Prof. Roberto Capone

Dinamica dei fluidi

Corso di Complementi di Fisica 2014/2015

Corso di laurea in Ingegneria edile

La corrente di un fluido

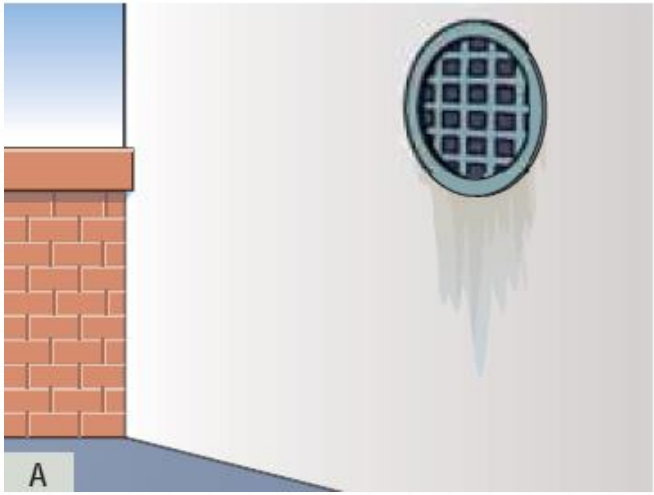
- La corrente di un fluido è il movimento ordinato di un liquido o di un gas.
- La portata q è il rapporto tra il volume di fluido ΔV che attraversa una sezione in un tempo Δt ed il tempo Δt stesso:

$$\underbrace{q}_{\text{portata (m}^3\text{/s)}} = \frac{\overbrace{\Delta V}^{\text{volume (m}^3)}}{\underbrace{\Delta t}_{\text{intervallo di tempo (s)}}}$$

La corrente di un fluido

La sezione trasversale di un fluido attraverso cui si misura la portata è una superficie immaginaria immersa nel fluido.

▶ Possiamo visualizzare la sezione trasversale come una grata, messa nella conduttura, attraverso la quale passa il fluido.

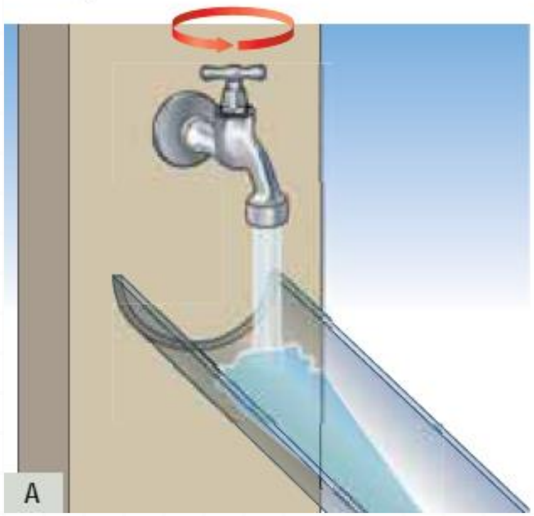


▶ Per calcolare la portata, misuriamo il volume di fluido che attraversa la sezione in un dato intervallo di tempo.

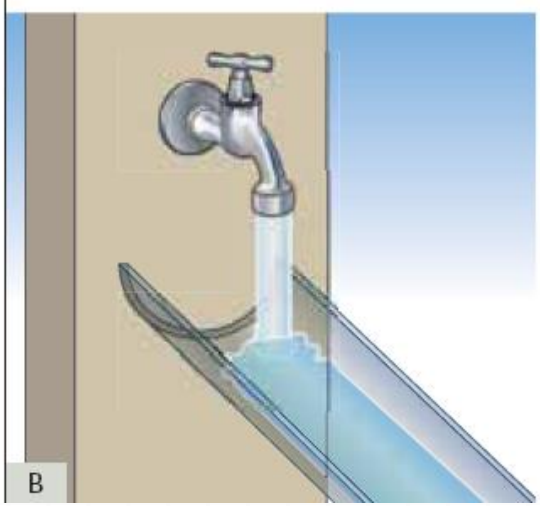
Correnti stazionarie

Si dice stazionaria una corrente la cui portata attraverso *qualsiasi* sezione del conduttore è costante nel tempo.

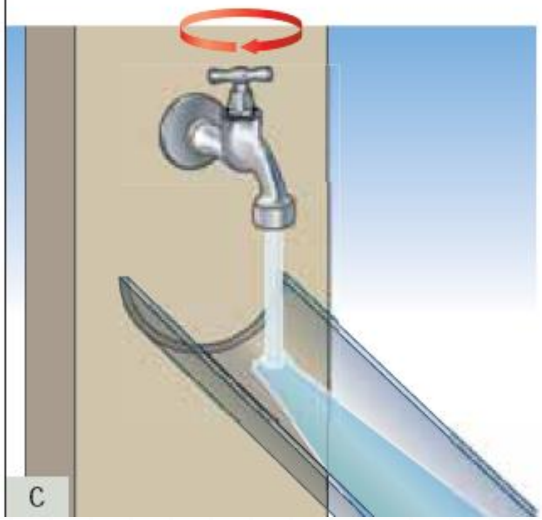
▶ Mentre apriamo un rubinetto la corrente *non* è stazionaria, perché il volume d'acqua emesso ogni secondo aumenta nel tempo.



▶ Dopo un poco, però, vediamo che la corrente si stabilizza e diviene stazionaria, cioè fornisce lo stesso volume d'acqua in ogni secondo.



▶ Mentre chiudiamo il rubinetto la corrente è di nuovo non stazionaria, perché il volume d'acqua emesso ogni secondo diminuisce.



L'equazione di continuità

- La portata q di un fluido che scorre a velocità v in una conduttura di sezione S è data dalla formula:

portata (m^3/s)

area della sezione trasversale (m^2)

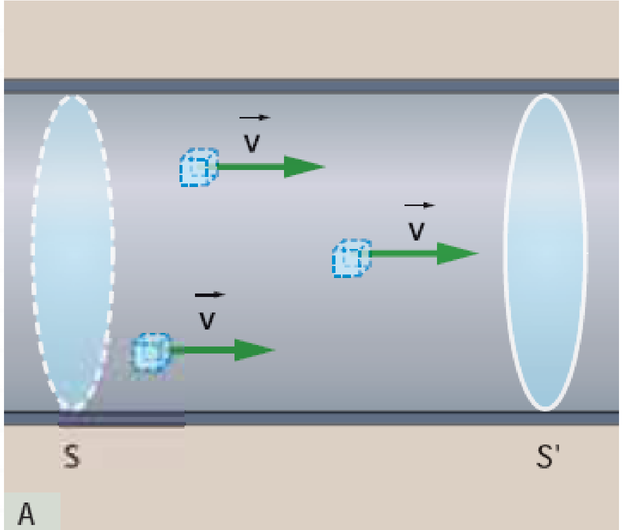
$$\boxed{q = Sv}$$

velocità del fluido (m/s)

- Quindi la portata è direttamente proporzionale sia alla sezione del tubo che alla velocità del fluido.

La portata

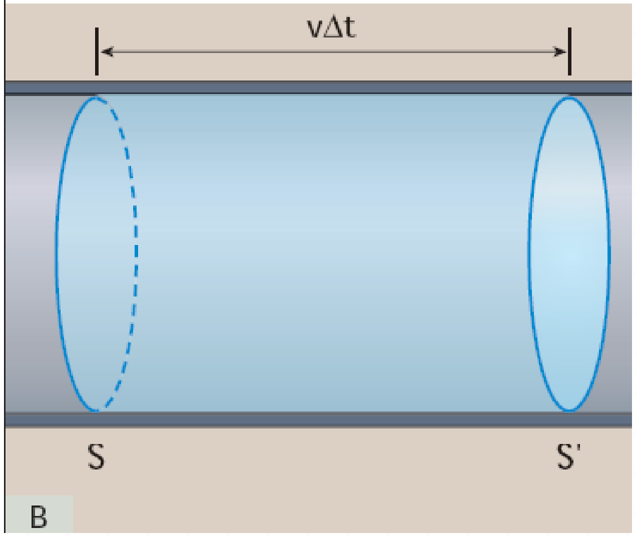
▶ Consideriamo i volumetti di fluido che attraversano la sezione trasversale. In un intervallo di tempo Δt, i volumetti percorrono la distanza $l = v\Delta t$.



▶ Quindi, nel tempo Δt la superficie di area S è attraversata da un volume

$$\Delta V = Sl = Sv\Delta t$$

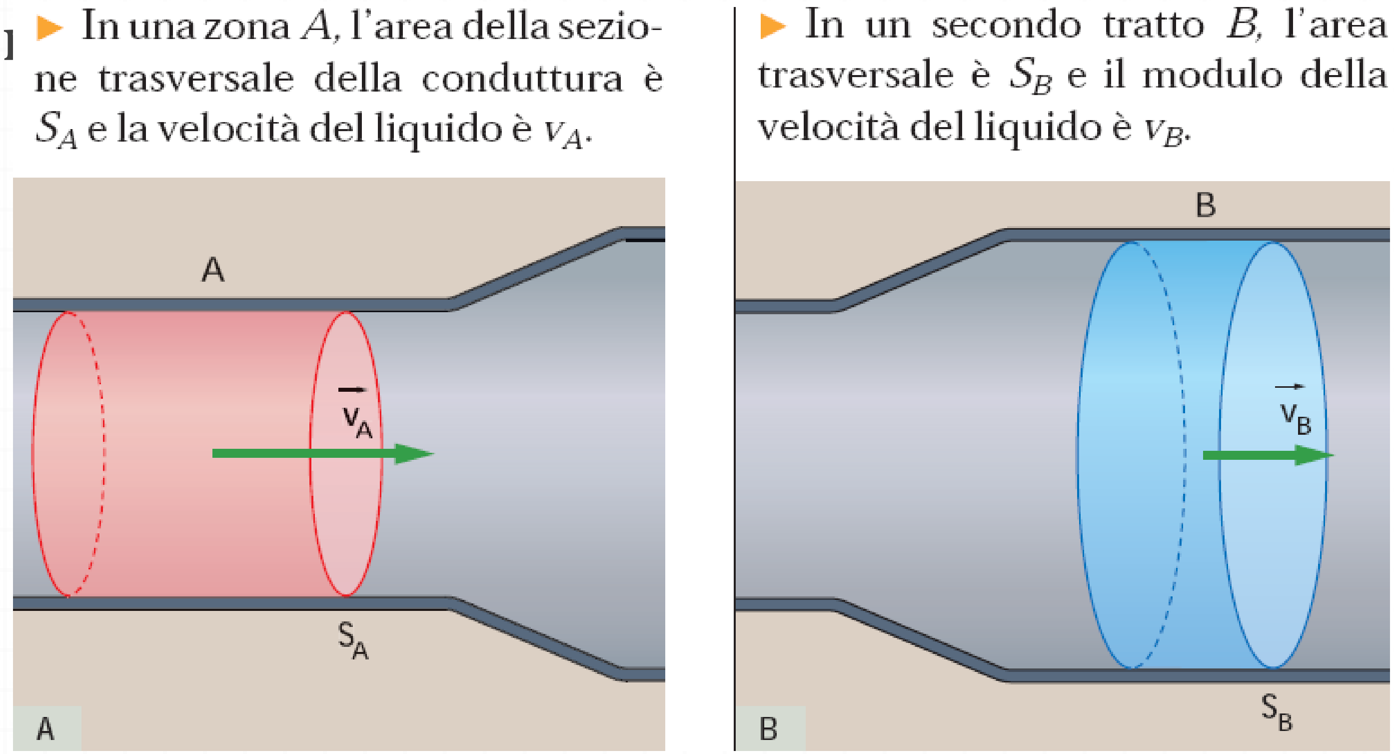
di fluido.



$$\boxed{q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{Sv\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} = Sv.}$$

Moto di un liquido in una conduttura

- Un liquido, a differenza di un gas, si può considerare incompressibile, cioè mantiene inalterato il proprio volume.
- In ui



L'equazione di continuità

- Nel tubo singolo senza sorgenti e pozzi vale l'equazione di continuità:

area in A(m^2)

area in B(m^2)

$$\boxed{S_A \, v_A = S_B \, v_B}$$

velocità in A(m/s)

velocità in B(m/s)

- la portata del liquido in A e in B è costante;
- la sezione trasversale della conduttura e la velocità del liquido sono inversamente proporzionali.

L'equazione di continuità

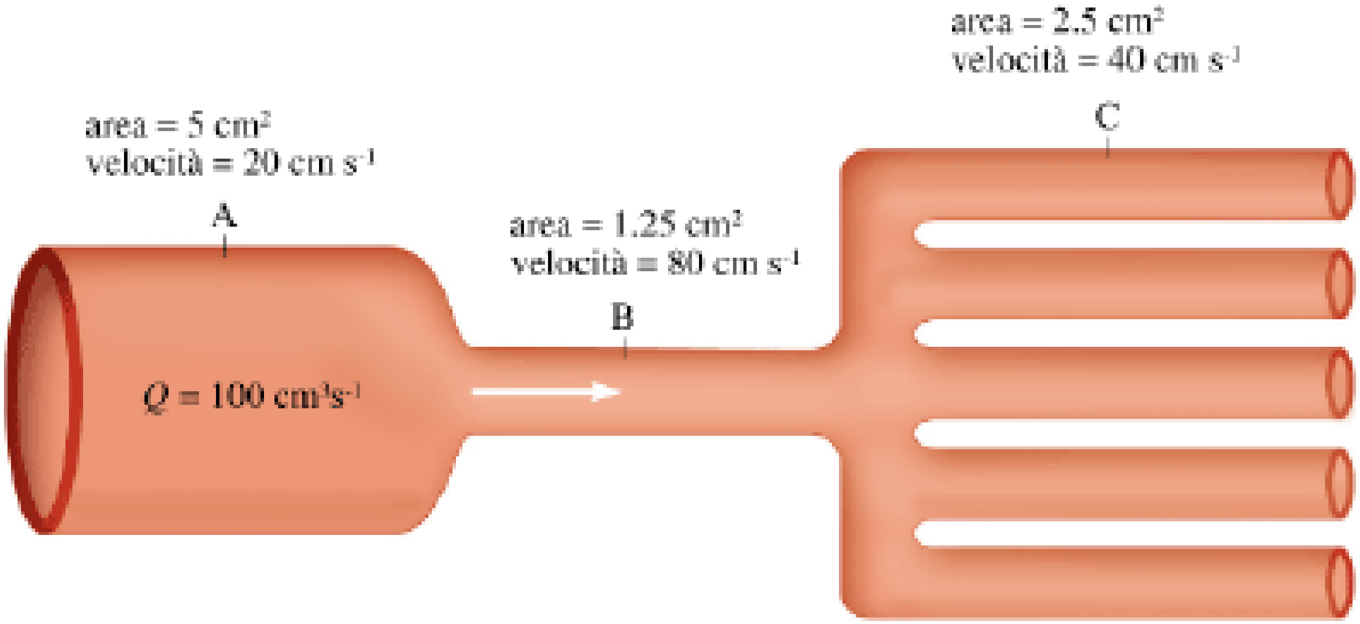
- La proporzionalità inversa tra sezione del tubo e velocità del liquido, $S_A v_A = S_B v_B$, significa che nelle strettoie il liquido fluisce più in fretta: se S si dimezza v raddoppia e viceversa.

Quando si annaffia si blocca parzialmente la sezione del tubo con un dito per far sì che l'acqua, uscendo a *v* maggiore, arrivi più lontano.

Kent Knudson/Index Stock Imagery, Inc.

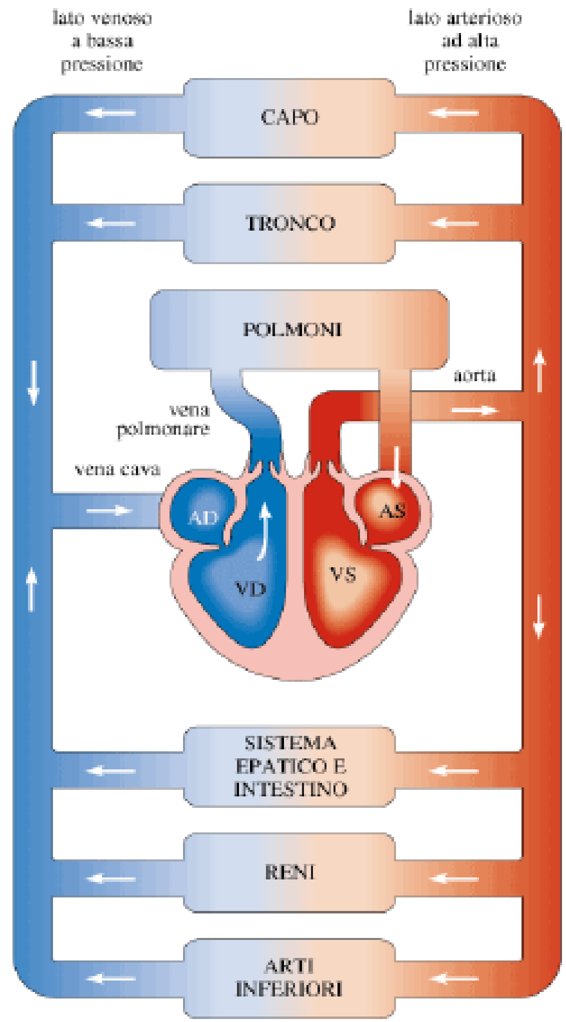
L’equazione di continuità

- Se il condotto si apre in più diramazioni, bisogna considerare la **superficie totale**. In ogni tratto si avrà sempre Q = v S.



L'equazione di continuità

- Negli esseri umani il sangue fluisce dal cuore nell'aorta, dalla quale passa nelle arterie maggiori. Queste si ramificano nelle piccole arterie (arteriole), che a loro volta si ramificano in miriadi di piccoli capillari. Il sangue ritorna al cuore attraverso le vene. Il raggio dell'aorta è circa 1.2 cm e il sangue che vi scorre attraverso ha una velocità di circa 40 cm/sec. Un capillare tipico ha un raggio di circa $4\ 10^{-2}$ cm e il sangue vi scorre attraverso ad una velocità di circa $5\ 10^{-4}$ m/s. Stimare quanti capillari vi sono nel corpo.



L'equazione di continuità

Soluzione:

Supponiamo che la densità del sangue non cambi significativamente dall'aorta ai capillari. Per l'equazione di continuità la portata di volume nell'aorta deve essere uguale alla portata attraverso tutti i capillari. L'area totale dei capillari è data dall'area di un capillare moltiplicata per il numero N dei capillari.

Siano A_1 l'area dell'aorta e A_2l'area di tutti i capillari in cui fluisce il sangue. Allora $A_2 = N\,\pi r_{cap}^2$ dove N è il numero dei capillari e $r_{cap} \sim 4 \cdot 10^{-4} cm$ è il valor medio stimato per il raggio di un capillare. Dall'equazione di continuità abbiamo

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \Rightarrow v_2 N \pi r_{cap}^2 = v_1 \pi r_{aorta}^2$$

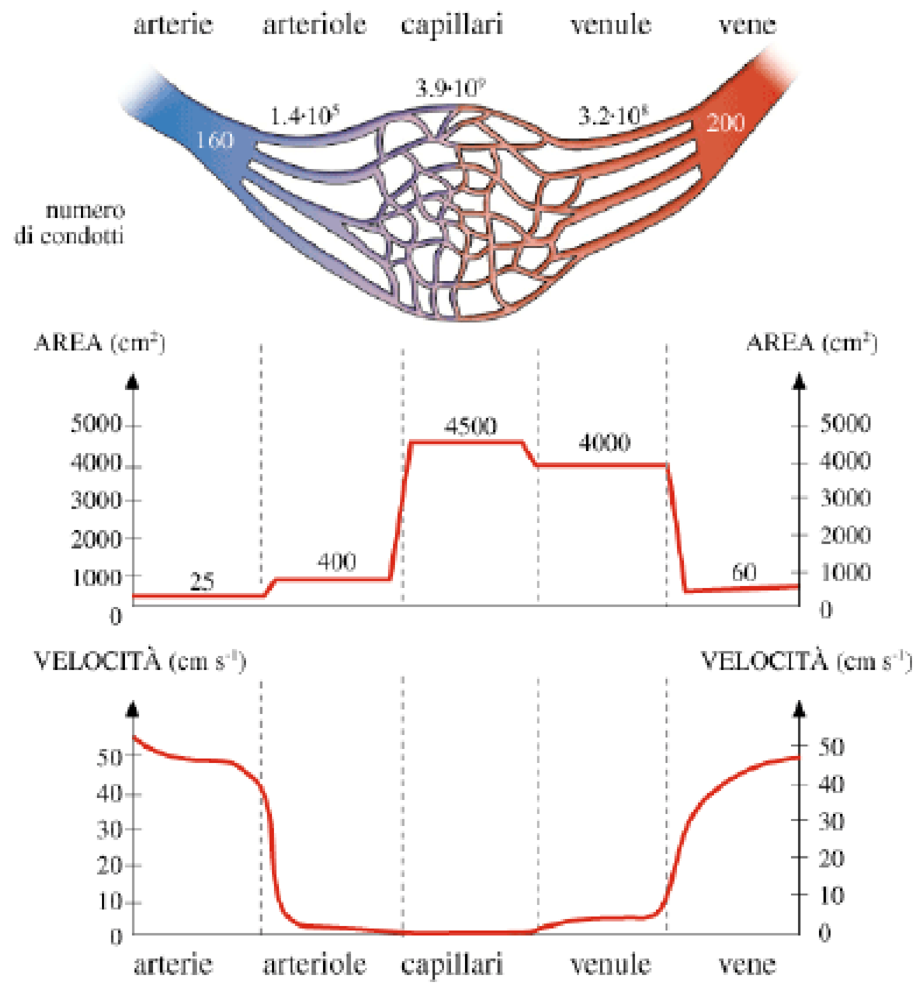
Quindi

$$N = \frac{v_1}{v_2}\frac{r_{aorta}^2}{r_{cap}^2} = \left(\frac{0.40\; m/s}{5 \cdot 10^{-4}\; m/s}\right)\left(\frac{1.2 \cdot 10^{-2}\; m}{4 \cdot 10^{-6}\; m}\right)^2 \sim 7 \cdot 10^9$$

Dell'ordine di 10 miliardi di capillari.

L’equazione di continuità

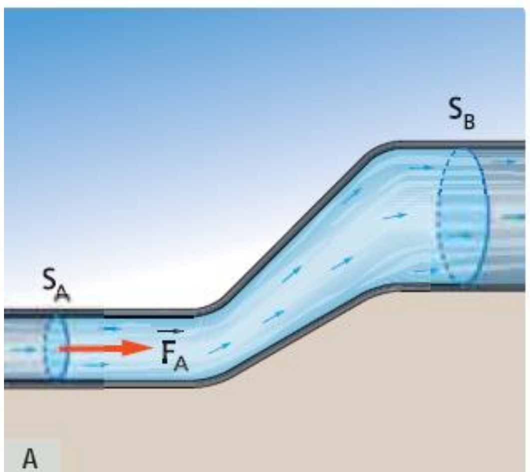
- Rappresentazione schematica della variazione di sezione totale e di velocità media del sangue nei vari distretti del sistema circolatorio.
- La velocità nei capillari è molto bassa dell’ordine del millimetro al secondo.
- La bassa velocità è essenziale per i processi biochimici di scambio di sostanze necessari alla vita.



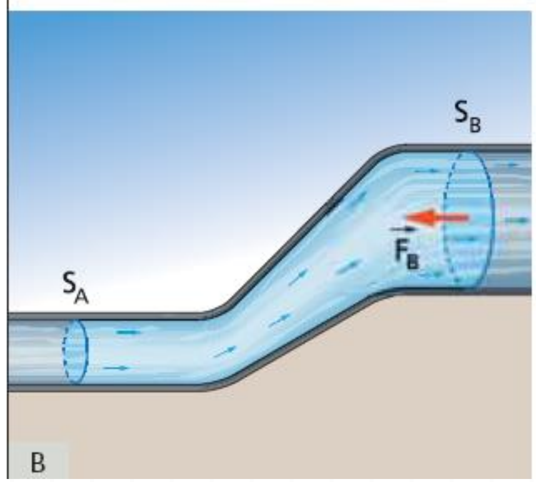
L’equazione di Bernoulli

- Un fluido che scorre in un tubo a diametro variabile e piegato in direzione verticale è soggetto a diverse forze:

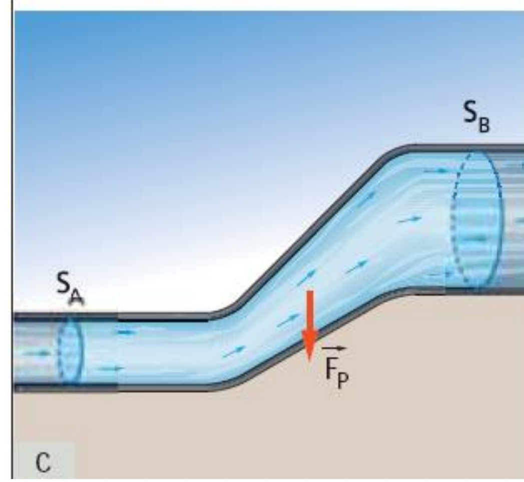
▶ la spinta da parte del fluido che sta «a monte»;



▶ la forza resistente da parte del fluido che sta «a valle»;



▶ la forza-peso che agisce sul fluido stesso;

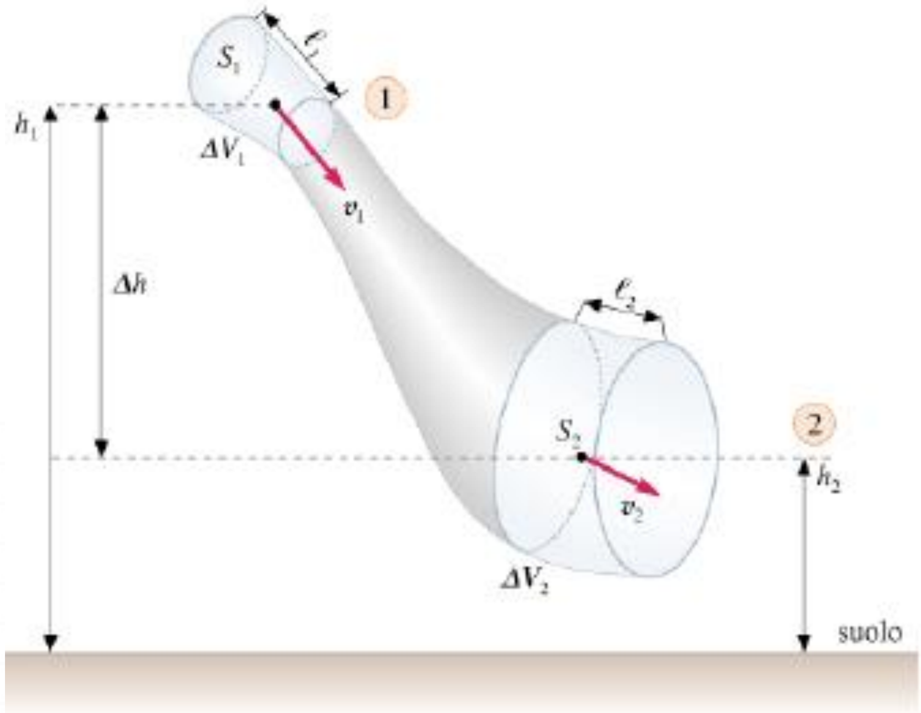


oltre alla forza d'attrito.

L’equazione di Bernoulli

- Per il fluido varia: la quota y, la velocità v e la pressione p a cui è sottoposto.
- Nelle ipotesi di: fluido incompressibile, corrente stazionaria e attrito inesistente, vale l'equazione di Bernoulli:

$$\underbrace{p}_{\text{pressione (Pa)}} + \frac{1}{2}\underbrace{d}_{\text{densità (kg/m}^3\text{)}}\overbrace{v}^{\text{velocità (m/s)}}{}^2 + dg\underbrace{y}_{\text{quota (m)}} = \text{costante}$$



L'equazione di Bernoulli

- L'equazione di Bernoulli è una conseguenza diretta del principio di conservazione dell'energia

$$E_{cinetica} + E_{potenziale} + E_{pressione} = \text{costante}$$

$$E_{totale} = \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 + p_1 \Delta V = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2 + p_2 \Delta V$$

- Dividendo tutto per ΔV e ricordando la definizione di densità possiamo scrivere

$$\boxed{\frac{E_{totale}}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 = \text{costante}}$$

Esercizio

In una casa l'acqua calda circola in un impianto di riscaldamento. Se l'acqua viene pompata ad una velocità di 0.5 m/sec attraverso un tubo del diametro di 4.0 cm nello scantinato ad una pressione di 3 atm, quali saranno la velocità di flusso e la pressione in un tubo di 2.6 cm al secondo piano situato 5 m sopra?

Soluzione:

Usiamo l'equazione di continuità a densità costante per determinare la velocità del flusso al secondo piano e, successivamente, l'equazione di Bernoulli per determinare la pressione.

Prima calcoliamo la velocità di flusso al secondo piano, che indicheremo con v_2, essendo nota la velocità di flusso nel seminterrato (v_1), utilizzando l'equazione di continuità. Ricordando che le aree sono proporzionali al quadrato del raggio ($A = \pi r^2$) otteniamo

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} = \frac{v_1 \pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{(0.50m/s)(0.020m)^2}{(0.012m)^2} = 1.2\ m/s$$

Per trovare la pressione al secondo piano usiamo l'equazione di Bernoulli

$$P_2 = P_1 + \rho g(y_1 - y_2) + \frac{1}{2}\ \rho(v_1^2 - v_2^2)$$

$$= (3.0\ 10^5\ Nm^{-2}) + (1.0\ 10^3\ kgm^{-3})(9.8\ ms^{-2})(-5.0m)$$
$$+\frac{1}{2}(1.0\ 10^3\ kgm^{-3})[(0.5\ ms^{-1})^2 - (1.2\ ms^{-1})^2] = 2.5\ 10^5 Nm^{-2} = 2.5\ atm$$

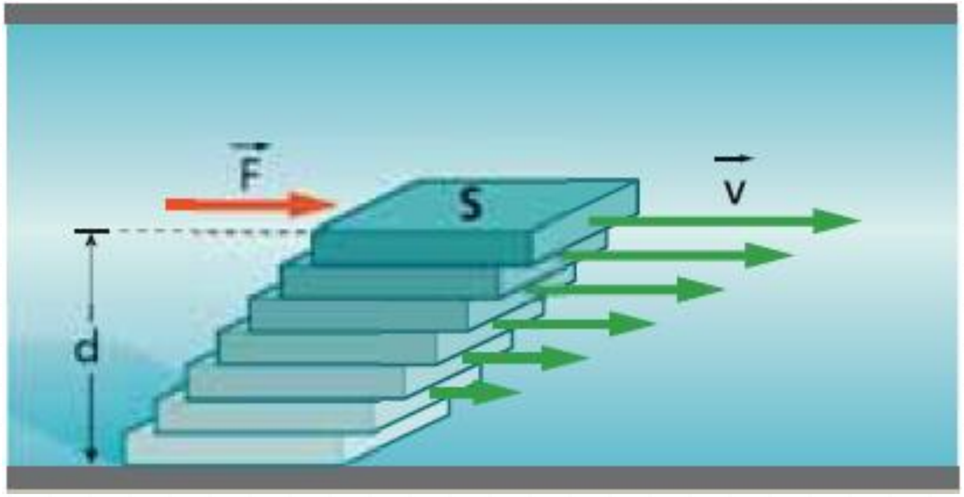
Il termine dovuto alla velocità in questo caso contribuisce molto poco.

L’attrito nei fluidi

L'attrito viscoso si oppone al moto degli oggetti nei fluidi.

1) Attrito con le pareti della conduttura.

- In condizione *laminare* (senza vortici) le lamine di fluido a contatto con la parte risentono dell'attrito e lo trasmettono in parte al resto del fluido.

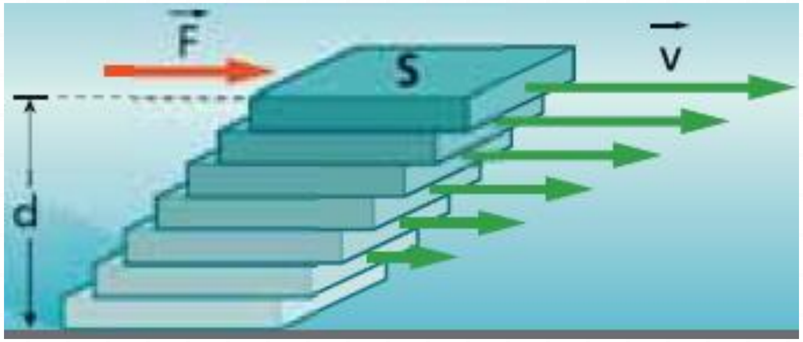


L'attrito nei fluidi

Si verifica sperimentalmente che vale la legge:

$$F = \eta \frac{Sv}{d}$$

- *F*: forza necessaria per mantenere in moto il fluido a velocità *v*;
- *S*: area dello strato di fluido;
- *d*: distanza dalla parete;
- η: *coefficiente di viscosità* (dipende dal fluido).



L'attrito nei fluidi

$$F = \eta \frac{Sv}{d}$$

Unità di misura (nel sistema MKS):

$N\,s/m^2 =$ Pa s

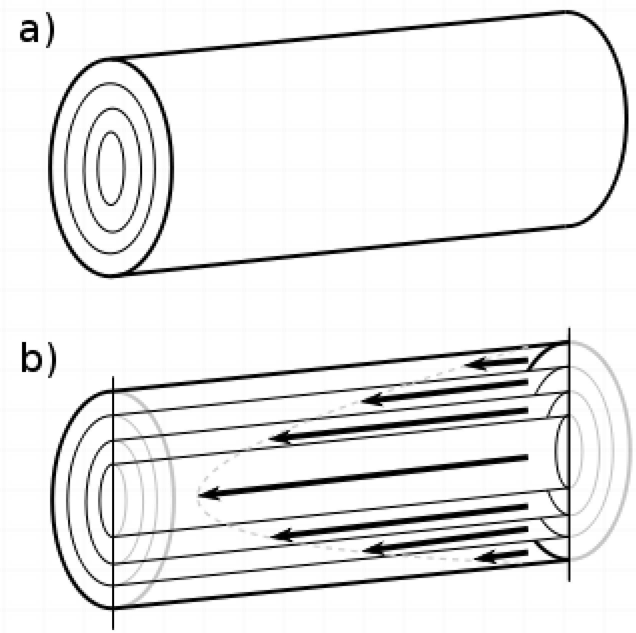
Coefficienti di viscosità per diversi fluidi:

COEFFICIENTI DI VISCOSITÀ	
Sostanza	**Coefficienti di viscosità a 20 °C (Pa·s)**
ammoniaca	$9{,}2 \times 10^{-6}$
metano	$10{,}2 \times 10^{-6}$
aria	$17{,}1 \times 10^{-6}$
acqua	$1{,}00 \times 10^{-3}$
mercurio	$1{,}55 \times 10^{-3}$
sangue (a 37 °C)	$4{,}0 \times 10^{-3}$
olio d'oliva	$8{,}4 \times 10^{-2}$
glicerina	1,50

Legge di Poiseuille

- L'equazione di Poiseuille mette in relazione la differenza di pressione, condizione essenziale per il moto di un fluido, con le caratteristiche geometriche del condotto, la viscosità del liquido e la portata che risulta direttamente proporzionale alla differenza di pressione:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\left(P_1 - P_2\right)$$



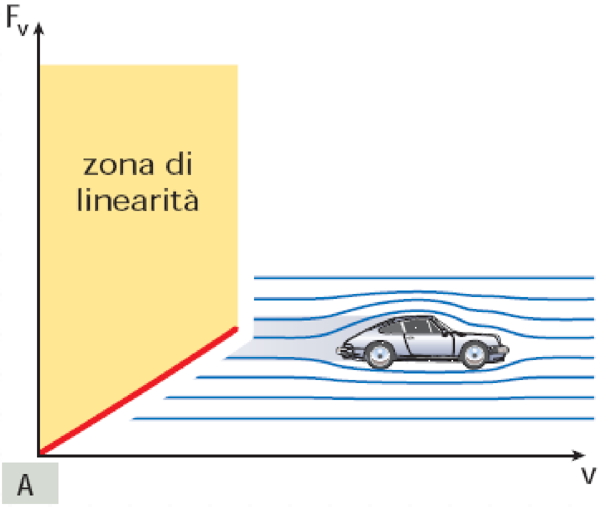
- La velocità è maggiore al centro del condotto e decresce a mano a mano che ci si avvicina alle pareti secondo un profilo parabolico.
- Il moto avviene in regime laminare.

L'attrito su un corpo in moto nel fluido

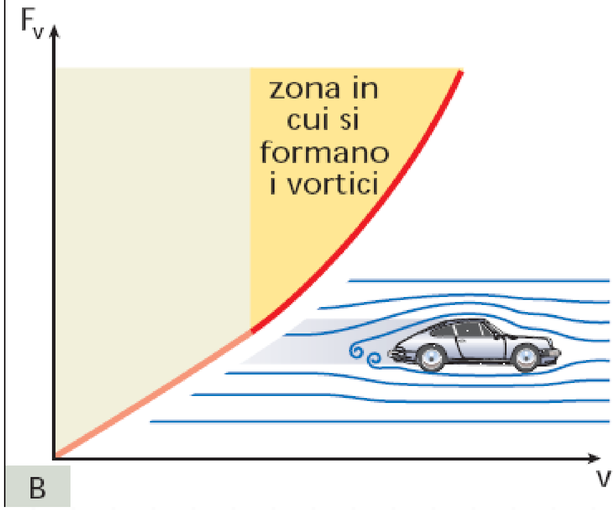
2) <u>Attrito su un corpo in moto nel fluido</u>.

Un'automobile accelera partendo da ferma.

▶ finché la sua velocità è abbastanza bassa, il flusso dell'aria attorno alla carrozzeria è laminare e la forza di attrito viscoso tra l'automobile e l'aria cresce un modo *direttamente proporzionale* alla sua velocità.



▶ Però, non appena cominciano a formarsi vortici nell'aria il flusso non è più laminare e l'attrito viscoso inizia ad aumentare in modo direttamente proporzionale al *quadrato* della sua velocità.



L'attrito su un corpo in moto nel fluido

- Nel caso più semplice di una sfera di raggio r che si muove in un fluido di viscosità η a velocità v la forza F_V di attrito viscoso è data dalla legge di Stokes:

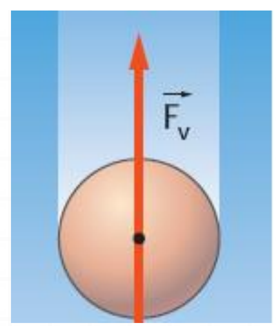
raggio (m)

attrito viscoso (N)

$$F_v = 6\pi\eta r v$$

coefficiente di viscosità (Pa · s)

velocità (m/s)



L'attrito su un corpo in moto nel fluido

Un paracadutista è soggetto alla:

- forza-peso F_P diretta verso il basso;
- forza d'attrito viscoso F_V diretta verso l'alto e che aumenta al crescere della velocità di caduta *v*.

A un certo istante

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_P + \vec{F}_v = 0.$$

L’attrito su un corpo in moto nel fluido

- Quando $F_{tot} = 0$ il paracadutista scende a *v=costante* (I principio dinamica) fino alla fine: è chiamata *velocità limite*.

- Per una massa di 100 kg attaccata ad un paracadute di diametro di 10 m, la velocità limite è circa 3 m/s.

L’attrito su un corpo in moto nel fluido

Si ha $F_{tot} = 0$ quando $F_P = F_V$.

Uguagliando la formula di Stokes alla forza-peso otteniamo:

$$6\pi\eta r v = mg,$$

che dà una velocità limite

$$\boxed{v = \frac{mg}{6\pi\eta r}}$$