Prof. Roberto Capone

Complementi di dinamica

Corso di Complementi di Fisica
2014/2015
Corso di laurea in Ingegneria edile

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL MOLISE

La quantità di moto

La seconda legge di Newton, che mette in relazione il moto di un corpo alle cause che generano tale moto, si esprime formalmente attraverso la relazione

$$F = ma$$

Tale formulazione non si deve a Newton ma ad Eulero; infatti Newton non si riferì mai alla massa e all'accelerazione ma alla variazione di moto (oggi comunemente detta quantità di moto):
"Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur"
ovvero, un punto materiale (cioè un corpo di dimensioni trascurabili rispetto al sistema di riferimento in esame e contemporaneamente dotato di massa) al quale sia applicata una forza, varia la quantità di moto in misura proporzionale alla forza, e lungo la direzione della stessa.

Impulso e quantità di moto

Si consideri un punto materiale che in un sistema di riferimento inerziale si muove sottoposto alla forza risultante F: la sua equazione del moto è dunque:

$$F = ma$$

L'accelerazione può essere scritta come:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Pertanto:

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

Moltiplicando per *dt* e int

Teorema dell'impulso: *“ l'impulso della forza agente su un punto materiale tra gli istanti t_1 e t_2 è pari alla variazione che la quantità di moto del punto subisce nello stesso intervallo di tempo”.*

L'integrale a primo memb
e lo indicheremo:

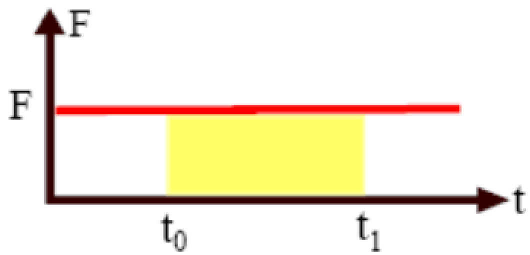
$$I_{12} \quad \cdots \quad \cdot\, dt$$

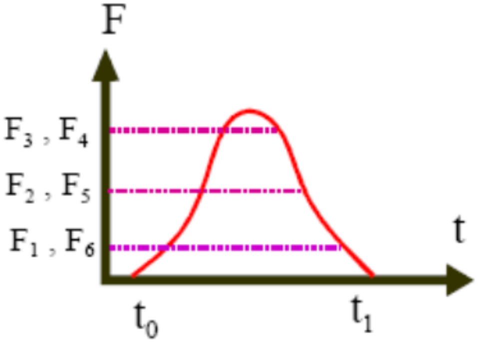
da cui si ottiene

$$I_{12} = mv_2 - mv_1$$

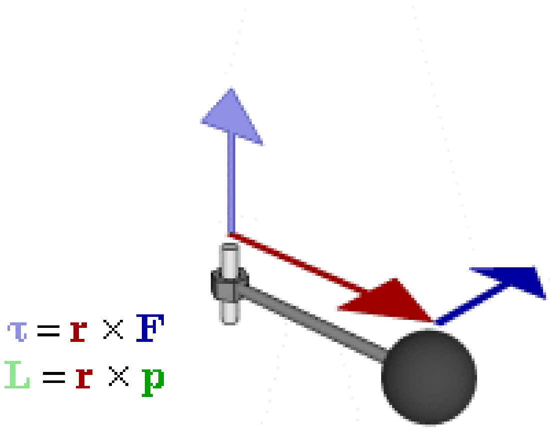
Impulso di una forza

Se in un piano cartesiano poniamo la forza in funzione del tempo abbiamo il seguente diagramma riferito ad una forza costante a cui è soggetto un corpo. L'area della regione di piano sottesa alla curva (evidenziata in giallo) è l'impulso della forza relativo a quell'intervallo di tempo.





Momento della forza



Il momento meccanico, indicato con M o, in ambito anglosassone, con τ (dall'inglese torque), esprime l'attitudine di una forza a imprimere la rotazione ad un oggetto attorno ad un punto (nel piano) o ad un asse (nello spazio). Costituisce quindi il momento della forza.

Il momento meccanico è uno pseudovettore, non uno scalare come l'energia o il lavoro. Per questo motivo l'unità di misura del momento meccanico nel SI è N·m o Nm (newton per metro), non il joule, anche se le due unità hanno le stesse dimensioni fisiche.

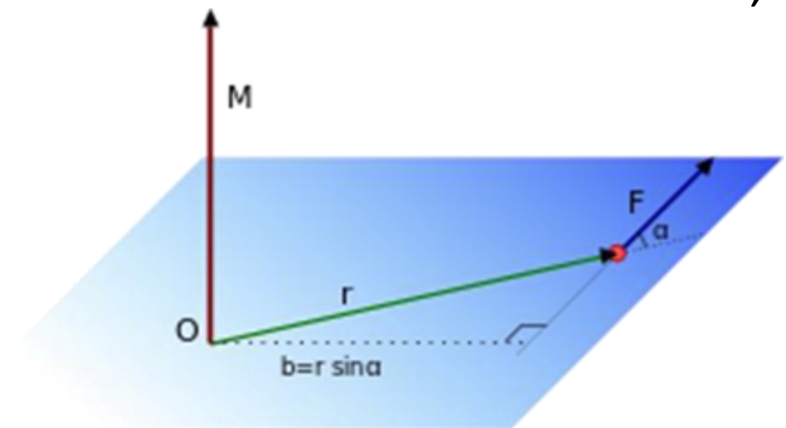
Il momento: deifinizione operativa

Il **momento meccanico polare** rispetto ad un determinato punto r detto *polo* o *centro di riduzione* è definito in meccanica newtoniana come il prodotto vettoriale tra il vettore **posizione** (rispetto al polo stesso) e la forza:

$$M = r \times F = r \cdot F \cdot sin\theta = F \cdot b$$

Avendo indicato con B il braccio della forza, ovvero la distanza del punto di applicazione del vettore forza dal polo di riferimento.

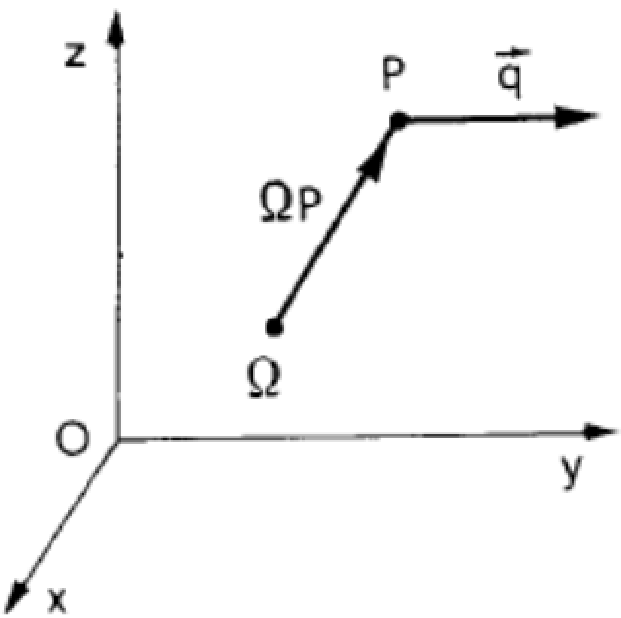
Il vettore **M** è perpendicolare al piano definito da **F** e da **r**; il verso, come espresso dalla regola della mano destra, è quello di un osservatore che vede ruotare **F** in senso antiorario. Se **F** ed **r** sono ortogonali tra loro, il braccio (vedi leva) si identifica con *r*, e il modulo del momento è massimo. Il momento può essere nullo se la forza o il braccio sono nulli, oppure se **F** è parallela a **r**.



Il momento angolare

Si consideri un punto materiale P che si muova in un sistema di riferimento inerziale. Sia $q = mv$
la sua quantità di moto e scegliamo un punto Ω di riferimento. Si chiama momento angolare o momento della quantità di moto del punto P rispetto al polo Ω il vettore:

$$p = \Omega P \times q$$



Ci proponiamo di stabilire quale sia l'equazione dinamica che governa p.

Il momento angolare

Dal secondo principio della dinamica, si ha:

$$F = \frac{dq}{dt}$$

Moltiplicando vettorialmente a sinistra ambo i membri per il vettore ΩP otteniamo:

$$\Omega P \times F = \Omega P \times \frac{dq}{dt}$$

Il primo membro di questa equazione prende il nome di momento della forza F rispetto al polo Ω:

$$M = \Omega P \times F$$

Dunque, per quanto detto sopra:

$$M = \Omega P \times \frac{dq}{dt}$$

Il momento angolare

L'espressione a destra può anche essere scritta come:

$$\frac{d(\Omega P \times q)}{dt} = \frac{dp}{dt} = \frac{d\Omega P}{dt} \times q + \Omega P \times \frac{dq}{dt}$$

da cui

$$M = \frac{dp}{dt} - \frac{d\Omega P}{dt} \times q$$

Si può ora osservare che

$$\frac{d\Omega P}{dt} = v - v_\Omega$$

cioè:

$$M = \frac{dp}{dt} - (v - v_\Omega) \times q$$

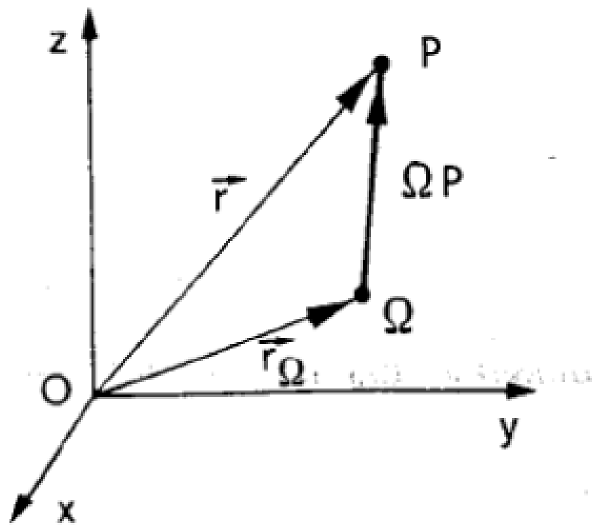
Il momento angolare

Osservando che i vettori v e q sono paralleli, per cui il loro prodotto vettoriale è nullo, si ha:

$$M = \frac{dp}{dt} + v_\Omega \times q$$

Ma v_Ω è la velocità del polo Ω nel sistema di riferimento inerziale considerato e nel caso in cui un punto sia fermo nel sistema di riferimento in esame si ottiene:

$$M = \frac{dp}{dt}$$



"In ogni sistema di riferimento inerziale, se si sceglie un punto fisso come polo, il momento della forza risultante agente su un punto materiale è pari alla derivata rispetto al tempo del momento angolare del punto materiale stesso"
(Teorema del momento angolare o teorema del momento della quantità di moto)

Applicazione: il pendolo semplice

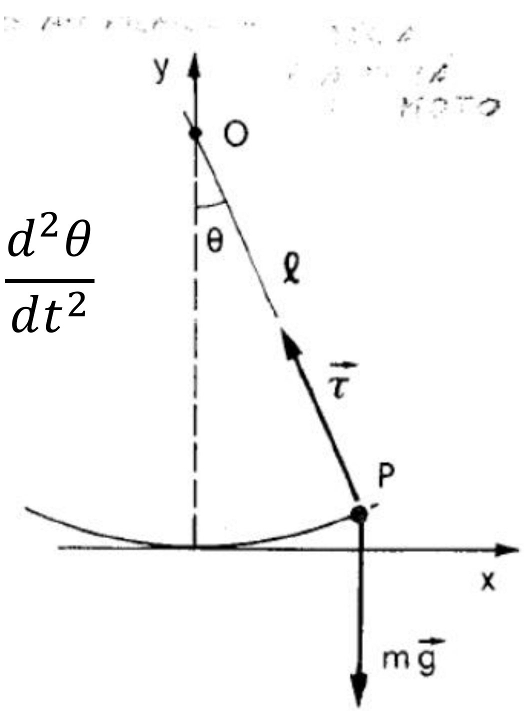
Se scegliamo come polo il punto di sospensione O, potremo scrivere, relativamente al momento esercitato dalle forze:

$$m = OP \times F = OP \times (\tau + mg) = OP \times mg$$

Avendo tenuto presente che OP e τ sono fra loro paralleli.

$$OP \times mg = \frac{dp}{dt} = \frac{d(OP \times mv)}{dt}$$

$$-lmgsin\theta = lm\frac{dv}{dt} = lm\frac{d\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt} = l^2m\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



Il momento angolare

Eseguendo le opportune semplificazioni si ottiene:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sin\theta = 0$$

Nello scrivere questa equazione si è tenuto conto che:
Il vettore OP (di modulo pari a l) e il vettore mg formano un angolo θ: il modulo del loro prodotto vettoriale vale pertanto $|lmgsin\theta|$;
La proiezione lungo l'asse z di tale prodotto vettoriale vale $-lmgsin\theta$;
La velocità v del punto materiale è tangenziale alla circonferenza di raggio l e centro O ed è dunque ortogonale a OP. Inoltre, $v = OP \cdot \frac{d\theta}{dt} = l \cdot \frac{d\theta}{dt}$.

Per valori di θ molto piccoli, si può approssimare sinθ=θ, ottenendo così l'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti:

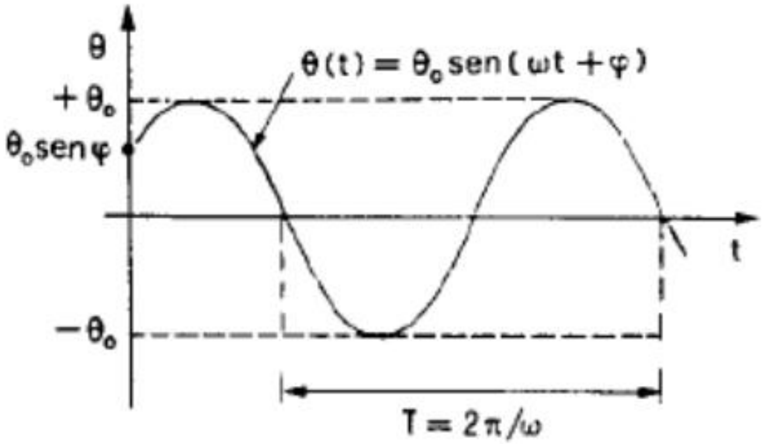
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Il momento angolare

La soluzione di tale equazione ci fornisce l'espressione:

$$\theta(t) = \theta_0 sin(\omega t + \varphi)$$

che esprime come varia l'angolo θ in funzione del tempo.



$\theta(t) = \theta_0 sin(\omega t + \varphi)$

Un moto, la cui legge oraria è rappresentata da una espressione siffatta prende il nome di moto oscillatorio armonico:

- $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ rappresenta la pulsazione del moto armonico;
- l'angolo θ rappresenta l'ampiezza angolare del moto;
- all'istante t=0, l'angolo $\theta = \theta_0 \sin \varphi$, dove φ rappresenta la fase iniziale;
- il moto si ripete con regolarità ogni qualvolta trascorre un tempo caratteristico T detto periodo legato alla pulsazione dalla relazione:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Problemi d'urto

Nell'opera *De motu corporum ex percussione* (pubblicata postuma nel 1703) a conclusione di accurate ricerche protrattesi per vari anni Huygens espose, dandone notevoli dimostrazioni, le sue classiche leggi sull'urto dei corpi elastici. Nell'ambito di queste indagini formulò il principio della conservazione della forza viva.

Si definisce urto una interazione tra due particelle, (senza che necessariamente avvenga il contatto) che avviene in un intervallo di tempo talmente breve da potersi considerare trascurabili le azioni di eventuali forze esterne agenti sul sistema .

Classificazione:

Elastico
- si conserva l'energia meccanica totale del sistema

Anelastico
- l'energia meccanica totale non si conserva

Completamente anelastico
- I due corpi procedono insieme dopo l'urto

Urto elastico

Consideriamo due corpi approssimabili come punti materiali che urtino frontalmente. Mettiamoci in un sistema di riferimento *S*. Indichiamo con:

v_{1i} la velocità iniziale del primo corpo; v_{2i} la velocità iniziale del secondo corpo

v_{if} la velocità finale del primo corpo; v_{2f} la velocità finale del secondo corpo

m_1 la massa del primo corpo; m_2 la massa del secondo corpo

Imponiamo la conservazione dell'energia cinetica *K* e della quantità di moto q; otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} K_i = K_f \\ q_i = q_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \\ m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1v_{1i}^2 - m_1v_{1f}^2 = m_2v_{2f}^2 - m_2v_{2i}^2 \rightarrow m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) \\ m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ v_{2f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2i} + 2m_1v_{1i}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Urto completamente anelastico

Nel caso poi sia **anelastico totale**, i corpi, dopo la collisione, restano a contatto e possono essere considerati come un unico corpo ed essi viaggiano con la stessa velocità, come può essere il caso di un'automobile che urta contro un camion e rimane incastrata in esso: nel sistema, dopo l'urto, automobile e camion si fondono in un unico corpo, che continua a viaggiare con una velocità V diversa dalla velocità iniziale dell'automobile e da quella del camion.

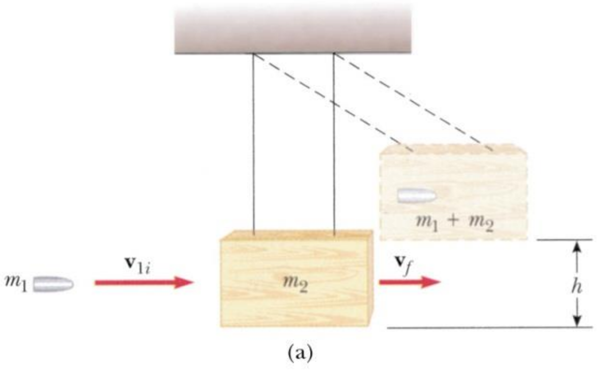
La legge di conservazione della quantità di moto del sistema è: $q_t = \sum M \cdot v = cost$

per gli *urti anelastici totali*, si può scrivere

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V$$

dove $m_1 v_1$ e $m_2 v_2$ rappresentano le quantità di moto prima dell'urto rispettivamente del primo corpo di massa m_1 e del secondo corpo di massa m_2, mentre $(m_1 + m_2)V$ è la quantità di moto dell'intero sistema dopo l'urto, cioè quando i due corpi si fondono in un unico corpo di massa pari alla somma delle precedenti, V ricavabile dalla precedente espressione, rappresenta la velocità con cui si muovono i due corpi insieme dopo l'urto

Il pendolo balistico

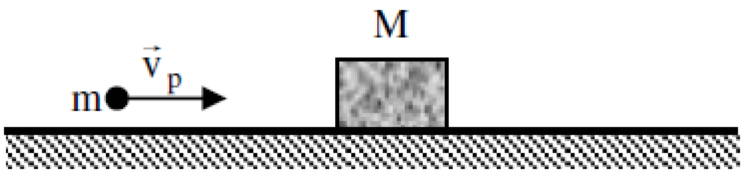


Il pendolo balistico è un dispositivo che era usato per misurare la velocità dei proiettili prima dell'introduzione dei cronometri elettronici. Si tratta di un voluminoso blocco di legno di massa m_2 sospeso a due lunghe funi; un proiettile di massa m_1 è sparato contro il blocco, nel quale rimane incastonato. Il sistema blocco+proiettile oscilla quindi verso destra e il centro di massa del sistema si alza per una distanza verticale h prima che il pendolo arrivi ad arrestarsi momentaneamente alla massima elongazione. Qual era la velocità del proiettile immediatamente prima la collisione?

$$m_1 v = (m_1 + m_2)V \qquad \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = (m_1 + m_2)gh \qquad v = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1}\sqrt{2gh}$$

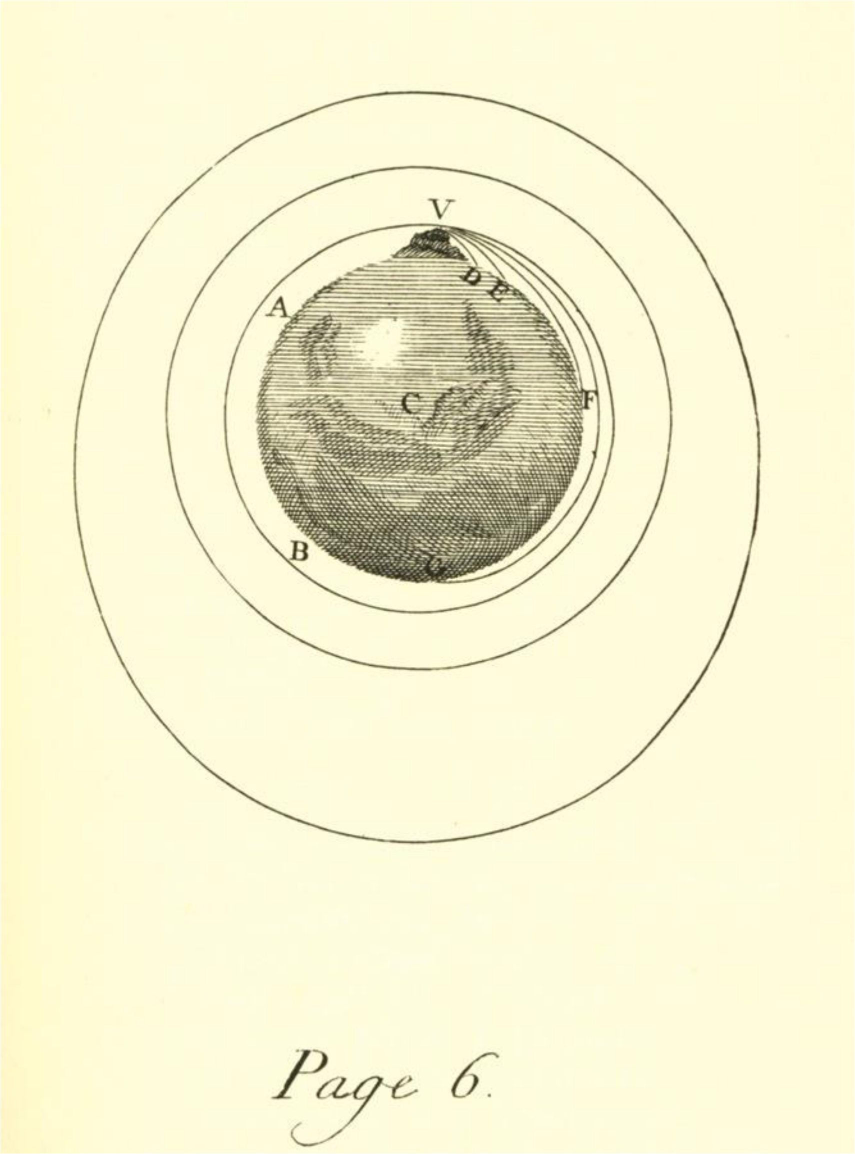
Esercizio

Un proiettile di massa m=5g viene sparato orizzontalmente in un blocco di legno, di dimensioni trascurabili e massa M=3kg, fermo su una superficie orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico tra il blocco e la superficie orizzontale è $\mu_d = 0.20$.
Il proiettile rimane attaccato al blocco, che scivola di d=25 cm lungo la superficie prima di fermarsi.



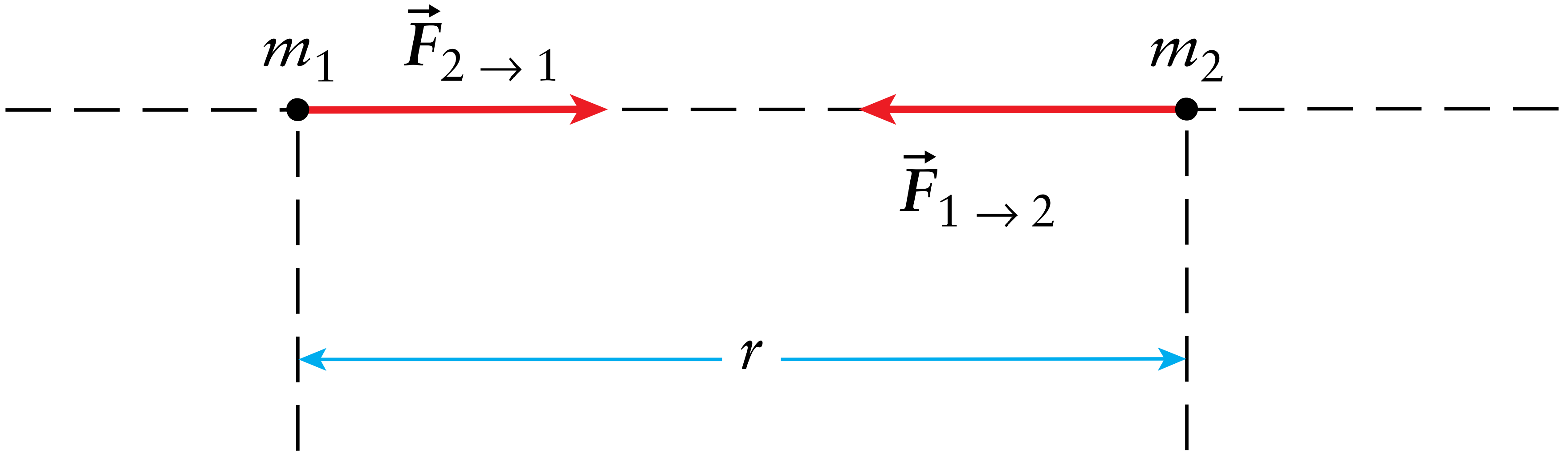
Calcolare
· Il lavoro della forza di attrito tra il blocco di legno e la superficie orizzontale durante lo spostamento del blocco di legno
· Il tempo impiegato dal blocco di legno per fermarsi
· La velocità con cui è sparato il proiettile
· L'energia dissipata dal proiettile nell'urto con il blocco di legno

La gravitazione



Isaac Newton immaginò che una palla di cannone sparata in direzione orizzontale dall'alto di una montagna avesse sufficiente energia da far sì che la velocità alla quale essa cadeva verso la Terra potesse coincidere con la rapidità con cui la superficie terrestre si curvava, permettendo alla palla di cannone di muoversi con un moto di rivoluzione attorno alla Terra. (Principia, 1687)

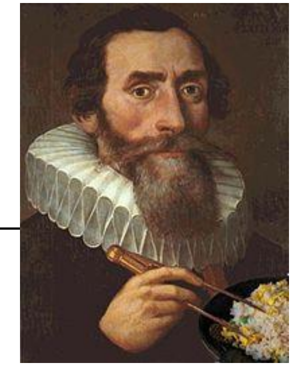
La legge di gravitazione



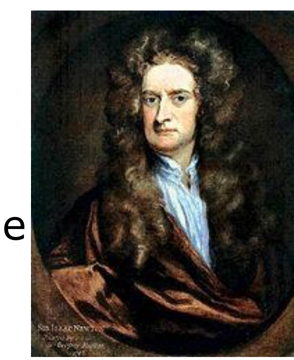
La gravitazione

La gravitazione

« Il mio spirito ha misurato il cielo, ora misura la profondità della terra »



Copernico →	Teoria eliocentrica
TychoBrahe →	Condusse studi sul moto dei pianeti e della luna
Keplero →	Tre leggi sul moto dei pianeti
Newton →	Legge della gravitazione universale



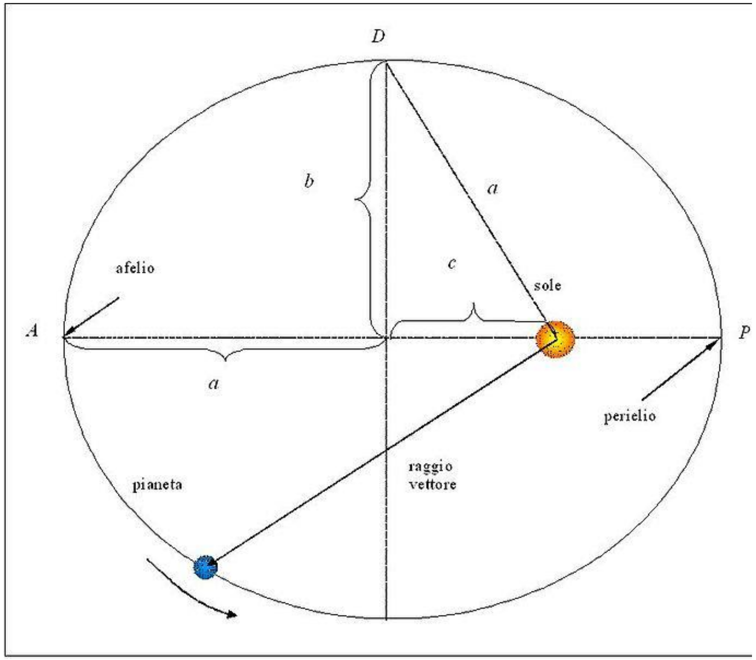
Le leggi di Keplero

Le **tre leggi del movimento dei pianeti** sono il principale contributo di Johannes Kepler, detto Keplero, all'astronomia e alla meccanica. Keplero le derivò in parte studiando le osservazioni di Tycho Brahe. Isaac Newton avrebbe più tardi verificato la validità di queste leggi alla luce della teoria della gravitazione universale.

Prima legge (1608)

L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

Le leggi di Keplero



Per la prima volta nella storia della scienza Keplero elimina dall'astronomia le sfere celesti e ipotizza per i pianeti un moto diverso da quello circolare. Osserviamo che, poiché l'ellisse è una figura piana, i moti dei pianeti avvengono in un piano, detto piano orbitale. Per la terra tale piano è detto eclittica.

Nella figura a fianco è rappresentata un'orbita ellittica, con indicati i suoi parametri caratteristici: semiasse maggiore (a), semiasse minore (b), semi-distanza focale (c), eccentricità (e).

Tra questi parametri esistono le relazioni seguenti:

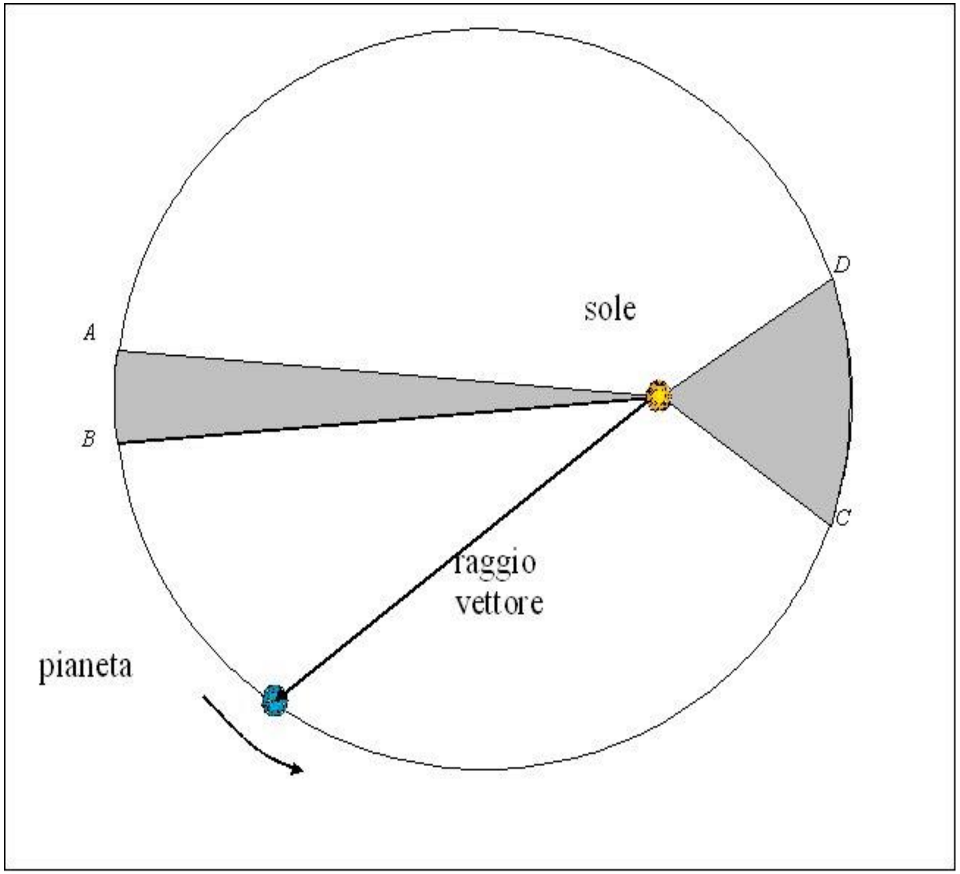
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad e = \frac{c}{a}$$

L'ellisse in figura ha un'eccentricità di circa 0,5 e potrebbe rappresentare l'orbita di un asteroide. I pianeti hanno in realtà eccentricità molto più piccole: 0,0167 per la Terra, 0,0934 per Marte e 0,2482 per Plutone.

Le leggi di Keplero

Seconda legge (1609) o legge delle aree

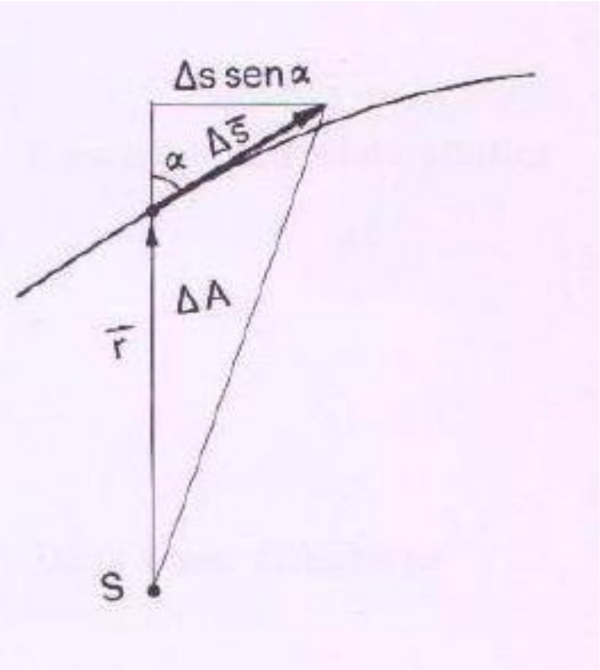
Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.



Le leggi di Keplero

La velocità orbitale non è costante, ma varia lungo l'orbita. Le due aree evidenziate nella figura qui a fianco sono infatti uguali e vengono quindi percorse nello stesso tempo. In prossimità del perielio, dove il raggio vettore è più corto che all'afelio, l'arco di ellisse è corrispondentemente più lungo. Ne segue quindi che la velocità orbitale è massima al perielio e minima all'afelio. Per l'orbita qui raffigurata, la velocità al perielio è circa 3 volte la velocità all'afelio.
La velocità areolare è costante.
Il momento angolare orbitale del pianeta si conserva (vedi riquadro sotto per la dimostrazione).
.

Le leggi di Keplero



La velocità lungo una determinata orbita è *inversamente proporzionale* al modulo del raggio vettore. Questa è una conseguenza della conservazione del momento angolare. Se *L*, dato dal prodotto di *m*, *r* e v_t è costante ne discende che v_t è inversamente proporzionale a *r* .

Sul pianeta viene esercitata una forza centrale, cioè diretta secondo la congiungente tra il pianeta e il sole. La seconda legge della dinamica per i sistemi in rotazione è

$M = \frac{dL}{dt}$, dove M è il momento della forza applicata. Poiché L si conserva, la sua variazione è nulla e quindi anche M è nullo. Questo può accadere solo se F è parallelo ad r, cioè è diretto come la congiungente con il sole

Le leggi di Keplero

Orbita piana e velocità areolare costante sono conseguenza del fatto che la forza gravitazionale che il Sole esercita sui pianeti è una forza centrale. Pertanto, scegliendo come polo il Sole stesso, il momento

$$\overrightarrow{m} = \vec{r} \times \vec{f}$$

della forza è nullo ($\vec{r}\ ed\ \vec{f}$ sono fra loro paralleli o meglio antiparalleli)

Per il teorema del momento angolare sappiamo che

$$\overrightarrow{m} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = costante$$

Il fatto che l'orbita sia piana segue dal fatto che la direzione di $\vec{p}$ è costante: in effetti, la direzione di $\vec{p}$ è ortogonale al piano che contiene $\vec{r}\ e\ \vec{v}$ e se la direzione di $\vec{p}$ non cambia, non può cambiare la giacitura di tale piano. Il fatto che la velocità areolare è costante è invece conseguenza del fatto che è costante il modulo di $\vec{p}$

Le leggi di Keplero

Come si può vedere dalla figura, l'area A spazzata dal raggio vettore nell'intervallo elemetare di tempo Δt è data, a meno di infinitesimi di ordina superiore, da

$$\Delta A = \frac{1}{2} r \cdot \Delta s \cdot sin\alpha = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta\vec{s}|$$

Infatti r e $\Delta s \cdot sin\alpha$ rappresentano rispettivamente la base e l'altezza del triangolo di cui ΔA si approssima a meno di infinitesimi di ordine superiore. La velocità areolare $A' = \frac{dA}{dt}$ vale dunque:

$$A' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} \right| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}|$$

Come si vede, la velocità areolare risulta essere proporzionale al modulo p di $\vec{p}$ (si ricordi che $p = m|\vec{r} \times \vec{v}|$)

La costanza di p implica la costanza di A'

Le leggi di Keplero

Terza legge (1619)

I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono direttamente proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite.

Questa legge è valida anche per i satelliti che orbitano intorno ai pianeti e può essere espressa in forma matematica nel modo seguente:

$$K = \frac{T^2}{d^3}$$

dove *K* è una costante (a volte detta di Keplero), che dipende dal corpo celeste preso in considerazione (il Sole o qualcuno degli altri pianeti). Per un'orbita circolare la si riduce a

$$T^2 = Kr^3$$

dove *r* è il raggio dell'orbita.

Le leggi di Keplero

Tra il sole e i pianeti sussiste la forza di gravitazione universale nota come forza di Newton

$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$

Valendo la II legge della dinamica, la forza F deve essere uguagliata al prodotto di massa per accelerazione:

$$G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} = ma$$

Ed assimilando le orbite circolari, l'accelerazione è:

$$a = \omega^2 d$$

Da cui:

$$G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} = m_1 \omega^2 d$$

Posso semplificare m_1 e dividere tutto per *d* ottenendo:

$$G m_2 = \omega^2 d^3$$

E ricordando che

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

si ha:

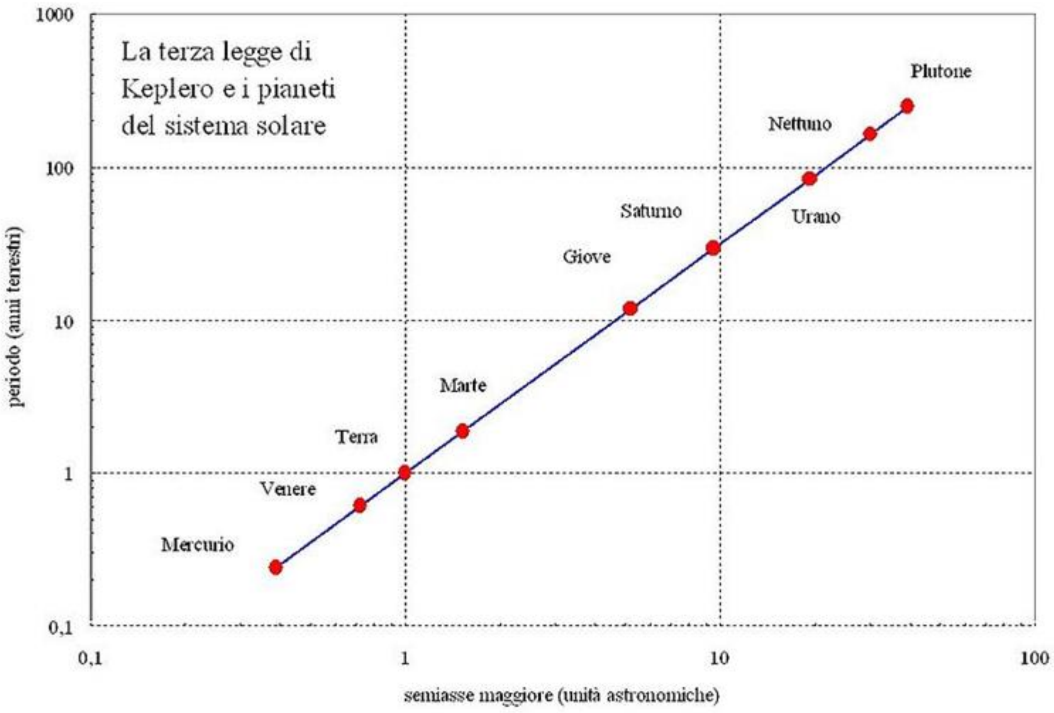
$$\frac{d^3}{T^2} = \frac{G m_2}{(2\pi)^2}$$

e cioè $K = \frac{T^2}{d^3}$

cvd

Le leggi di Keplero

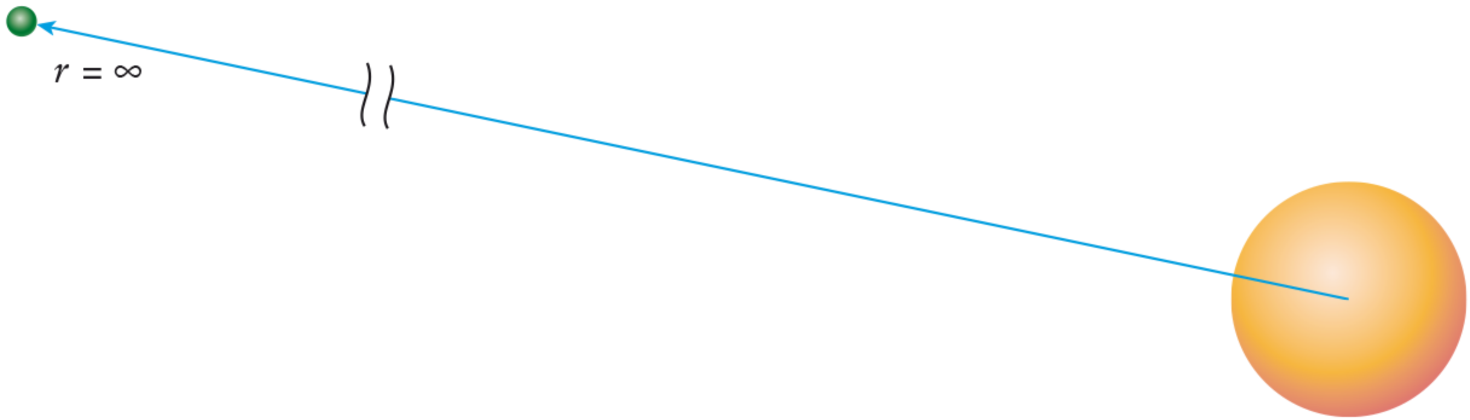
Va notato che l'eccentricità dell'orbita ellittica dei pianeti è in realtà molto modesta: il rapporto fra l'asse maggiore a e quello minore b ha il suo massimo nel caso di Plutone, per cui si ha $\frac{a}{b} \cong 1{,}03$; nel caso della Terra $\frac{a}{b} \cong 1{,}0002$. La descrizione di orbite circolari fornisce dunque una descrizione assai prossima alla realtà



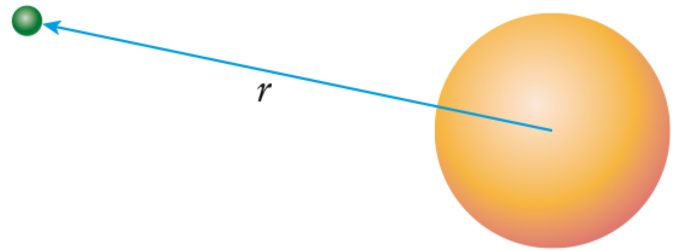
Le leggi di Keplero

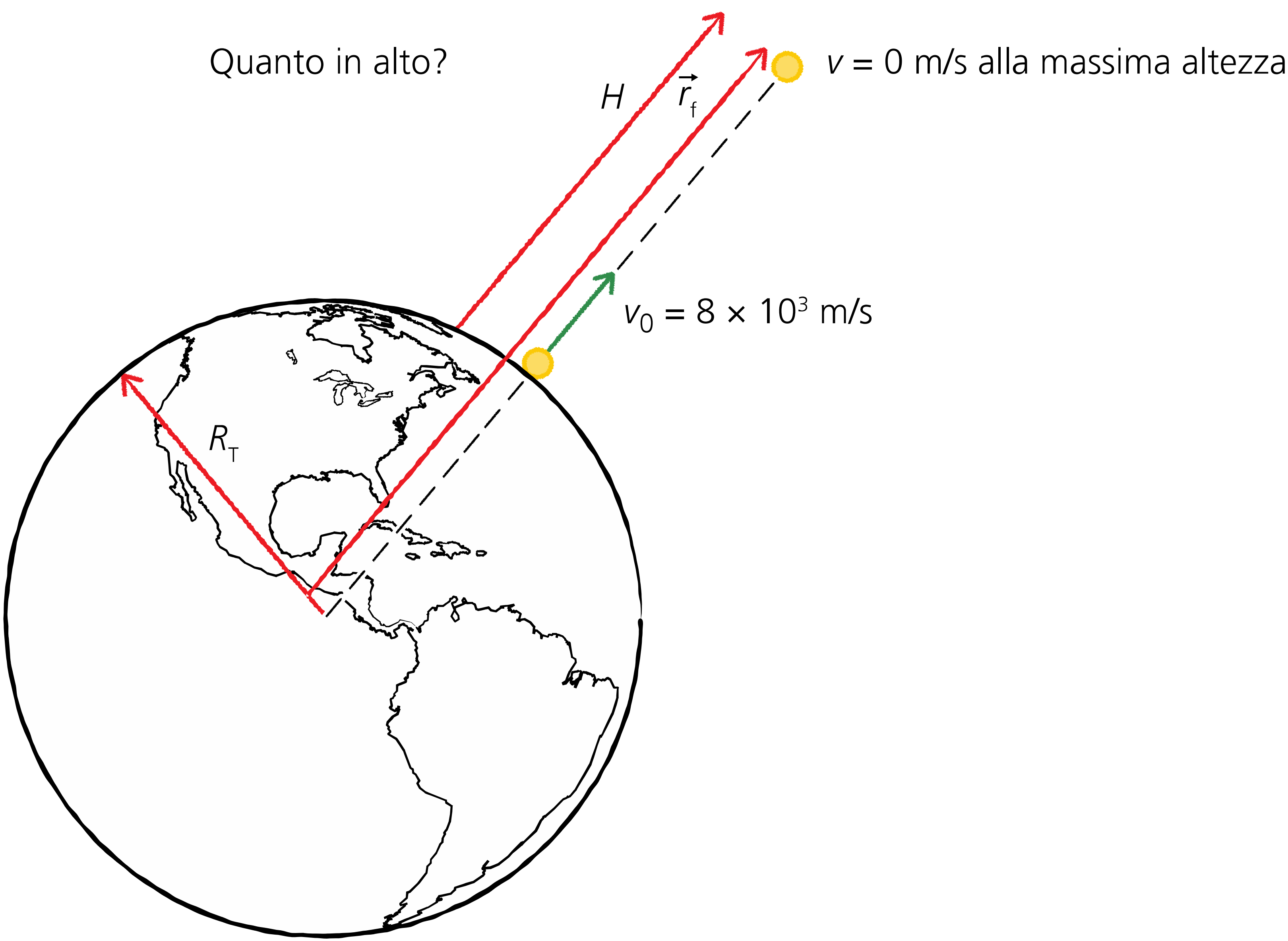
Va specificato che le leggi di Keplero sono precise nella misura in cui sono soddisfatte le seguenti ipotesi:
la massa del pianeta è trascurabile rispetto a quella del sole;
si possono trascurare le interazioni tra diversi pianeti (tali interazioni portano a leggere perturbazioni sulla forma delle orbite).

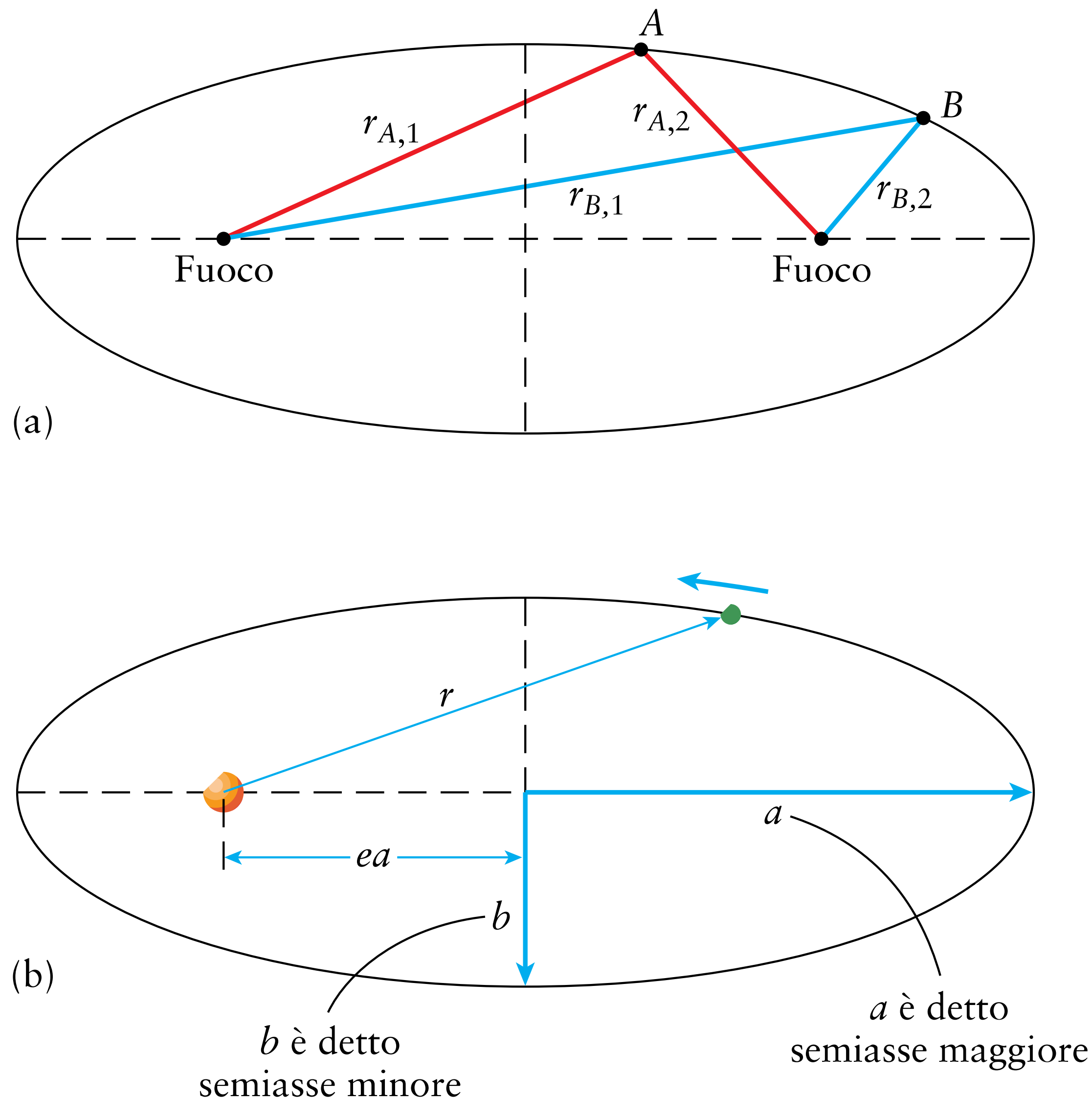
L'energia potenziale gravitazionale rappresenta il lavoro fatto per portare gli oggetti da una iniziale distanza di separazione infinita…

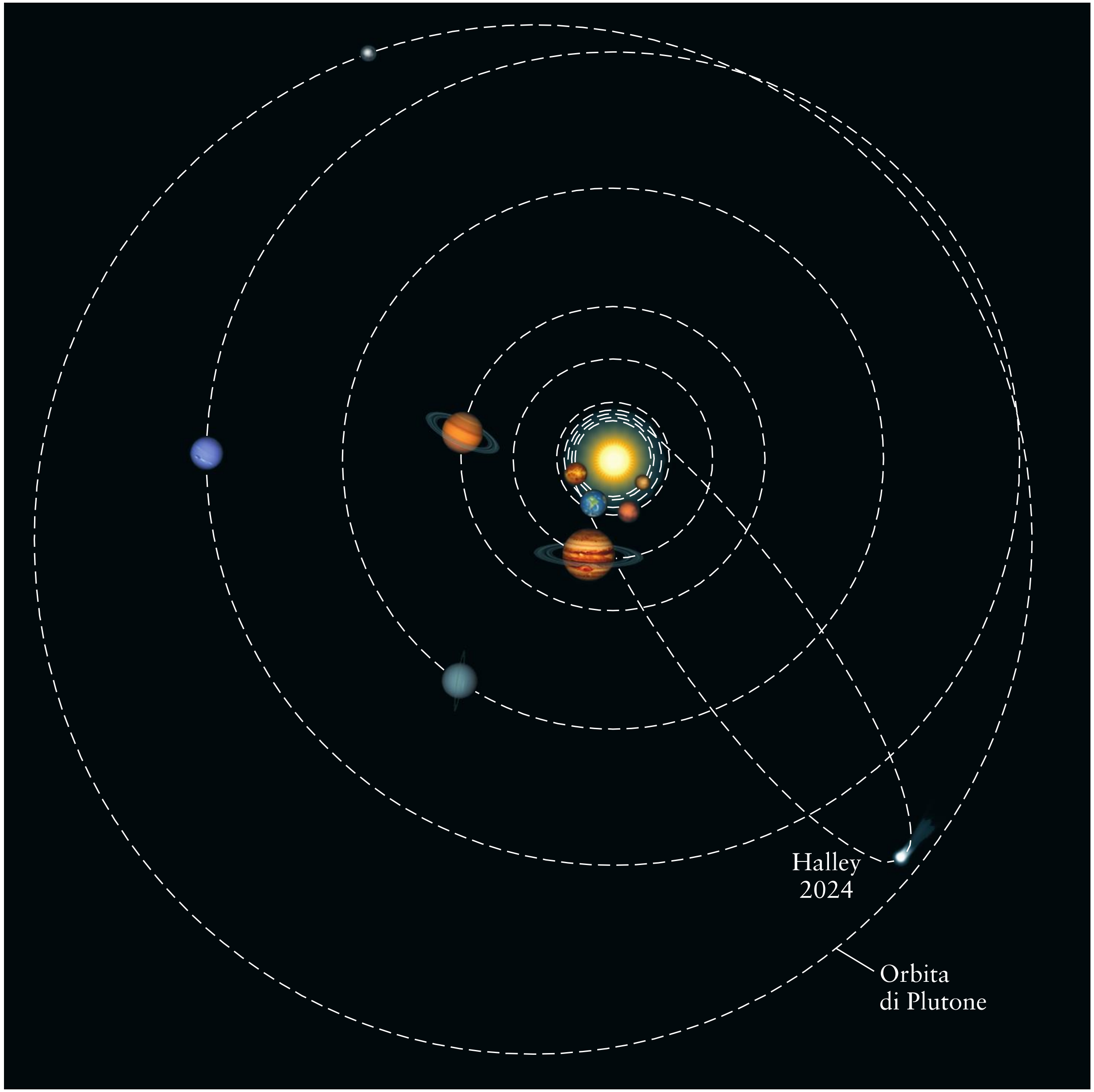


…a una distanza di separazione pari a r.

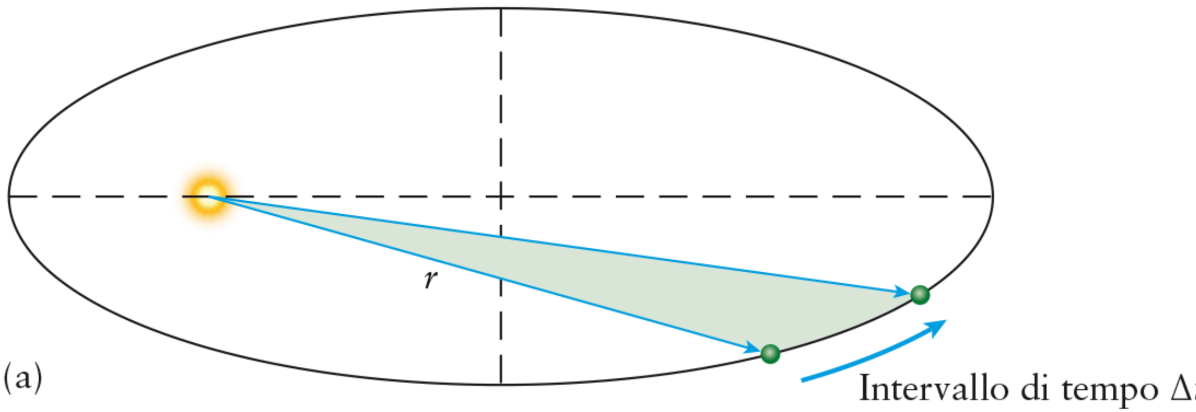



Quanto in alto?
H
$\vec{r}_f$
v = 0 m/s alla massima altezza
$v_0 = 8 \times 10^3$ m/s
R_T


A
B
$r_{A,1}$
$r_{A,2}$
$r_{B,1}$
$r_{B,2}$
Fuoco
Fuoco
(a)
r
a
ea
b
(b)
b è detto
semiasse minore
a è detto
semiasse maggiore


Halley
2024
Orbita
di Plutone

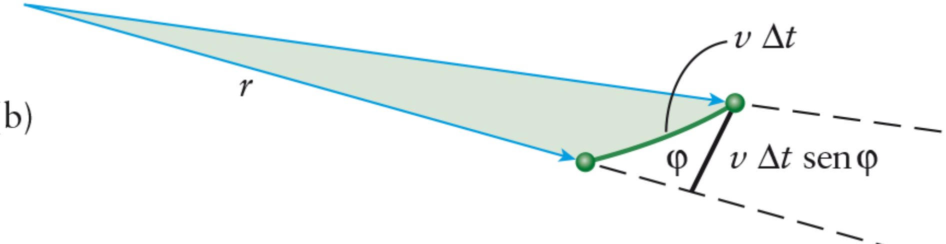
Un pianeta in orbita attorno al Sole è mostrato in due posizioni, separate da un intervallo di tempo infinitesimo Δt.



(a)

Una retta che congiunge il Sole col pianeta spazza l'area evidenziata in questo intervallo di tempo.

Quando Δt è infinitesimo, si può trattare il piccolo tratto lungo il percorso ellittico come se fosse un tratto rettilineo.



(b)