



Curve e integrali curvilinei

Corso di Matematica 2

2014/2015

Corso di studi in Ingegneria meccanica

Curve

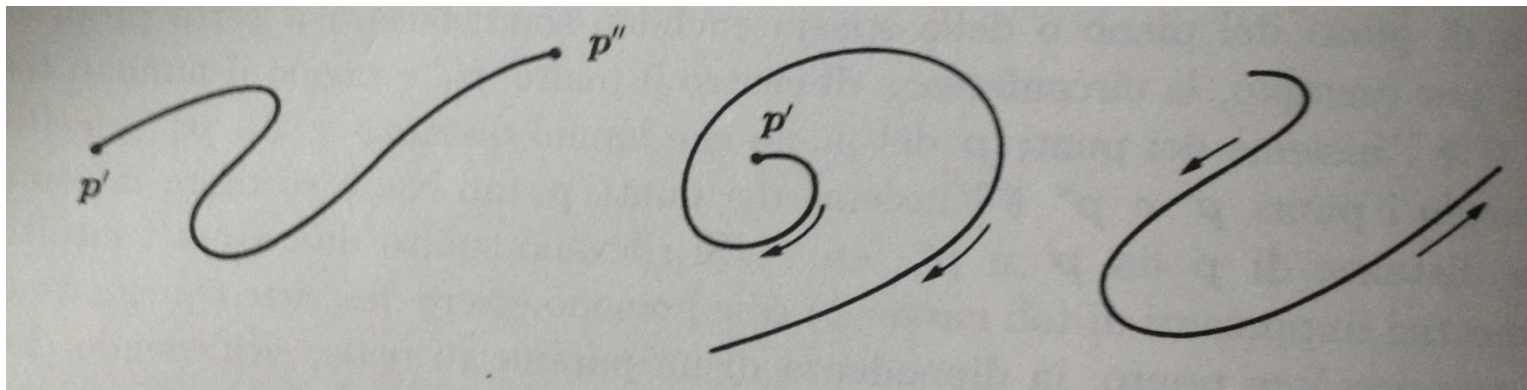
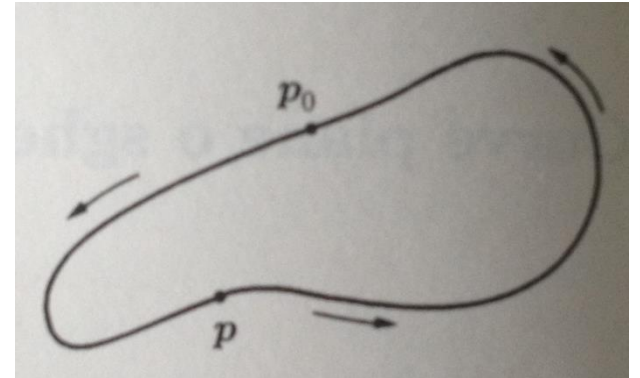
Definizione

Si definisce curva di classe C^k in R^n l'applicazione continua $\gamma: I \subseteq R \rightarrow R^n$, dove I è un intervallo della retta reale.

Le curve possono essere classificate in curve chiuse e curve aperte.

L'appellativo chiusa può essere dato ad una curva quando il generico suo punto può descriverla con continuità, in dipendenza di un generico parametro reale, partendo da una posizione iniziale p_0 e ritornando nella stessa posizione dopo averla percorsa tutta.

L'appellativo aperta può essere dato ad una curva che non sia chiusa e, in tal caso, si può distinguere un tipo di curva aperta dotata di entrambi gli estremi p' e p'' , un altro tipo dotato di un solo estremo e un altro ancora non dotato di nessun estremo.



Omeomorfismi

Definizione

Una funzione vettoriale $f: X \subseteq R^n \rightarrow Y \subseteq R^k$ biunivoca di X su Y , continua insieme con la sua inversa, si dice un omeomorfismo di X su Y . Due insiemi $X \subseteq R^n$ e $Y \subseteq R^k$ si dicono omeomorfi se esiste un omeomorfismo di X su Y o di Y su X .

Il significato intuitivo di omeomorfismo è legato a quello di deformazione. Secondo tale concetto, dati due insiemi X e Y del piano e dello spazio, Y si ottiene per deformazione di X quando è il risultato di successive dilatazioni e contrazioni locali di X senza che nel corso di queste si creino lacerazioni o sovrapposizioni. Una tale deformazione di X in Y non conserva in generale né la forma, né le distanze, né il parallelismo mentre è possibile dire che essa stabilisce tra X e Y una corrispondenza biunivoca godente della seguente proprietà topologica:

1. A punti di X presi via via sempre più vicini a p corrispondono punti di Y presi via via sempre più vicini a p' .
2. Punti di Y presi via via sempre più vicini a p' sono corrispondenti di punti di X presi via via sempre più vicini a p .

La corrispondenza biunivoca tra X e Y è continua insieme con la sua inversa

Curve semplici aperte (dotate di estremi)

Definizione 1

Un sottoinsieme $\gamma \subseteq R^3$ (risp. $\subseteq R^2$) omeomorfo ad un intervallo $[a,b]$ di R si dice una curva sghemba (risp. piana) semplice, aperta, dotata di estremi

Poiché una funzione vettoriale definita nell'intervallo compatto $[a,b]$ di R che abbia come codominio il sottoinsieme $\gamma \subseteq R^3$ (risp. $\subseteq R^2$) è un omeomorfismo di $[a,b]$ su γ non appena essa sia biunivoca e continua in $[a,b]$, allora un sottoinsieme $\gamma \subseteq R^3$ (risp. $\subseteq R^2$) è una curva semplice aperta se e solo se è il codominio di una funzione vettoriale definita in un intervallo compatto $[a,b]$ di R , ivi continua e biunivoca.

Definizione 2

Se $\gamma \subseteq R^3$ (risp. $\subseteq R^2$) è una curva semplice aperta dotata di estremi, un omeomorfismo di un intervallo compatto $[a,b]$ su γ , o, ciò che è lo stesso, una funzione vettoriale definita in $[a,b]$ ivi biunivoca e continua, il cui codominio sia γ si dice una rappresentazione parametrica di γ di base $[a,b]$

Rappresentazione parametrica di una curva

Se con t si indica il generico punto dell'intervallo $[a,b]$, con $p(x, y, z)$ il generico punto della curva γ e con $p(t)$ una rappresentazione parametrica di γ di base $[a,b]$ di componenti $x(t), y(t), z(t)$ si dice una equazione vettoriale di γ di base $[a,b]$, le uguaglianze

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

si dicono terna di equazioni parametriche di γ di base $[a,b]$ e il numero reale t prende il nome di parametro

Curve semplici aperte (dotate di un solo estremo o prive di estremi)

Definizione 1

Un sottoinsieme $\gamma \subseteq R^3$ (risp. $\subseteq R^2$) omeomorfo ad un intervallo I di R si dice una curva sghemba (risp. piana) semplice, aperta, dotata di un solo estremo o priva di estremi a seconda che I sia un intervallo del tipo $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$, $] -\infty, b]$ (tutti omeomorfi tra loro) oppure del tipo $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $] -\infty, b[$, $] -\infty, +\infty[$ (tutti omeomorfi tra loro)

Definizione 2

Se $\gamma \subseteq R^3$ (risp. $\subseteq R^2$) è una curva semplice aperta dotata di un solo estremo o priva di estremi, un omeomorfismo di un intervallo I su γ , o, ciò che è lo stesso, una funzione vettoriale definita in I ivi biunivoca e continua, il cui codominio sia γ si dice una rappresentazione parametrica di γ di base I

Analogamente alle curve aperte dotate di estremi, le uguaglianze

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I$$

si dicono terna di equazioni parametriche di γ di base I e il numero reale t prende il nome di parametro.

Curve e parametrizzazioni

Nota una parametrizzazione r , si può pensare ad una curva non solo come ad un sottoinsieme γ dello spazio, immagine di una funzione continua, bensì alla coppia (γ, r) dove $\gamma \subseteq R^3$ ed $r: I \subseteq R \rightarrow R^3$ una funzione continua.

La parametrizzazione $r: I \subseteq R \rightarrow R^3$ corrisponde a quello che fisici e ingegneri chiamano moto o cammino continuo. Essa contiene informazioni cinematiche di una curva.

Più semplicemente, una parametrizzazione è assegnata mediante l'equazione (in forma vettoriale)

$$r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

o (in forma scalare)

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Al variare di t , $r(t)$ descrive γ , detto sostegno della curva che è interpretabile come traiettorie descritte dalla particella e che racchiude gli aspetti geometrici della curva.

Curva e proprio sostegno

Una curva (che è una applicazione) non va confusa col proprio sostegno (che è un sottoinsieme del piano)

Esempio

Consideriamo ad esempio due curve:

$$\begin{aligned}\gamma_1: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma_2: [0, 4\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

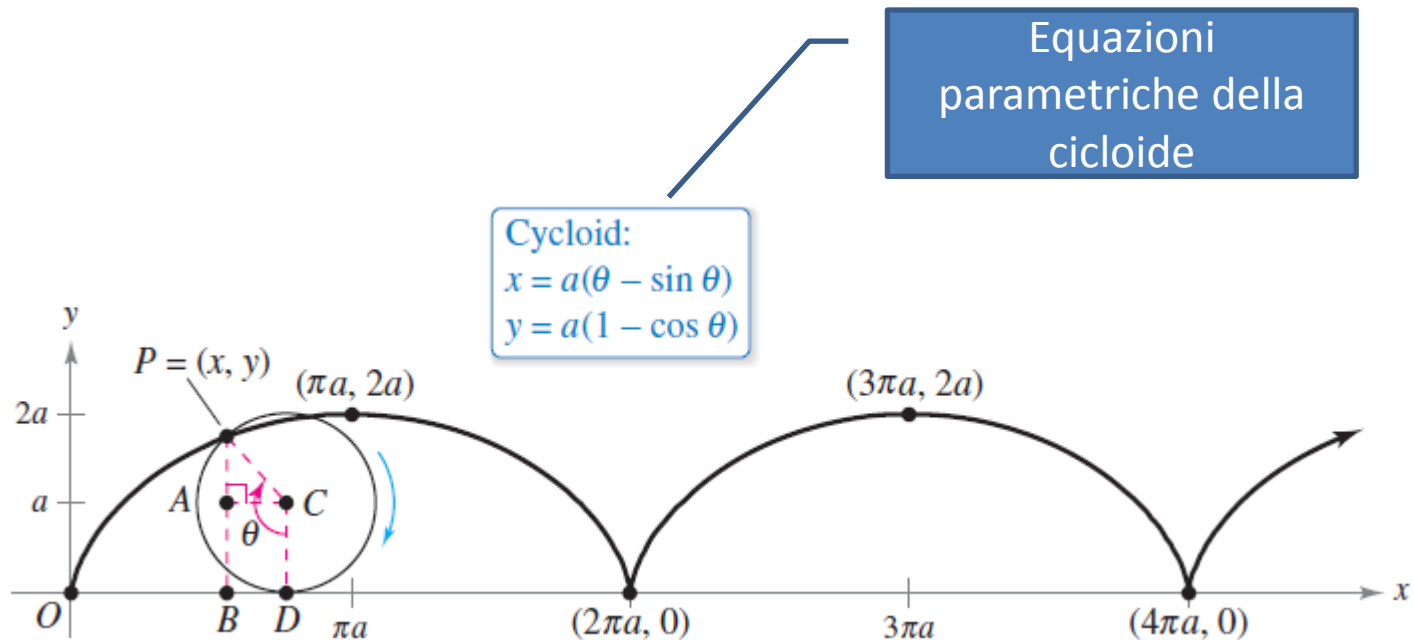
di equazioni parametriche rispettivamente:

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos t \\ y_1(t) = \sin t \end{cases} \text{ con } t \in [0, 2\pi] \text{ e } \begin{cases} x_2(t) = \cos t \\ y_2(t) = \sin t \end{cases} \text{ con } t \in [0, 4\pi]$$

Tali curve, pur avendo il medesimo sostegno, sono distinte, in quanto γ_1 rappresenta il moto di una particella che compie un giro completo ruotando in senso antiorario, mentre γ_2 rappresenta il moto di una particella che compie due giri completi ruotando nello stesso senso.

La cicloide

La **cicloide** (dal greco *kykloeidés*, *kýklos* "cerchio" e *-oeidés* 'forma', cioè che è fatto da un cerchio) è una curva semplice aperta, piana appartenente alla categoria delle rullette. Essa è la curva tracciata da un punto fisso su una circonferenza che *rotola* lungo una retta.



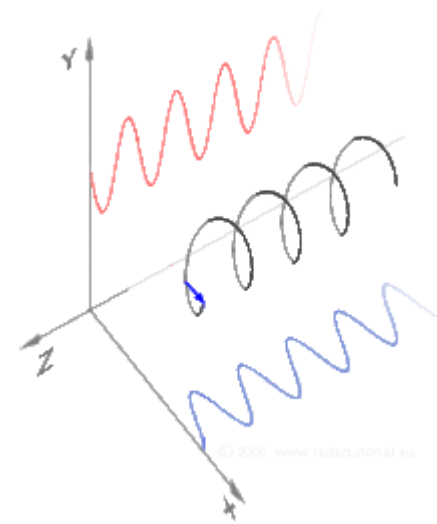
L'elica cilindrica

La curva semplice aperta sghemba di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = \omega t \end{cases}$$

dove r ed ω sono due numeri positivi, si chiama elica cilindrica di raggio r e di passo costante ω .

Si tratta di una curva semplice aperta non dotata di estremi che è inclusa nel cilindro circolare di asse l'asse z e raggio r di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = r^2$.

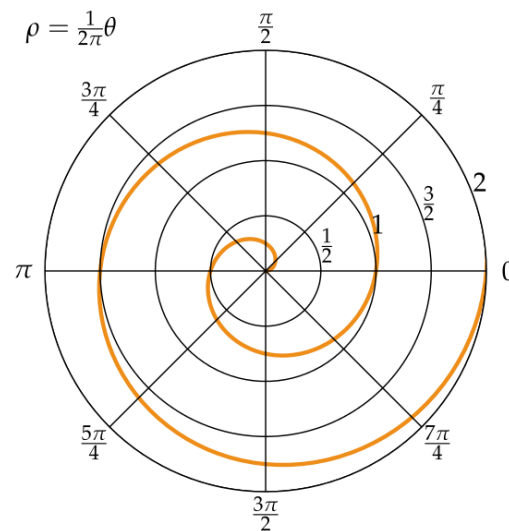
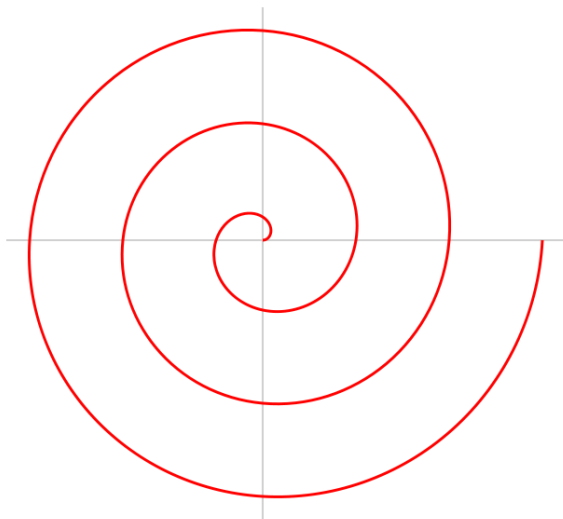


La spirale di Archimede

È una curva semplice aperta, dotata di un solo estremo ed ha equazione polare

$$\rho = a + k\theta \quad \text{con } \theta \in [0, +\infty[$$

dove k è un numero reale positivo



La spirale logaritmica

Una **spirale logaritmica**, **spirale equiangolare** o **spirale di crescita** è un tipo particolare di spirale che si ritrova spesso in natura. La spirale logaritmica è stata descritta la prima volta da Descartes e successivamente indagata estesamente da Jakob Bernoulli, che la definì *Spira mirabilis*, "la spirale meravigliosa. E' una curva semplice aperta, priva di estremi. La sua equazione è:

$$\rho = a \cdot e^{k\theta} \quad \text{con } \theta \in \mathbb{R}$$

oppure

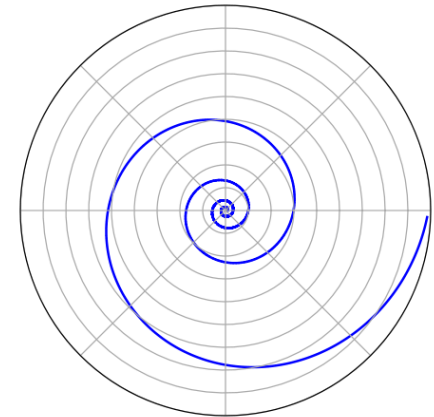
$$\theta = \frac{1}{k} \log \frac{\rho}{a}$$

e in forma parametrica

$$\begin{cases} x(t) = a \cdot e^{k\theta} \cos\theta \\ y(t) = a \cdot e^{k\theta} \sin\theta \end{cases}$$

con a e k numeri reali.

La modifica di a ruota la spirale mentre k controlla quanto è stretta e in quale direzione si avvolge.



Curve semplici chiuse

Definizione 1

Un sottoinsieme $\gamma \subseteq R^3$ (resp. $\subseteq R^2$) si dice una curva semplice chiusa sghemba (o piana) se è il codominio di una funzione vettoriale $p(t)$ definita e continua in un intervallo compatto $[a,b]$, tale che la sua restrizione all'intervallo semiaperto $[a,b[$ sia biunivoca e tale che si abbia $p(a) = p(b)$

Analogamente alle curve aperte dotate di estremi, le uguaglianze

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

si dicono terna di equazioni parametriche di γ di base $[a,b]$ e il numero reale t prende il nome di parametro.

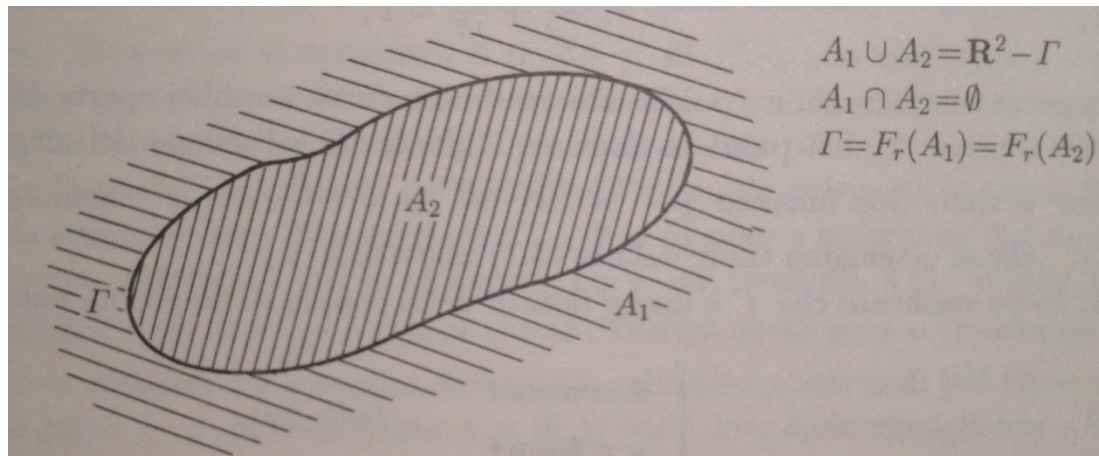
Curve di Jordan

Se il sostegno γ di una curva è tutto contenuto in un piano, si dice che la curva è piana.

Le curve piane, semplici e chiuse si chiamano curve di Jordan

Teorema

Una curva di Jordan è frontiera di due insiemi aperti nel piano, uno dei quali è limitato e si chiama interno della curva, l'altro illimitato, detto esterno

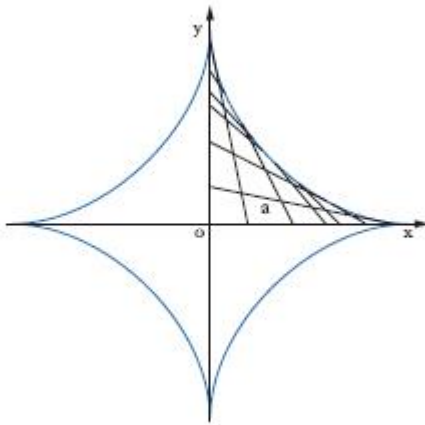


L'asteroide

La curva piana, semplice chiusa, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r\cos^3 t \\ y = r\sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

con $r \in \mathbb{R}^+$ si chiama asteroide



Orientazione di una curva

Consideriamo una curva γ di equazione $r = r(t)$. Il parametro t appartiene a un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Essendo \mathbb{R} orientato, anche I sarà tale, cosicché è automaticamente assegnato su γ un verso di percorrenza ovvero una orientazione della curva.

Si potrà allora dire che una coppia (γ, r) definisce una curva orientata.

Definizione

Sia γ una curva semplice aperta orientata, p_0 un suo punto, p il generico suo altro punto diverso da p_0 , sia $s_p = \pm \frac{p-p_0}{\|p-p_0\|}$ con la scelta $+$ o $-$ a seconda che p segua o preceda p_0 secondo il verso scelto su γ . Nell'ipotesi che esista il limite

$$\lim_{p \rightarrow p_0} s_p = \lim_{p \rightarrow p_0} \pm \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|}$$

che è evidentemente un versore, diciamolo t_0 esso si chiama versore tangente positivo a γ nel punto p_0 .

Curve semplici regolari

Sia γ una curva semplice aperta orientata, $p(t)$ una sua rappresentazione parametrica di base l'intervallo I , concorde con l'orientamento di γ . Allora se $p(t)$ è derivabile in $t_0 \in I$ e il vettore derivato $p'(t_0)$ è diverso dal vettore nullo, γ è dotata nel punto $p_0 = p(t_0)$ di versore tangente positivo e questo ha l'espressione

$$t(p_0) = \frac{p'(t_0)}{\|p'(t_0)\|}$$

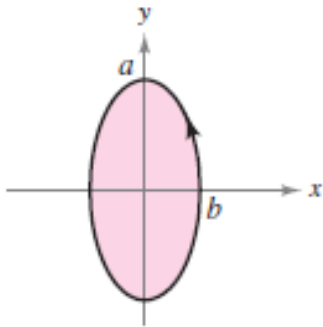
Lo stesso risultato vale se γ è una curva semplice chiusa orientata, $p(t)$ una sua rappresentazione parametrica di base l'intervallo $[a,b]$, concorde con l'orientamento di γ

Esempi di curve

Ellipse: ($0 \leq t \leq 2\pi$)

$$x = b \cos t$$

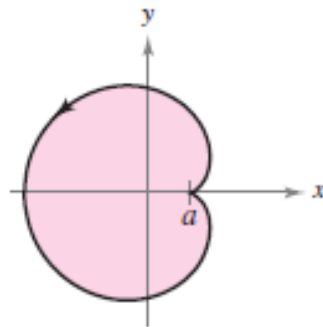
$$y = a \sin t$$



Cardioid: ($0 \leq t \leq 2\pi$)

$$x = 2a \cos t - a \cos 2t$$

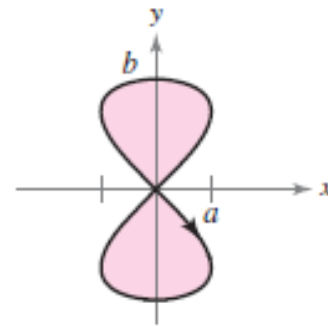
$$y = 2a \sin t - a \sin 2t$$



Hourglass: ($0 \leq t \leq 2\pi$)

$$x = a \sin 2t$$

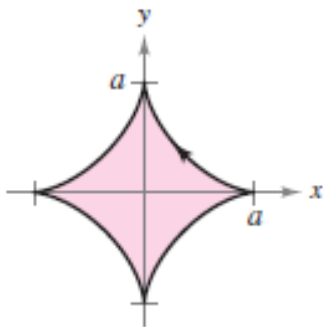
$$y = b \sin t$$



Astroid: ($0 \leq t \leq 2\pi$)

$$x = a \cos^3 t$$

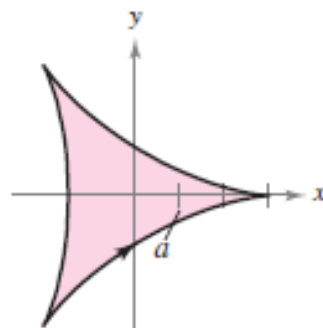
$$y = a \sin^3 t$$



Deltoid: ($0 \leq t \leq 2\pi$)

$$x = 2a \cos t + a \cos 2t$$

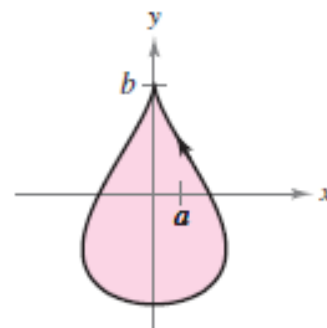
$$y = 2a \sin t - a \sin 2t$$



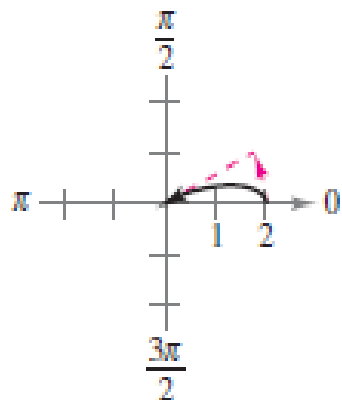
Teardrop: ($0 \leq t \leq 2\pi$)

$$x = 2a \cos t - a \sin 2t$$

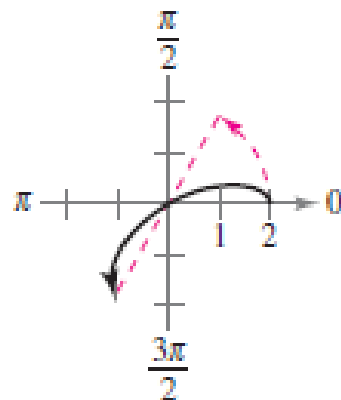
$$y = b \sin t$$



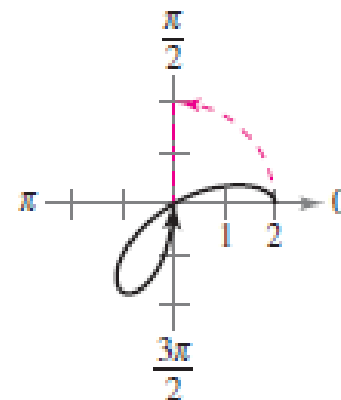
Come si costruisce il trifolium



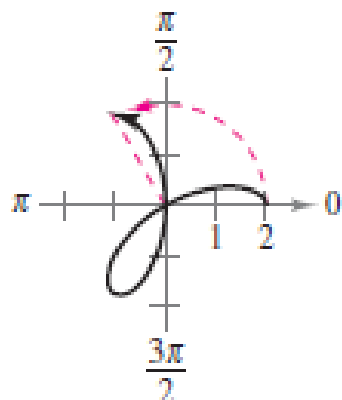
$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$$



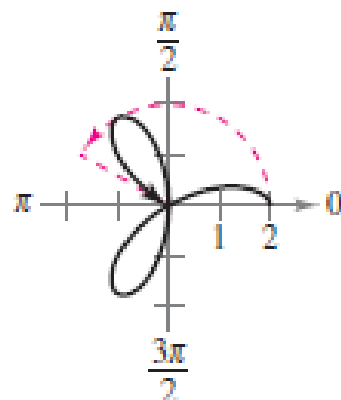
$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$



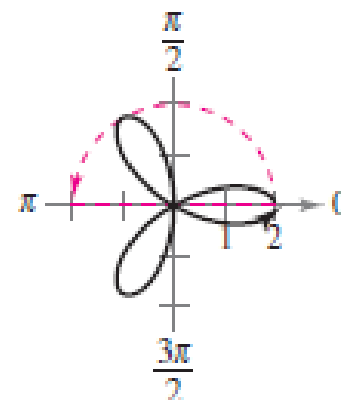
$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



$$0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$$

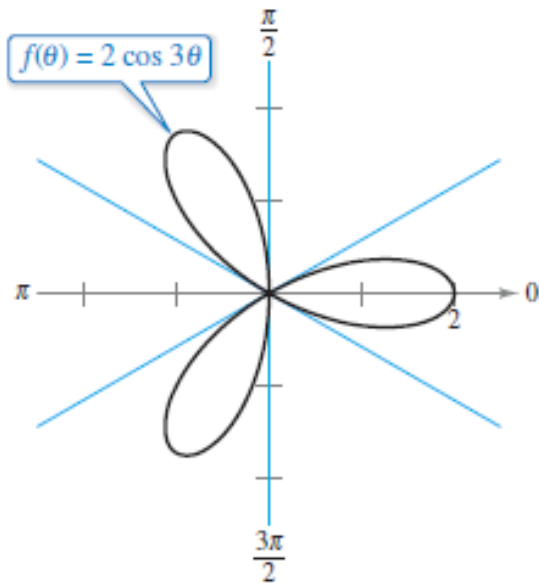


$$0 \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$$

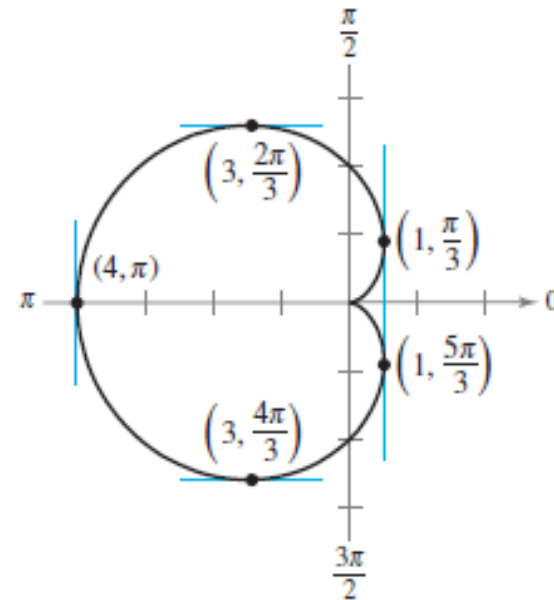


$$0 \leq \theta \leq \pi$$

Il trifolium e la cardioide



This rose curve has three tangent lines ($\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/2$, and $\theta = 5\pi/6$) at the pole.



Horizontal and vertical tangent lines of $r = 2(1 - \cos \theta)$

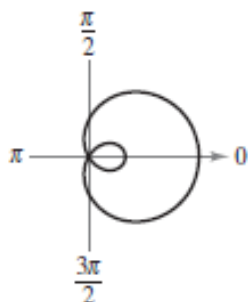
Altre curve notevoli

Limaçons

$$r = a \pm b \cos \theta$$

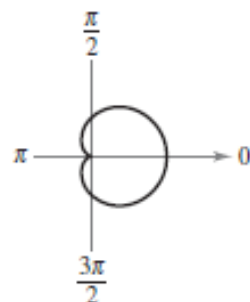
$$r = a \pm b \sin \theta$$

$$(a > 0, b > 0)$$



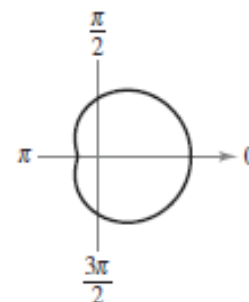
$$\frac{a}{b} < 1$$

Limaçon with
inner loop



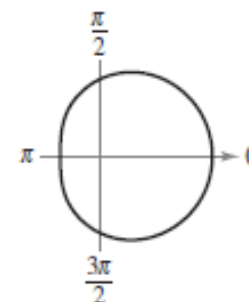
$$\frac{a}{b} = 1$$

Cardioid
(heart-shaped)



$$1 < \frac{a}{b} < 2$$

Dimpled limaçon



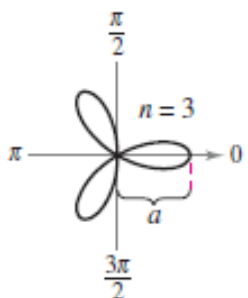
$$\frac{a}{b} \geq 2$$

Convex limaçon

Rose Curves

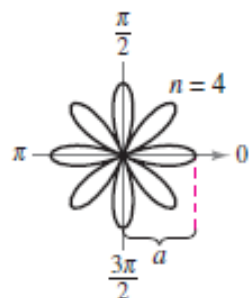
n petals when n is odd

$2n$ petals when n is
even ($n \geq 2$)



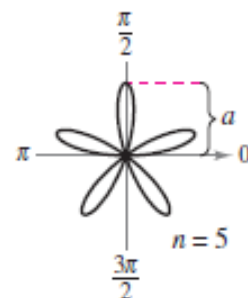
$$r = a \cos n\theta$$

Rose curve



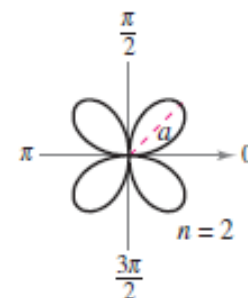
$$r = a \cos n\theta$$

Rose curve



$$r = a \sin n\theta$$

Rose curve



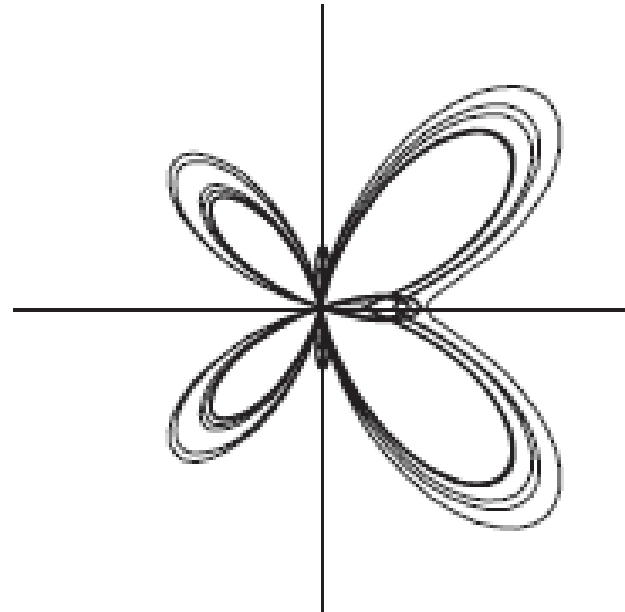
$$r = a \sin n\theta$$

Rose curve

Ancora una curva notevole

Butterfly Curve Use a graphing utility to graph the curve shown below. The curve is given by

$$r = e^{\cos \theta} - 2 \cos 4\theta + \sin^5 \frac{\theta}{12}.$$



Lunghezza di una curva

Una curva nel piano può essere approssimata collegando un limitato numero di punti sulla curva e utilizzando segmenti di linea per creare un percorso poligonale. Poiché è facile calcolare la lunghezza di ogni segmento lineare (utilizzando il teorema di Pitagora nello spazio euclideo, per esempio), la lunghezza totale della approssimazione può essere trovata sommando le lunghezze di ciascun segmento lineare. La somma delle lunghezze dei segmenti è la lunghezza del "cammino poligonale". La lunghezza del segmento sarà definita come la distanza tra i due estremi. La lunghezza della curva è il più piccolo numero che la lunghezza del cammino poligonale non può superare, ovvero è l'estremo superiore della lunghezza del cammino della poligonale, al variare delle poligonali



Lunghezza di una curva

Definizione 4

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow R$ una curva continua, si consideri una partizione $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ dell'intervallo $[a, b]$. La poligonale P , inscritta nel sostegno della curva e di vertici $\gamma(a), \gamma(t_1), \dots, \gamma(b)$ ha (per definizione) lunghezza pari a:

$$l(P) = \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

Si definisce lunghezza della curva γ il valore:

$$L(\gamma) = \sup_P l(P)$$

dove P rappresenta tutte le possibili poligoni inscritte.

Lunghezza di una curva

Teorema di rettificabilità delle curve

Se $\gamma: [a, b] \rightarrow R^n$ è una curva di classe C^1 allora essa è rettificabile e la sua lunghezza $L(\gamma)$ è data dall'integrale:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

dove $\|v\|$ rappresenta la norma euclidea di un generico vettore v .

La forma

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

può anche essere espressa come:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

Lunghezza di una curva

In particolare, se γ è una curva piana rappresentata, nell'intervallo $[a,b]$ dall'equazione $y = f(x)$, con $f(x)$ continua con la sua derivata prima, la lunghezza $L(\gamma)$ è espressa da:

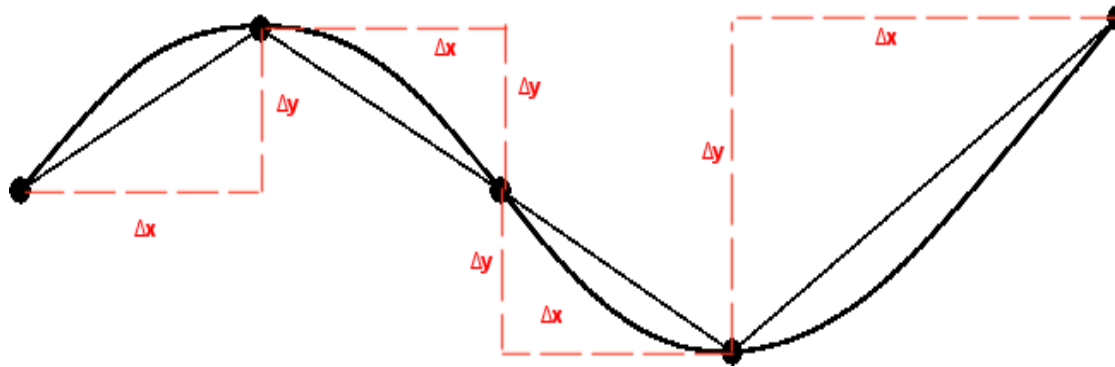
$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Infine, se la curva γ è rappresentata, nell'intervallo $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ dall'equazione polare $\rho = \rho(\theta)$

con $\rho(\theta)$ continua con la sua derivata prima, allora si ha:

$$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta$$

Dimostrazione



Supponiamo che esista una curva rettificabile data da una funzione $f(x)$. Per approssimare la lunghezza dell'arco S tra due punti possiamo costruire una serie di triangoli rettangoli come mostrato in figura. Per comodità, le basi di tutti i triangoli possono essere posti uguali a Δx , in modo che ad ognuno di essi sia associato un Δy . La lunghezza di ogni ipotenusa è data dal teorema di Pitagora:

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

La somma delle lunghezze delle n ipotenuse approssima S :

$$S \sim \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

Moltiplicando il radicando da $\Delta x^2 / \Delta x^2$ produce:

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2) \frac{\Delta x^2}{\Delta x^2}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

Poi, il nostro risultato precedente diventa:

$$S \sim \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Se la lunghezza Δx di questi segmenti viene presa sempre più piccola, l'approssimazione migliora. Il limite dell'approssimazione, quando Δx va a zero, è pari a S :

$$S = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Si può dimostrare che tale lunghezza non dipende né dagli assi di riferimento né dalla particolare rappresentazione parametrica ma dipende soltanto dalla curva γ .

Curve Equivalenti

Due curve parametriche si dicono equivalenti se, dette esse

$$\gamma(t) = [a, b] \rightarrow R^N$$

e

$$\delta(t) = [c; d] \rightarrow R^N$$

esiste una funzione

$$f: [c, d] \rightarrow [a, b]$$

- derivabile con continuità su $[c, d]$
- strettamente monotona su $[c, d]$

tale che risulti

$$\delta(t) = \gamma(f(t))$$

Si noti che una funzione come f è un diffeomorfismo di classe C^1 , in quanto è di classe C^1 , invertibile e con inversa di classe C^1 .

Teorema sulla Lunghezza di Curve Equivalenti

Due curve equivalenti σ e γ hanno la stessa lunghezza.

Dimostrazione

Sia $\sigma(t) = \gamma(p(t))$, con $p'(t) \neq 0$. Supponiamo, per fissare le idee, che sia $p'(t) > 0$. Allora si ha

$$\|\sigma'(t)\| = \|\gamma'(p(t))\|p'(t)$$

Quindi

$$L(\sigma) = \int_c^d \|\sigma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(p(t))\|p'(t) dt$$

Nell'integrale a secondo membro si può fare un cambiamento di variabili $p(t) = u$. Poiché $p(t)$ è crescente, si ha $p(c) = a$ e $p(d) = b$ e dunque risulta

$$L(\sigma) = \int_c^d \|\gamma'(p(t))\|p'(t) dt = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du = L(\gamma)$$

Se invece risulta $p'(t) < 0$ allora $p(c) = b$ e $p(d) = a$

$$L(\sigma) = - \int_c^d \|\gamma'(p(t))\|p'(t) dt = \int_b^a \|\gamma'(u)\| du = L(\gamma)$$