strisciare. Se il valore effettivo è $\mu_s = 2\mu_{s,min}$ si calcoli il tempo impiegato dal cilindro per raggiungere la base del piano.

Esercizio n°2

Un'asta rigida omogenea di sezione trascurabile, massa $M = 5\,Kg$ e lunghezza $L = 1\,m$ può ruotare con attrito trascurabile attorno a un asse orizzontale passante per un suo estremo. L'asta, inizialmente in quiete in posizione orizzontale, viene lasciata libera di ruotare sotto l'azione della forza peso. Quando essa si trova nella posizione verticale, colpisce con il suo estremo inferiore una massa $m = 1\,Kg$ che rimane attaccata all'asta. Si calcoli:

1. La velocità angolare dell'asta un'istante prima di colpire la massa m;
2. La velocità angolare dell'asta e la massa m subito dopo l'urto;
3. L'angolo massimo θ_{max} raggiunto dall'asta dopo l'urto.

Esercizio n°3

Un corpo di massa $m = 250\,g$ è lanciato con velocità v_0 verso l'estremità inferiore di un'asta sottile di massa $M = 1.2\,Kg$ e lunga $L = 55\,cm$, appesa con l'estremo superiore in un punto attorno a cui è libera di ruotare. Se il piano orizzontale presenta un coefficiente di attrito dinamico $\mu_D = 0.45$ e la distanza iniziale del corpo dalla base dell'asta è $d = 2.5\,m$ si calcoli, nell'ipotesi che il corpo resti attaccato all'asta, il valore minimo di v_0 affinché essa raggiunga un angolo massimo di $\pi/4$ rispetto alla verticale.