Forme differenziali lineari

Sia $\Omega \subset R^3$ un insieme aperto e siano $A, B, C: \Omega \to R$ funzioni continue in Ω. Si definisce forma differenziale ω in Ω l'espressione

$$\omega = A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$$

Data la curva orientata semplice e regolare γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in [a, b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

si chiama integrale della forma differenziale lineare (o anche integrale curvilineo di seconda specie), lungo la curva γ, il numero

$$\int_a^b (A\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + B\,\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + C\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t))dt$$

Tale espressione viene anche indicata:

$$\int_\gamma A(x, y, z)dx + B(x, y, z)dy + C(x, y, z)dz$$

o, anche

$$\int_\gamma \omega$$

Per una forma differenziale si possono definire le seguenti operazioni:

I – Dato un vettore $r(r_1, r_2)$ e un punto $(x, y) \in \Omega$, il prodotto scalare tra ω ed r è: $\omega \cdot r = A(x, y)r_1 + B(x, y)r_2$

II – dato uno scalare $c \in R$ ed una funzione definita in Ω e a valori in R, si definisce la moltiplicazione della forma differenziale c per f nel modo seguente: $c \cdot \omega = cXdx + cYdy$ e $f \cdot \omega = (fX)dx + (fY)dy$;

III – date due forme differenziali ω_1 e ω_2 si definisce addizione di ω_1 e ω_2 la seguente forma:

$$\omega_1 + \omega_2 = (X_1dx + Y_1dy) + (X_2dx + Y_2dy) = (X_1 + X_2)dx + (Y_1 + Y_2)dy$$

Teorema

La formula

$$\int_a^b (A\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + B\,\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + C\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t))dt$$

non dipende dalla parametrizzazione della curva orientata semplice e regolare γ ma dipendono dall'orientazione della curva stessa.

Nel caso di una curve orientata, semplice regolare γ, poiché γ si può considerare come l'unione di curve regolari $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \dots,\ \gamma_n$, l'integrale della forma differenziale esiste anche in questo caso e si ha:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \cdots + \int_{\gamma_n} \omega$$

Nel fare gli integrali curvilinei delle forme differenziali occorre prestare molta attenzione all'orientamento della curva. Per questo motivo, gli integrali curvilinei delle forme differenziali sono detti integrali orientati.

Definizione di forma differenziale esatta

Una forma differenziale $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i$ definita in un aperto $A \subset R^n$ si dice esatta se è il differenziale di qualche funzione, in altre parole, se esiste una funzione detta primitiva della forma ω:

$$f: A \to R$$

di classe C^1 tale che:

$$\omega = df$$

o più esplicitamente se $\forall x \in A$:

$$a_k(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}, \quad \forall k = 1,2, \dots, n$$

Definizione di forma differenziale chiusa

Una forma differenziale $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i$ definita in un aperto $A \subset R^n$ e di classe $C^1(A)$, si dice chiusa se verifica la seguente relazione:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$$

Osservazione

Se una forma differenziale di classe C^1 è esatta, allora è chiusa; in generale non vale il viceversa. La condizione di essere chiusa, senza opportune ipotesi sul dominio della forma differenziale, non assicura che la forma sia esatta.

Un particolare tipo di insieme ci permette di stabilire alcune importanti proprietà per le forme differenziali, se definite su questi insiemi. Si tratta degli **insiemi connessi.**

Caratterizzazione delle forme differenziali esatte

Dato un aperto connesso $A \subset R^2$ e data una forma differenziale lineare ω di classe C^0in A, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

I - ω è esatta;

II – Se P_0 e P sono due punti qualunque in A e γ_1 e γ_2 sono due curve generalmente regolari orientate contenute in A, che hanno entrambe come primo estremo P_0 e come secondo estremo P, allora:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

vale a dire che l'integrale curvilineo dipende solo dagli estremi e non dal cammino percorso;

III – se γ è una qualunque curva generalmente regolare, chiusa e contenuta in A, allora

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

Integrali curvilinei di forme differenziali lineari.

ES. 1

Calcolare l'integrale della forma differenziale:

$$\boldsymbol{\omega(x,y) = -ydx + xdy}$$

lungo l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Una parametrizzazione semplice e regolare dell'ellisse considerata è data da:

$$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases} \qquad t \in [0; 2\pi]$$

Da qui, derivando, si ha:

$$\begin{cases} x' = -asint \\ y' = bcost \end{cases}$$

Pertanto:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} [(-bsint)(-asint) + (acost)(bcost)]dt = \int_0^{2\pi} ab(sin^2t + cos^2t)dt = 2ab\pi$$

ES. 2

Determinare, se possibile, una primitiva della forma differenziale

$$\boldsymbol{\omega(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy}$$

Dalla definizione, segue che dobbiamo determinare, se esiste, una funzione f di classe C^1 tale che $\omega = df$ ovvero tale che:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

Integriamo la prima rispetto a x:

$$f(x,y) = \int \frac{2x}{x^2+y^2} dx = log\,(x^2+y^2) + c(y)$$

Deriviamo la f così trovata rispetto a y ed uguagliamo il risultato con la seconda delle due equazioni:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} + c'(y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

Da cui segue che:

$$c'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(y) = c, \forall c \in R.$$

Dunque una primitiva di ω è:

$$f(x,y) = log(x^2+y^2) + c$$

e quindi la forma differenziale è esatta

ES. 3

Determinare, se possibile, una primitiva della forma differenziale

$$\boldsymbol{\omega(x,y) = ydx + 2xdy}$$

Dalla definizione, dobbiamo determinare, se esiste, una funzione f di classe C^1 tale che $\omega = df$ ovvero tale che:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x$$

Integriamo la prima delle due rispetto a x:

$$f(x,y) = \int ydx = xy + c(y)$$

dove $c(y)$è una funzione della sola variabile y. Deriviamo ora la f rispetto a y ed uguagliamo il risultato con la seconda delle due relazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + c'(y) = 2x$$

da cui segue che

$$c'(y) = x$$

Si può osservare che l'ultima uguaglianza genera un assurdo, dovendo essere la c funzione della sola variabile y. Pertanto, non essendo possibile determinare una primitiva della forma differenziale segue che essa non è esatta.

Teorema

Sia ω una forma differenziale continua in un aperto connesso A. condizione necessaria e sufficiente affinché ω sia esatta è che, per ogni curva chiusa γ regolare a tratti e con sostegno in A, risulti:

$$\oint_{\gamma} \omega = 0$$

Teorema

Se A è un aperto semplicemente connesso di R^n e ω è una forma differenziale chiusa in A, allora ω è esatta in A.

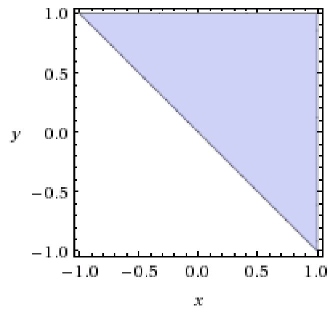
ES. 4

Dimostrare che la forma differenziale

$$\boldsymbol{\omega(x,y) = \frac{3x+y}{\sqrt{x+y}}dx - \frac{x+3y}{\sqrt{x+y}}dy}$$

è esatta.

La forma differenziale è definita in un insieme semplicemente connesso. (Come si può vedere intuitivamente è stellato rispetto a ogni suo punto).



Inoltre, si ha che:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

ES. 5

Si consideri la forma differenziale:

$$\boldsymbol{\omega(x,y) = \left[log(x+y) + \frac{x}{x+y}\right]dx + \frac{x}{x+y}dy}$$

Dire se $\boldsymbol{\omega}$ è esatta e, in caso affermativo, determinare una primitiva f di $\boldsymbol{\omega}$

Poniamo $\omega = f_1 dx + f_2 dy$ con

$$f_1(x,y) = log(x+y) + \frac{x}{x+y} \qquad f_2(x,y) = \frac{x}{x+y}$$

Si può osservare che la forma differenziale è chiusa. Infatti,

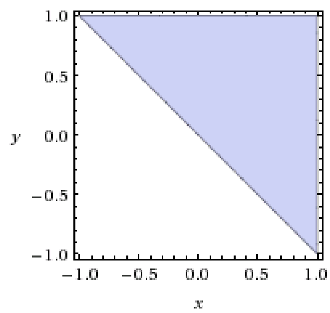
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{(x+y)^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

La chiusura è condizione necessaria ma non sufficiente per l'esattezza a meno che la forma differenziale di classe C^1 non sia definita in un insieme semplicemente connesso.

L'insieme di definizione di ω è :

$$\Omega = \{(x,y) \in R^2 : x + y > 0\}$$

che è un aperto semplicemente connesso (di fatto, è stellato)



Essendo ω chiusa e definita in un aperto semplicemente connesso, allora essa è esatta.

Determiniamo ora una primitiva f di ω:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_1(x,y) = \log(x+y) + \frac{x}{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_2(x,y) = \frac{x}{x+y}$$

Conviene integrare la seconda rispetto a y:

$$f(x,y) = \int \frac{x}{x+y} dy = xlox|x+y| + c(x) = xlog(x+y) + c(x)$$

Deriviamo la funzione così ottenuta, rispetto alla variabile x e la eguagliamo a $f_1(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \log(x+y) + \frac{x}{x+y} + c'(x) = \log(x+y) + \frac{x}{x+y}$$

Da cui si ricava

$$c'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(x) = c, c \in R$$

In definitiva una primitiva f di ω è:

$$f(x,y) = log(x+y) + c$$

ES. 6

Si calcoli l'integrale della forma differenziale:

$$\boldsymbol{\omega(x,y) = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2} + xy\right)dx + \left(\frac{y}{1+x^2+y^2}\right)dy}$$

lungo la curva $\boldsymbol{\gamma}$ di equazione cartesiana $\boldsymbol{y = x^2 logx}$ con $\boldsymbol{x \in [1,2]}$

Per prima cosa scriviamo la curva γ in forma parametrica:

$$\gamma: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 logt \end{cases} \quad t \in [1,2]$$

Derivando, si ottiene:

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 2tlogt + t \end{cases}$$

L'integrale di ω lungo γ è dato da:

$$\int_\gamma \omega = \int_1^2 \left[\frac{t}{1+t^2+t^4log^2t} + t^3logt + \frac{t^2logt}{1+t^2+t^4log^2t}(2tlogt+t)\right]dt =$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{t + t^3logt(1+t^2+t^4log^2t) + t^2logt(2tlogt+t)}{1+t^2+t^4log^2t}\right]dt =$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{t + t^3logt + t^5logt + t^7log^3t + 2t^3log^2t + t^3logt}{1+t^2+t^4log^2t}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{2t + 4t^3log^2t + 2t^3logt}{1+t^2+t^4log^2t}\right)dt + \int_1^2 \left[\frac{t^3logt(1+t^2+t^4log^2t)}{1+t^2+t^4log^2t}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{d}{dt}[log(1+t^2+t^4log^2t)]dt + \int_1^2 t^3logtdt$$

Risolvendo l'ultimo integrale per parti, si ha:

$$\int_1^2 t^3logtdt = \left[\frac{t^4logt}{4}\right]_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 t^3dt$$

Segue che:

$$\int_\gamma \omega = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{d}{dt}[log(1+t^2+t^4log^2t)]dt + \left[\frac{t^4logt}{4}\right]_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 t^3dt =$$

$$= \frac{1}{2}[log(1+t^2+t^4log^2t)]_1^2 - \frac{1}{16}[t^4]_1^2 + 4log2 = \frac{1}{2}log(5+16log^2 2) - \frac{15}{16} + \frac{7}{2}log2$$

Metodo alternativo

Invece di calcolare l'integrale con il metodo diretto possiamo sfruttare una caratterizzazione delle forme differenziali esatte.

Intanto precisiamo che $\omega = \omega_1 + \omega_2$

$$\omega_1 = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{y}{1+x^2+y^2}\right)dy$$

$$\omega_2 = xydx$$

La forma differenziale ω_1 è chiusa e definita sull'aperto R^2 semplicemente connesso. Pertanto è esatta. Una sua primitiva è:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}log(1+x^2+y^2) + c$$

Quindi si ha che:

$$\int_\gamma \omega_1 = f(\gamma(2)) - f\big(\gamma(1)\big) = f(2{,}4log2) - f(1{,}0) = \frac{1}{2}log(5+16log^2 2) - \frac{1}{2}log2$$

La forma ω_2 non è chiusa quindi l'unico modo di calcolarne l'integrale è quello di applicare la definizione di integrale curvilineo:

$$\int_\gamma \omega_2 = \int_1^2 t^3 logtdt = 4log2 - \frac{15}{16}$$

ES. 7

Calcolare il lavoro compiuto dal campo di forze:

$$\boldsymbol{F(x,y) = y^2\hat{\imath} + 2xy\hat{\jmath}}$$

lungo la curva $\boldsymbol{\gamma}$ di equazione $\boldsymbol{y = 2x^3 - 1}$ con $\boldsymbol{x \in [0;1]}$

La curva γ ha equazioni parametriche

$$\gamma: \begin{cases} x = t \\ y = 2t^3 - 1 \end{cases} \quad t \in [0{,}1]$$

da cui segue:

$$\gamma'(t): \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 6t^2 \end{cases}$$

$$\|\gamma'(t)\| = ds = \sqrt{1+36t^4}dt$$

Dunque il versore tangente è:

$$T(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+36t^4}}; \frac{6t^2}{\sqrt{1+36t^4}}\right)$$

Dalla definizione di lavoro si ha che:

$$L = \int_\gamma \langle\left((2t^3-1)^2, 2t(2t^3-1)\right), \left(\frac{1}{\sqrt{1+36t^4}}; \frac{6t^2}{\sqrt{1+36t^4}}\right)\rangle \sqrt{1+36t^4}dt =$$

$$= \int_0^1 [(2t^3-1)^2 + 12t^3(2t^3-1)]dt = \int_0^1 (4t^6 - 4t^3 + 1 + 24t^6 - 12t^3)dt = [4t^7 - 4t^4 + t]_0^1 = 1$$

Metodo alternativo

Poiché

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy)$$

il campo di forze è irrotazionale.

Inoltre, esso è definito su un insieme semplicemente connesso, dunque è conservativo.

Determiniamo il potenziale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

Integriamo la seconda delle due rispetto a y:

$$f(x,y) = \int 2xydy = xy^2 + c(x)$$

Deriviamo il risultato così ottenuto, rispetto a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + c'(x) = y^2$$

Da cui $c'(x) = 0 \quad \Longrightarrow c(x) = c$

Il potenziale f è pertanto:

$$f(x,y) = xy^2 + c$$

Il lavoro per spostare il corpo di massa m=1 dal punto $P(0,-1)$ al punto $Q(1,1)$ non dipende dal percorso ma solo dagli estremi avendosi:

$$L = f(Q) - f(P) = f(1,1) - f(0,-1)$$

Calcolare l'integrale curvilineo delle seguenti forme differenziali estesi alle curve indicate

1	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}} \frac{1}{1+x^2}ds - cos^2yds$	$\gamma = grafico\ di\ arctanx;$ $Q', Q''\ punti\ di\ \gamma\ di\ ascisse\ 0, \sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$
2	$(\gamma)\int_{Q'}^{Q''}\left[y - e^{\sqrt[3]{\frac{3x+1}{2}}}\left(\sqrt[3]{\frac{3x}{2}-1}\right)\right]dx + \frac{3x+1}{2}dy$	$\gamma: \begin{cases} x = \frac{2log^3-1}{3} \\ y = t(logt-1)\end{cases}\ t \in [1, e]$	$9e - 24$
3	$(\gamma)\int_{Q'}^{Q''}\frac{1}{logy}ds + \left(y - e^{\sqrt{x^2-3x+2}}\right)ds$	$\gamma = grafico\ di\ e^{\sqrt{x^2-3x+2}}$, $Q' = P(0), Q'' = P(1)$	$log(3-2\sqrt{2})$
4	$(\gamma)\int_{Q'}^{Q''} logxdy$	$\gamma: \begin{cases} x = e^{sen^4tcos^2t} \\ y = sent\end{cases}\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{2}{35}$
5	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}}\frac{x^3}{1+x^3-2y\sqrt{1+y^2}}dy$	$\gamma: \begin{cases} x = \sqrt[3]{sen2t} \\ y = sent\end{cases}\ t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$	$\frac{7}{12}$
6	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}}\frac{(1+\sqrt[3]{y})(3\sqrt[3]{y^2}+e^x-1)}{(e^x+1)(1+\sqrt[3]{y^2})}dx$	$\gamma: \begin{cases} x = \log(1+t) \\ y = t^3\end{cases}\ t \in [0,1]$	$log\frac{9\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4}$
7	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}}\frac{5x+1}{3}dy$	$\gamma: \begin{cases} x = \frac{3cos2t-1}{5} \\ y = e^{3t}\end{cases}\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$-\frac{9}{13}\left(e^{\frac{3}{2}\pi}+1\right)$
8	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}}\sqrt{ye^{-x}}dx + (y - e^{2x})dy + (z - arctgx - y)dz$	$\gamma: \begin{cases} x = \log t \\ y = t^2 \\ z = t^2 + arctg(logt)\end{cases}\ t \in [1,2]$	$-2(\sqrt{2}-1)$
9	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}}\frac{3^{-\sqrt{x+1}}}{2cosy}dx + ydy + \frac{1}{\sqrt{z+5-x}}dz$	$\gamma: \begin{cases} x = t^2-1 \\ y = arccost \\ z = t\end{cases}\ t \in [-1,0]$	?
10	$(\gamma)\int_{Q^I}^{Q^{II}}\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}dx + (2y + arcsinx)dy$	γ è la poligonale di vertici $Q'\left(\frac{1}{2},1\right), Q\left(-\frac{1}{2},0\right), Q''(0,3)$	$8 - \frac{\pi}{6}$
11	$(\gamma)\int_{+\gamma}(2xy^3+3)dx + 3x^2y^2dy$	γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1	0
12	$\int_{+\gamma}\frac{1}{\sqrt{y}}dx + dy$	$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, dove γ_1è il diagramma di $2x - x^2 + 3$ con $x \in [0,2]$, γ_2è il segmento congiungente gli estremi di γ_1	$\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}$

Ulteriori esercizi

1	Data la forma differenziale $$\omega(x,y) = (e^{x+y}cosx)dx + \left[\frac{1}{2}e^{x+y}(cosx + sinx)\right]dy$$ stabilire se essa è chiusa, se è esatta ed in tal caso determinarne una primitiva. Calcolare, inoltre,

	l'integrale della forma differenziale esteso alla curva di equazione $y=\frac{\pi}{2}-x$ tra i punti $A\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ e $B\left(\frac{\pi}{2},0\right)$. Infine, se la forma è esatta verificarne il risultato con la formula fondamentale degli integrali curvilinei.
2	Sia $F: R^3 \rightarrow R^3$ il campo vettoriale: $$F(x,y,z)=(2y+1,2x-1,2z)$$ Stabilire se F ammette potenziale e, in caso affermativo, determinare un potenziale f di F.
3	Data la forma differenziale: $$\omega(x,y)=\frac{1}{\sqrt[3]{(5x+1)^2}}dx+\frac{1}{y-2}dy$$ determinare, se esiste, una primitiva f di ω.
4	Data la forma differenziale: $$\omega(x,y)=\left(x\frac{sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx+\left(y\frac{sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy$$ dire se ω ammette primitiva e, in caso affermativo, determinare una primitiva f di ω.
5	Data la forma differenziale $$\omega(x,y)=\left(\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\right)dx-\left(\frac{y}{\sqrt{e^{2x}-y^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}\right)$$ verificare se ω ammette primitiva e, in caso affermativo, determinare una primitiva f di ω.
6	Dato il campo di forze $$F(x,y)=\left(\frac{16x}{\sqrt{16x^2-y^2}}-\frac{x}{\sqrt{16y^2-x^2}}\right)\hat{\imath}+\left(\frac{16y}{\sqrt{16x^2-y^2}}-\frac{y}{\sqrt{16x^2-y^2}}\right)\hat{\jmath}$$ Stabilire se F ammette potenziale e, in caso affermativo, determinare un potenziale f di F.
7	Data la forma differenziale: $$\omega=\frac{2x+y}{\sqrt[3]{(x^2+xy)^2}}dx+\left(\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+xy)^2}}+2y\right)dy$$ Verificare se essa è chiusa, se è esatta ed in tal caso determinarne una primitiva. Determinare, inoltre, l'integrale della forma differenziale esteso alla bisettrice del primo e del terzo quadrante tra i punti A(1,1) e B(2,2).
8	Data la forma differenziale: $$\omega(x,y)=(xy+sinxy)dx+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{cosxy}{y^2}+\frac{x\cdot sinxy}{y}\right)dy$$ Stabilire se essa è chiusa, se è esatta ed, in tal caso, determinare una primitiva. Calcolare, inoltre, l'integrale della forma differenziale esteso alla curva di equazione $y=\frac{2\pi}{x}$ tra i punti di ascissa 1 e 2.
9	Data la forma differenziale: $$\omega(x,y)=\left(x-\frac{x+y}{\sqrt[3]{(x+y)^2}}\right)dx-\left(\frac{x+y}{\sqrt[3]{(x+y)^2}}\right)dy$$ Stabilire se essa è chiusa, se è esatta ed, in tal caso, determinare una primitiva. Calcolare, inoltre, l'integrale della forma differenziale esteso alla curva di equazione $y=1-x$ tra i punti A(1,0) e B(2,-1).
10	Data la forma differenziale: $$\omega(x,y)=(y\cdot arcsinx)dx+\left(\sqrt{1-x^2}+x\cdot arcsinx\right)dy$$

	Stabilire se essa è chiusa, se è esatta ed, in tal caso, determinare una primitiva. Calcolare, inoltre, l'integrale della forma differenziale esteso alla curva di equazione $y = arcsinx$ tra i punti di ascissa 0 e 1/2.
11	Dato il campo di forze: $$F(x,y) = \left(x - \frac{1}{\sqrt{2x-y^2}}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{y}{\sqrt{2x-y^2}} + y^2\right)\hat{\jmath}$$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m=1 lungo la curva y=0 tra i punti A(1,0) e B(2,0). Se il campo è conservativo, verificare il risultato utilizzando il potenziale precedentemente calcolato.
12	Dato il campo di forze: $$F(x,y) = e^{\frac{x}{y}}\hat{\imath} + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\hat{\jmath}$$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m lungo la curva y=x tra i punti A(1,1) e B(3,3). Se il campo è conservativo, verificare il risultato utilizzando il potenziale precedentemente calcolato.
13	Dato il campo di forze: $$F(x,y) = \frac{x(1+y^4)}{y^2 + x^2(1+y^4)}\hat{\imath} + \frac{y(1+2x^2y^2)}{y^2+x^2(1+y^4)}\hat{\jmath}$$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m lungo la curva y=x dal punto di ascissa 1 al punto di ascissa 2. Se il campo è conservativo, verificare il risultato utilizzando il potenziale precedentemente calcolato.
14	Dato il campo di forze: $$F(x,y) = \left(2xy - \frac{1}{x}\right)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath}$$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m lungo la curva $y = x^2$ tra i punti A(1,1) e B(2,4). Se il campo è conservativo, verificare il risultato utilizzando il potenziale precedentemente calcolato.
15	Dato il campo di forze: $$F(x,y) = -\frac{y}{y^2+x^2}\hat{\imath} + \frac{x}{y^2+x^2}\hat{\jmath}$$ verificare se esso è irrotazionale, se è conservativo ed, in tal caso, determinarne un potenziale. Calcolare, inoltre, il lavoro compiuto dal campo per spostare un punto di massa m lungo la curva di equazioni parametriche $x(t) = 1 + \frac{1}{2}cost, y(t) = 1 + \frac{1}{2}sint,\ \ con\ t \in [0,2\pi]$