Prof. Roberto Capone

Richiami di Cinematica

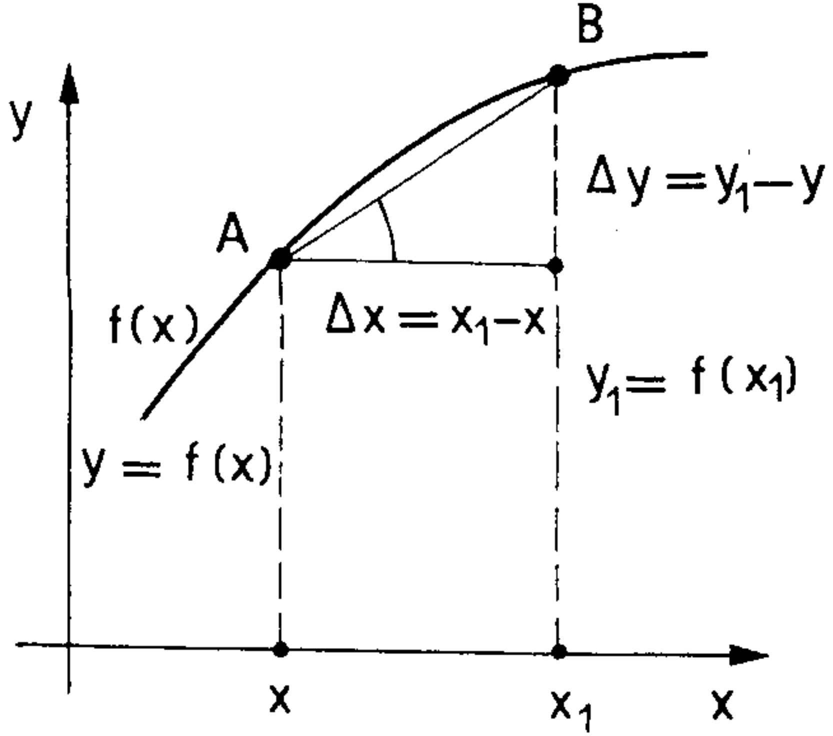
Corso di Complementi di Fisica 2014/2015

Corso di laurea in Ingegneria edile

Università degli Studi del Molise

La derivata

Siano x e y due variabili reali e sia f(x) una funzione che lega la variabile dipendente y alla variabile indipendente x



Consideriamo due valori x e x_1 della variabile indipendente appartenenti all'intervallo di definizione e siano y e y_1 i corrispondenti valori della variabile dipendente:

$$y = f(x); \quad y_1 = f(x_1)$$

Chiamiamo anche Δx e Δy gli incrementi, rispettivamente, della variabile indipendente e della variabile dipendente

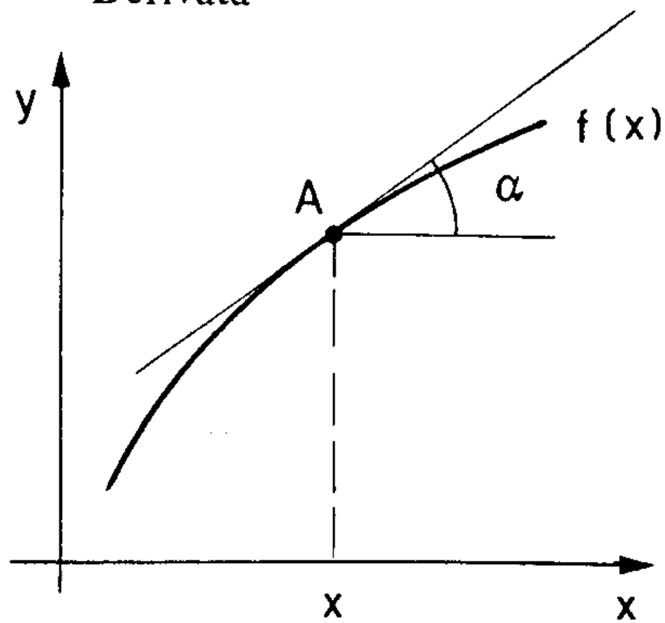
$$\Delta x = x_1 - x; \quad \Delta y = y_1 - y$$

Calcoliamo il rapporto incrementale $\Delta y/\Delta x$

La derivata

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

Derivata



Funzione derivabile

Il significato geometrico del rapporto incrementale appare evidente dalla figura: se le unità di misura delle lunghezze sull'asse x e y sono fra loro uguali, il rapporto incrementale rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo che la corda AB forma con l'asse x.

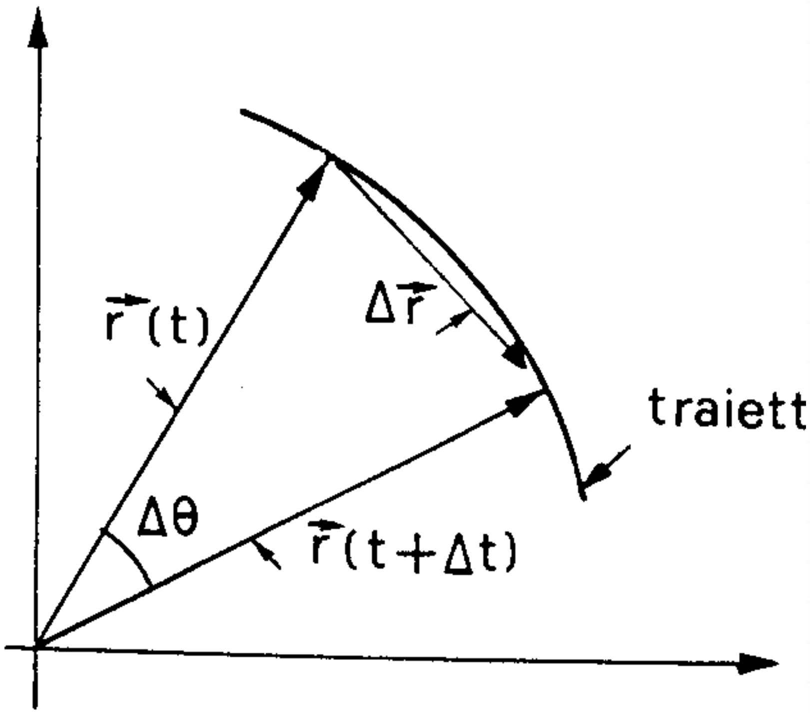
Se considero il limite del rapporto incrementale per Δx che tende a zero, tale limite è detto derivata della funzione f(x)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Il significato geometrico della derivata segue facilmente dal significato geometrico del rapporto incrementale: quando Δx tende a zero, il punto B tende a sovrapporsi al punto A e la corda AB diviene la tangente geometrica alla curva nel punto A

La derivata

Il concetto di derivata di ricollega dal punto di vista fisico al concetto di grandezza istantanea. Ad esempio, per la velocità, si ha:

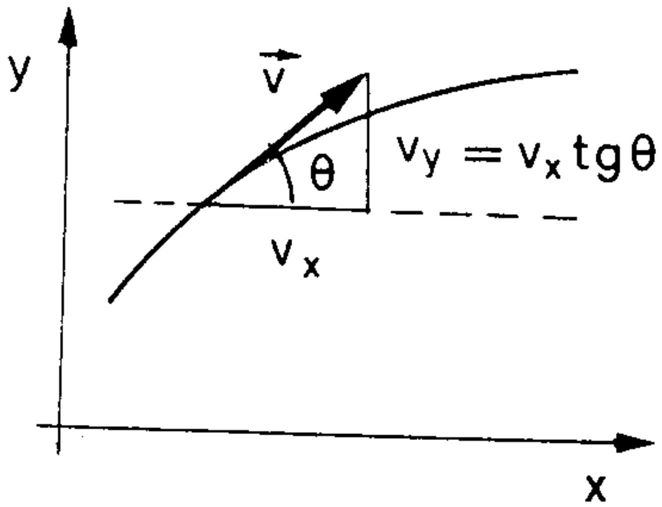


$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

La velocità istantenea di un punto è quel vettore che si ottiene derivando il vettore posizione di quel punto.
L'incremento $r(t+\Delta t) - r(t)$ è rappresentato dalla corda della traiettoria
Al tendere di Δt a zero, $\Delta \theta$ tende a zero e la direzione della corda corrispondente tende alla direzione della tangente alla traiettoria nel punto P.
Dunque il vettore velocità istantanea è tangente alla traiettoria

La derivata

Se $r = r(t)$ ha per componenti $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, allora la velocità $v = v(t)$ ha per componenti $x'(t), y'(t), z'(t)$



Calcolare la velocità istantanea v(t) del punto materiale la cui legge oraria è:

$$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 2t + 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

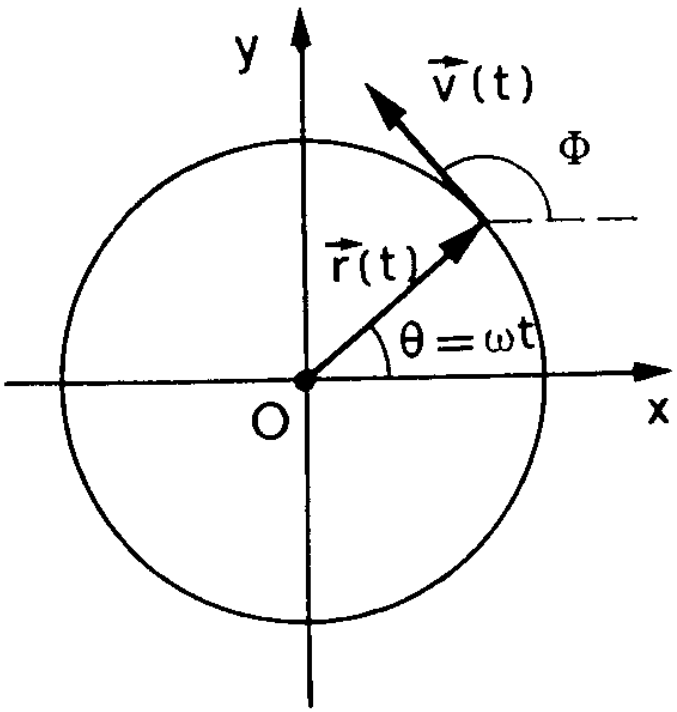
La velocità ha per componenti:

$$\begin{cases} x'(t) = 4t \\ y'(t) = 2 \\ z'(t) = 0 \end{cases}$$

Il suo modulo v(t) vale $v = \sqrt{16t^2 + 4}$
Mentre la tangente θ dell'angolo che la velocità forma con l'asse delle x vale
$tg\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{2t}$

La derivata

Trovare la velocità istantanea di un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme



Sia R il raggio del cerchio. La legge oraria è:

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \\ z = 0 \end{cases}$$

Essendo il punto materiale vincolato a percorrere uan traiettoria fissa, esso ha un solo grado di libertà. I tre parametri della sua legge oraria non possono cambiare col tempo in maniera fra di loro indipendente. Quadrando e sommando si può vedere che esse soddisfano la relazione

$$x^2 + y^2 = R^2$$

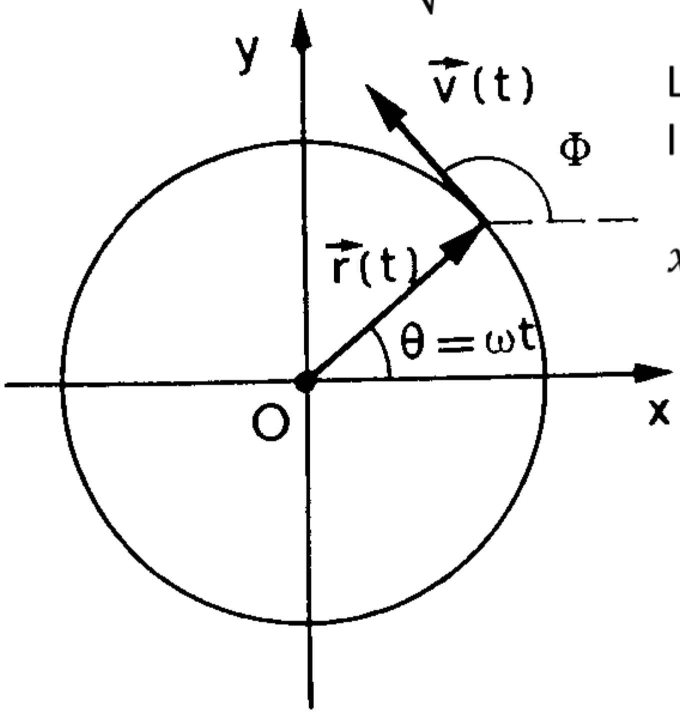
La derivata

Derivando la legge oraria possiamo ottenere le componenti della velocità:

$$\begin{cases} v_x = -\omega R sin\omega t \\ v_y = \omega R cos\omega t \\ v_z = 0 \end{cases}$$

Il modulo della velocità è:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 sin^2\omega t + \omega^2 R^2 cos^2\omega t} = \omega R$$



La velocità v è diretta secondo la tangente alla circonferenza. Infatti è nullo il prodotto scalare $\bar{r} \cdot \bar{v}$:

$$xv_x + yv_y = rcos\omega t(-\omega rsin\omega t) + rsin\omega t(\omega rcos\omega t) = 0$$

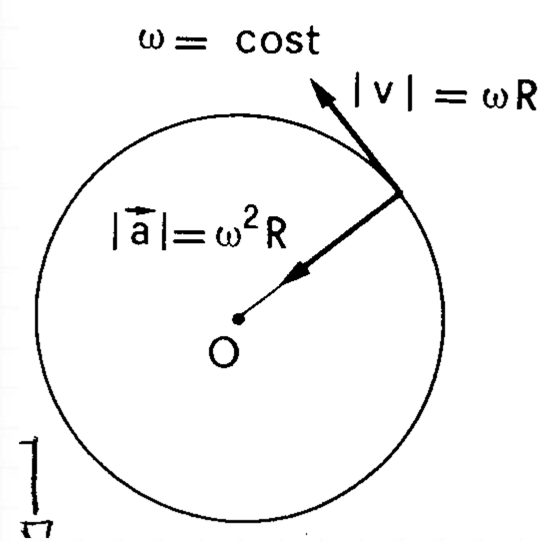
Questa condizione equivale a dire che v è ortogonale a r

Il vettore r(t) ha modulo costante pari a R. La sua derivata non è però nulla.

L’accelerazione

L’accelerazione descrive la rapidità con cui cambia la velocità ed è definita come la derivata rispetto al tempo della velocità v(t). Le componenti dell’accelerazione possono essere ottenute per derivazione delle componenti omologhe della velocità:

$$\begin{cases} a_x(t) = v_x'(t) = x''(t) \\ a_y(t) = v_y'(t) = y''(t) \\ a_z(t) = v_z'(t) = z''(t) \end{cases}$$



Nel moto circolare, in particolare:

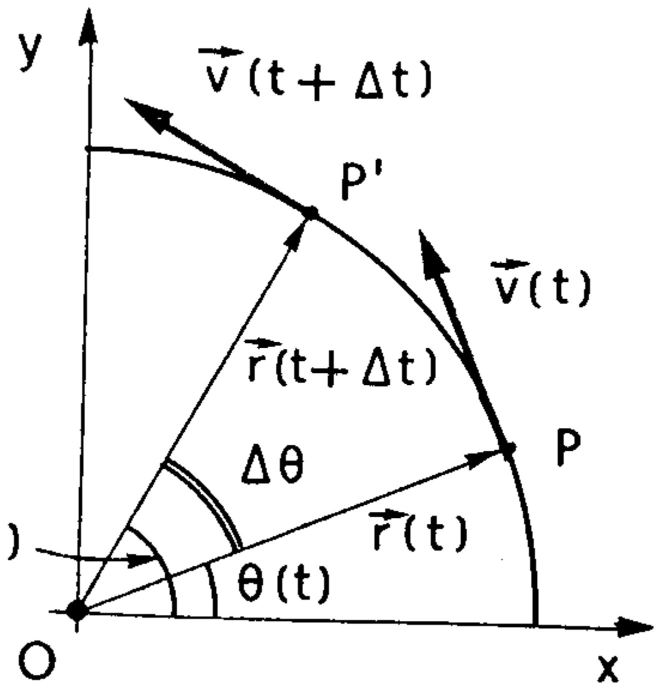
$$\begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 R cos\omega t \\ a_y(t) = -\omega^2 R sin\omega t \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$$

Il modulo dell’accelerazione $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \omega^2 R$ è costante.

Poiché le componenti dell’accelerazione a sono proporzionali alle componenti del vettore posizione r(t), l’accelerazione è parallela a r ma opposta in verso.
In un moto circolare uniforme, l’accelerazione è centripeta e il suo modulo costante vale $\omega^2 R = \omega v = \frac{v^2}{R}$

L’accelerazione

Possiamo calcolare l’accelerazione facendo uso direttamente della definizione:



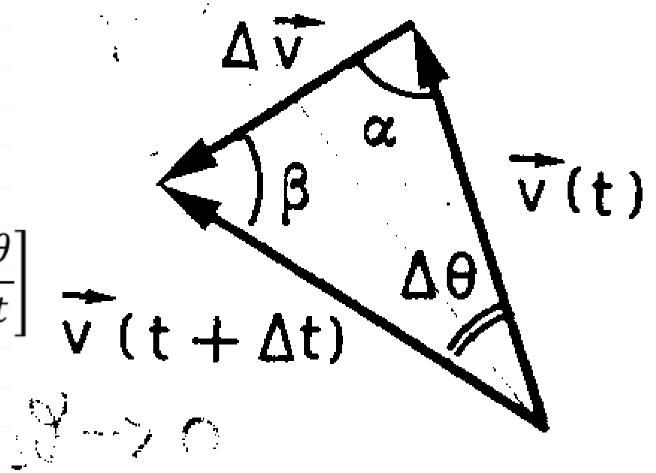
$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Da considerazioni geometriche si ricava che per $\Delta t \to 0$, anche $\Delta\theta \to 0$ e la somma degli angoli alla base, α e β tende a π. Ciò implica che per $\Delta\theta \to 0$, $\alpha = \beta = \pi/2$. Dunque la direzione di Δv e di a è perpendicolare a v e diretta verso il centro.

Per quanto riguarda il modulo dell’accelerazione, si ha:

$$|a| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2v sin(\Delta\theta/2)}{\Delta t}$$

Moltiplicando e dividendo per $\Delta\theta$

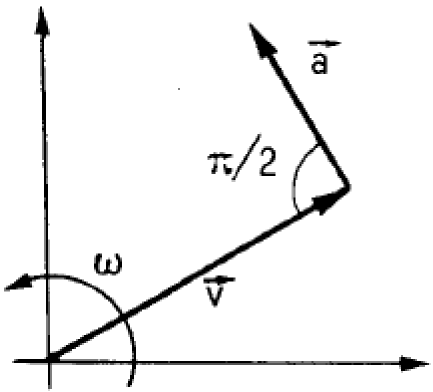


$$|a| = v \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right] = v \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}\right] \cdot \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right]$$

Dunque

$$a(t) = -v\omega\hat{r}$$

L'accelerazione

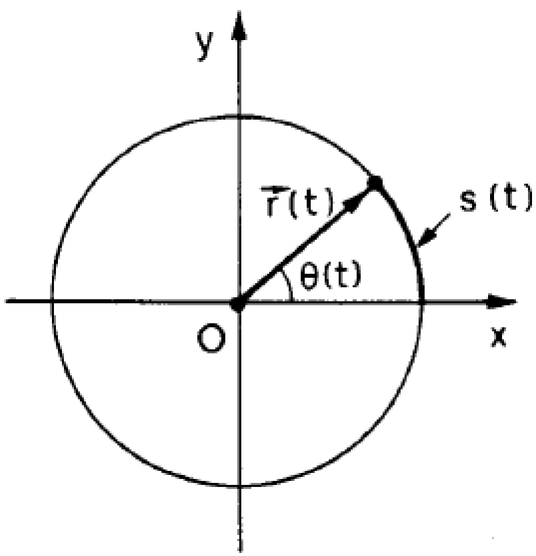


Nel caso in cui v si avariabile in direzione e modulo, il calcolo della sua derivata può essere fatto facilmente scrivendo il vettore v come prodotto del suo modulo v(t) per il suo versore :

$$\bar{v} = v \cdot \hat{v}$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{v}) = \frac{dv}{dt}\hat{v} + v\frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{v} + v\omega\hat{t}$$

Dove $\hat{t}$ è il versore normale a v (ruotato di π/2 nel senso in cui ruota v)



Applicazione al moto circolare

Scriviamo il vettore posizione $\bar{r}(t)$ come prodotto del suo modulo R per il versore $\hat{r}$:

$$\bar{r}(t) = R\hat{r}(t)$$

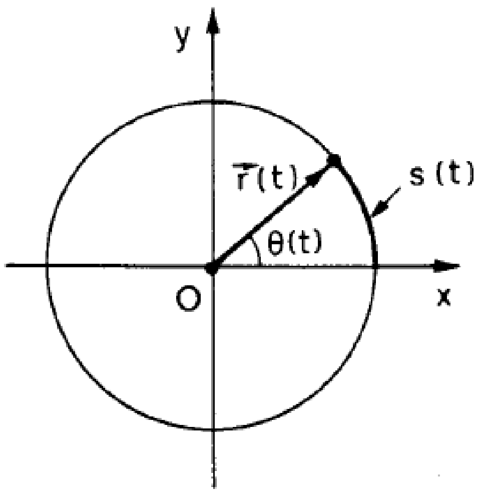
Derivando si ottiene la velocità:

$$\bar{v}(t) = \frac{dR}{dt} \cdot \hat{r}(t) + R\omega\hat{t}$$

Essendo R costante, questa relazione si riduce a:

$$\bar{v}(t) = R\omega\hat{t}$$

L'accelerazione



Essendo R costante, questa relazione si riduce a:

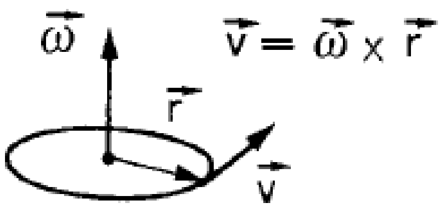
$$\bar{v}(t) = R\omega\hat{t}$$

dove

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v(t)}{R}$$

Derivando si ottiene l'accelerazione:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega\hat{t}) = R\frac{d\omega}{dt}\hat{t} + R\omega\frac{d\hat{t}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{t} + R\omega^2\hat{r}$$



Come si vede l'accelerazione in un moto circolare ha due componenti, una tangenziale a_t e una radiale a_r rispettivamente in modulo pari a:

$$a_t = R\frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt} \qquad a_r = R\omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{R}$$

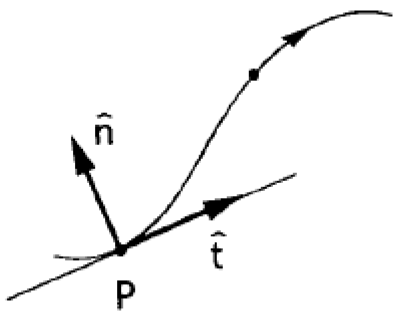
In maniera più compatta, si può scrivere:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{v} + \omega \times \bar{v}$$

Nel caso in cui v ha modulo costante, si ha la formula di Poisson:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \omega \times \bar{v}$$

Moti piani (su traiettoria qualsiasi)

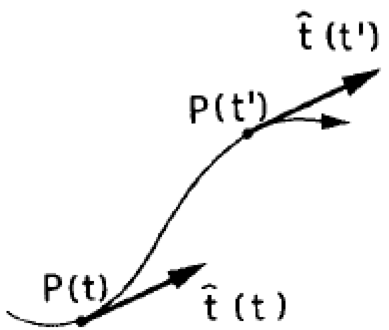


In un punto qualsiasi della traiettoria è definita la retta tangente t e la retta normale n.

La velocità, in ogni punto della traiettoria è un vettore puramente tangenziale e vale

$$\bar{v}(t) = v(t)\hat{t}$$

Versore tangente alla traiettoria orientato concordemente al verso di percorrenza assunto come positivo sulla traiettoria

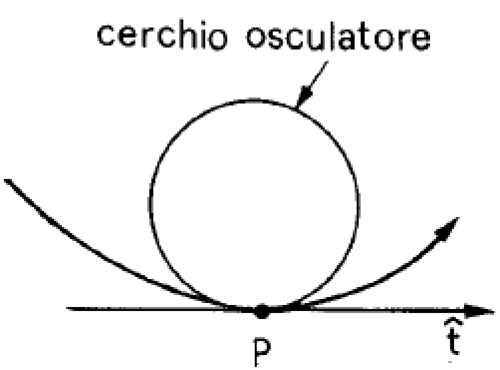


L' accelerazione invece ha componenti sia tangenziale sia normale:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[v(t) \cdot \hat{t}(t)]$$

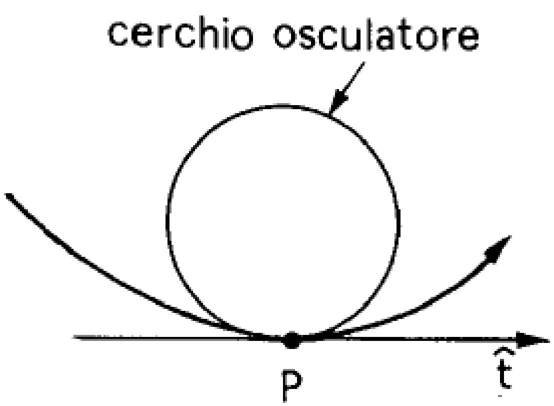
Sviluppando la derivata, si ha

$$\bar{a}(t) = \left(\frac{dv}{dt}\right)\hat{t} + v\frac{d\hat{t}}{dt} = \overline{a_t} + \overline{a_n}$$



In molte applicazioni risulta utile esprimere la componenti tangenziale e normale dell'accelerazione in funzione di parametri locali della traiettoria invece che in funzione delle componenti cartesiane

Il cerchio osculatore



Cerchio osculatore

Consideriamo in un punto P della traiettoria, l'insieme delle circonferenze che sono tangenti alla retta tangente t alla traiettoria. Si tratta di infinite circonferenze di raggi variabili da 0 a infinito. Tra queste circonferenze ne esiste una che meglio combacia con la traiettoria data: questo cerchio si chiama cerchio osculatore alla traiettoria nel punto considerato. Dalla geometria riusciamo a ricavarne il raggio: si tratta di un cerchio che ha un punto di contatto triplo con la traiettoria.

Nel tratto infinitesimo di traiettoria intorno al punto P è come se il punto mobile si muovesse su un pezzo di cerchio osculatore con la velocità tangenziale v in P.

Il moto coincide con un moto circolare su un cerchio di raggio R pari al raggio del cerchio osculatore (detto raggio di curvatura della traiettoria in quel punto)

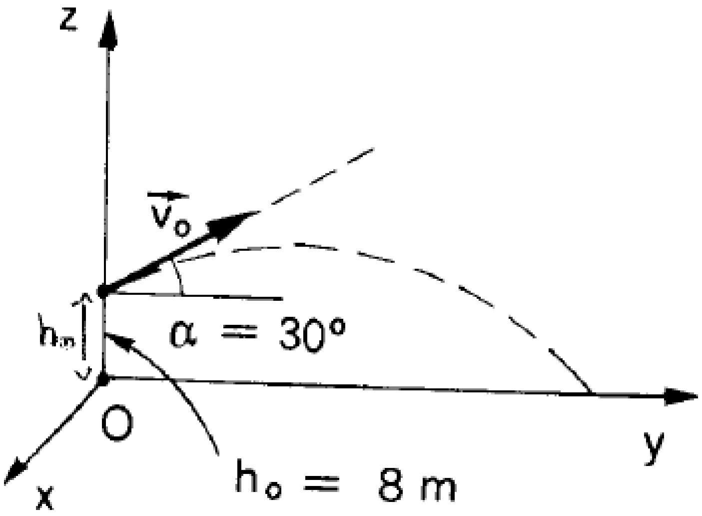
L'accelerazione normale in un punto della traiettoria in cui il punto mobile abbia velocità v(t) ed in cui il raggio di curvatura sia R(t) vale dunque

$$a_n = \frac{v^2}{R}\hat{n}$$

Il moto parabolico

Il moto parabolico

Un punto materiale viene lanciato con velocità $v_0 = 12\, m/s$ da una finestra alta 8 m dal livello del suolo. L'angolo α che la velocità forma con l'orizzontale è $\alpha = 30°$. Determinare la legge oraria, in particolare la distanza y_C dalla finestra a cui il sasso cade e dopo quanto tempo t_C dal momento del lancio la caduta a terra ha luogo



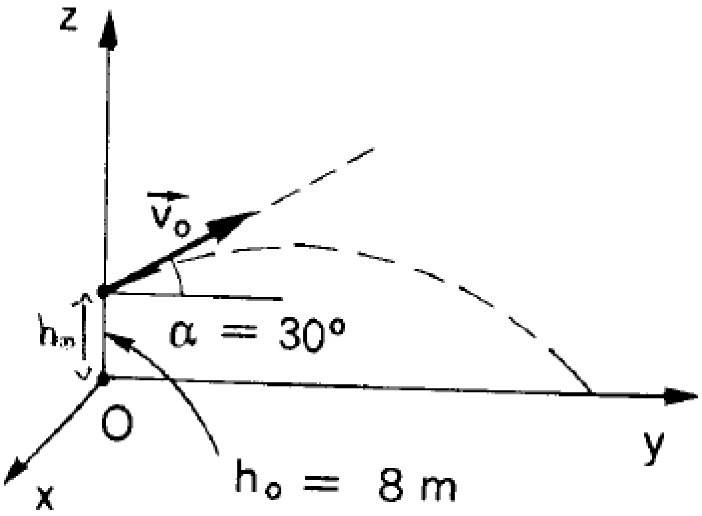
Durante il suo moto in due dimensioni, il mobile (che chiameremo per uso comune proiettile) subisce una accelerazione verso il basso dovuta alla accelerazione di gravità g che ovviamente si mantiene costante in modulo e diretta verticalmente verso il basso mentre non possiede accelerazione orizzontale. Lungo la direzione orizzontale l'accelerazione è nulla e così la componente orizzontale della velocità rimane costante durante il moto (si tratta di un moto uniforme)

Il moto verticale è quello analizzato per il moto di caduta libera ovvero di un oggetto che si muove sottoposto ad una accelerazione g costante. Si tratta, pertanto, di un moto uniformemente accelerato.

Il moto parabolico

Possiamo così schematizzare le leggi del moto:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$



al momento del lancio (t=0) abbiamo le seguenti condizioni iniziali per la velocità v e la posizione r:

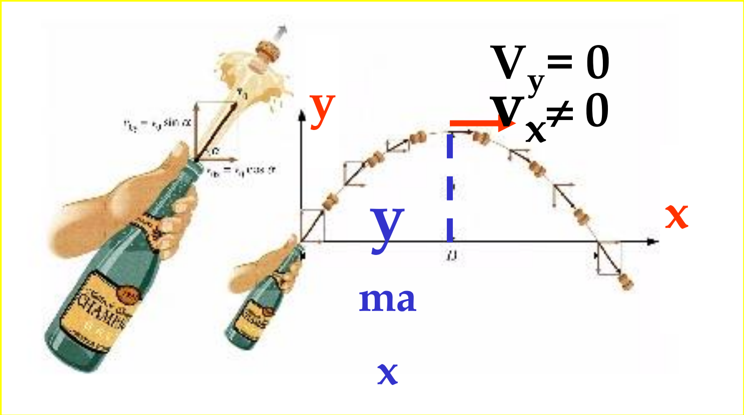
$$\begin{cases} v_x(0) = v_{0x} = 0 \\ v_y(0) = v_{0y} = v_0 cos\alpha \\ v_z(0) = v_{0z} = v_0 sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 = 0 \\ y(0) = y_0 = 0 \\ z(0) = z_0 = 8 \end{cases}$$

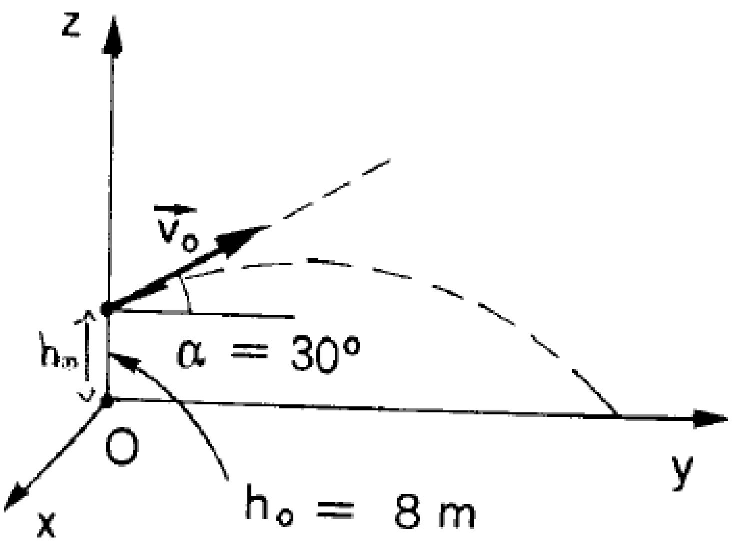
$$\begin{cases} v_x = c_{1x} \\ v_y = c_{1y} \\ v_z = -gt + c_{1z} \end{cases}$$

Con le condizioni iniziali, si avrà:

$$\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = v_0 cos\alpha \\ v_z = -gt + v_0 sin\alpha \end{cases}$$

Il moto parabolico





$$\begin{cases} x = c_2 \\ y = (v_0 cos\alpha)t + c_{2y} \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 sin\alpha)t + c_{1z} \end{cases}$$

Ponendo t=0 e confrontando con le condizioni iniziali, si ha:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = (v_0 cos\alpha)t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 sin\alpha)t + z_0 \end{cases}$$

La equazione della traiettoria si ottiene esprimendo z in funzione di y, cioè eliminando il tempo t dalla seconda e dalla terza dele equazioni:

$$z = -\frac{1}{2}g\frac{y^2}{v_0^2 cos^2\alpha} + (tg\alpha)y + z_0$$

La distanza y_C (gittata orizzontale) a cui il sasso cade è quel valore di y corrispondente a $z = 0$

Il moto parabolico

Si trova:

$$y_C = \frac{v_0^2}{g} sin\alpha cos\alpha \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gz_0}{v_0^2 sin^2\alpha}} \right)$$

Delle due soluzioni, quella negativa non corrisponde in questo caso ad alcun fenomeno fisico.

L'istante t_c di caduta può essere inteso come quel tempo t corrispondente a $y = y_c$:

$$t_c = \frac{y_c}{v_0 cos\alpha} = \frac{v_0}{g} sin\alpha \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gz_0}{v_0^2 sin^2\alpha}} \right)$$

La massima quota è caratterizzata dal fatto che la tangente alla traiettoria è orizzontale; ovvero considerando il significato geometrico di derivata, dal fatto che $z'(y) = 0$

$$z'(y) = -g\frac{y}{v_0^2 cos^2\alpha} + tg\alpha = 0$$

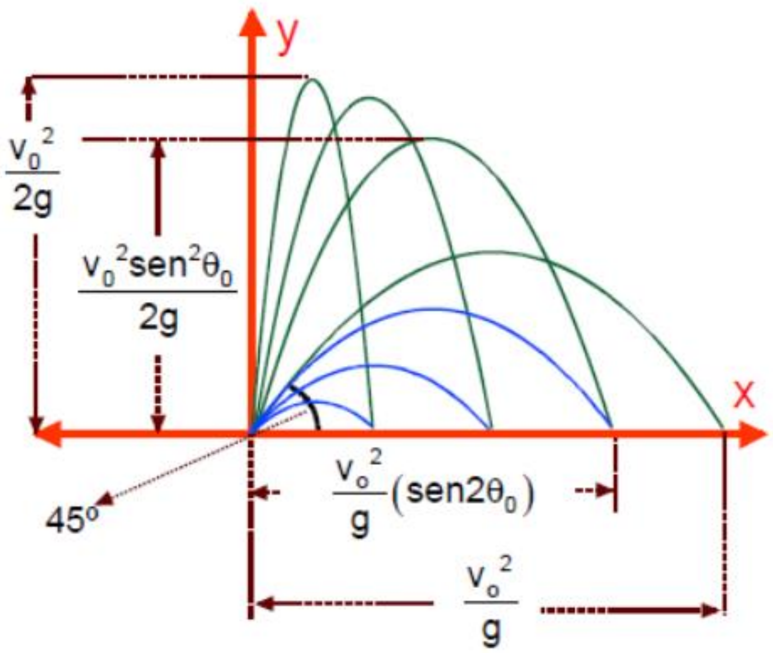
Da cui:

$$y_m = \frac{v_0^2}{g} sin\alpha cos\alpha$$

Trovato y_m si può ricavare

$$z_m = \frac{v_0^2 sin^2\alpha}{2g} + z_0$$

Il moto parabolico



Si noti che l'altezza massima dipende dall'angolo di elevazione.

Poiché la funzione seno assume i valori compresi tra 0 e 1, non tenendo conto dei valori negativi, allora il massimo valore dell'altezza si ottiene quando $\sin\theta = 1$ cioè quando $\theta = 90°$.

Se invece vogliamo trovare l'angolo per il quale il proiettile colpisce un punto bel preciso dobbiamo procedere come segue:

Si parte dall'equazione della parabola ovvero dalla legge oraria che descrive il moto del proiettile (in cui si è tenuto conto che x_0=0 e y_0=0:

$$y = tg\theta_0 x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 \theta_0}$$

Il moto parabolico

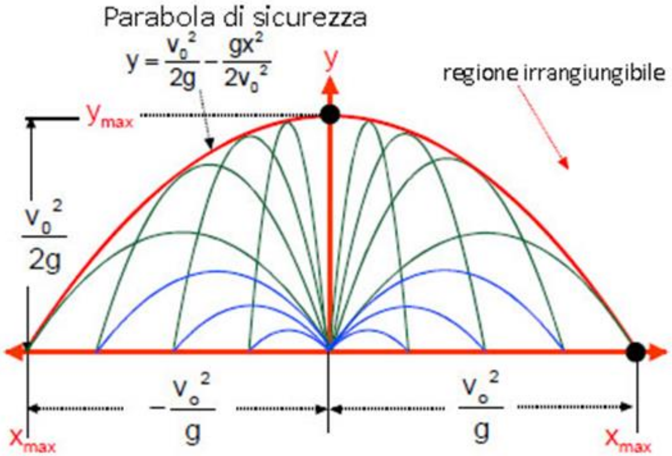
Tenendo conto dell'identità $\frac{1}{\cos^2\theta_0} = \mathrm{tg}^2\theta_0$

Si ha:

$$y = tg\theta_0 x - \frac{gx^2}{2v_0^2}(tg^2\theta_0 + 1)$$

Posso esplicitare l'espressione così ricavata rispetto a θ :

$$tg\theta_0 = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(\frac{gx^2}{2v_0^2} + y\right)}}{2\frac{gx^2}{2v_0^2}} = \frac{v_0^2}{xg} \pm \frac{1}{x}\sqrt{\frac{v_0^4}{g^2} - x^2 - 2\frac{v_0^2 y}{g}}$$



Si noti che l'equazione non ha soluzione quando la quantità sotto radice è negativa

$$y > \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Questo significa che i punti del piano al di fuori della curva descritta dall'equazione non sono raggiungibili dal proiettile lanciato con quell'angolazione

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$