ESERCIZIO SVOLTO N°1

Determinare e rappresentare graficamente il dominio della funzione

$$\boldsymbol{f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}}$$

Trovare gli eventuali punti stazionari e gli estremi di f

Il dominio della funzione è dato da

$$dom\, f = \{(x,y) \in R^2 : y^2 - x^2 \geq 0\}$$

La disequazione $y^2 - x^2 \geq 0$ equivale a $(y-x)(y+x) \geq 0$ e quest'ultima è verificata se i fattori $(y-x)$ e $(y+x)$ hanno lo stesso segno. Dunque:

$$dom\, f = \{(x,y) \in R^2 : y \geq x \ e \ y \geq -x\} \cup \{(x,y) \in R^2 : y \leq x \ e \ y \leq -x\}$$

Derivando parzialmente si ottiene:

$$f_x = -\frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

$$f_y = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}}$$

Si può osservare che i punti delle bisettrici $y = x$ e $y = -x$ non appartengono al dominio delle derivate parziali prime. Pertanto non vi sono punti stazionari.

D'altra parte si vede che $f(x,x) = f(x,-x) = 0$ e $f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in dom\, f$.

In definitiva, tutti i punti appartenenti alle bisettrici y=x e y=-x ovvero i punti di coordinate (x,y) e $(x,-y)$ sono punti di minimo assoluto per f

ESERCIZIO SVOLTO N°2

Determinare il dominio e gli eventuali punti stazionari della funzione

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^2 log(1+y) + x^2y^2}$$

Studiare la natura degli eventuali punti stazionari trovati

Si noti innanzitutto che la funzione è definita nell'insieme

$$dom\, f = \{(x,y) \in R^2 : 1 + y > 0\}$$

che rappresenta il semipiano aperto delimitato dalla retta y=-1.

Calcoliamo ora il gradiente della funzione

$$\nabla f(x,y) = \left(f_x(x,y), f_y(x,y)\right) = \left(2xlog(1+y) + 2xy^2, \frac{x^2}{1+y} + 2x^2y\right)$$

I punti stazionari sono i punti tali che $\nabla f(x,y) = 0$. Imponendo tale condizione, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2xlog(1+y) + 2xy^2 = 0 \\ \dfrac{x^2}{1+y} + 2x^2y = 0 \end{cases}$$

Sono tutti i punti (0,y) con y arbitrario >-1

$$f_{xx} = 2(\log(1+y) + y^2)$$

$$f_{xy} = 2x\left(\frac{1}{1+y} + 2y\right) = f_{yx}$$

$$f_{yy} = x^2\left(2 - \frac{1}{(1+y)^2}\right)$$

L'esame della matrice hessiana calcolata nei punti stazionari

$$Hf(0,y) = \begin{pmatrix} 2(\log(1+y) + y^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non fornisce alcuna informazione sulla loro natura.

ESERCIZIO SVOLTO N°3

Si studino i punti stazionari della seguente funzione

$$\boldsymbol{f(x,y) = log(x^2 + y^2 - 1)}$$

Non vi sono punti stazionari in quanto

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2-1}, \frac{2y}{x^2+y^2-1}\right)$$

si annulla soltanto in (0,0) che però non appartiene al dominio di f che è costituito dai punti esterni alla circonferenza di centro l'origine e raggio 1

ESERCIZIO SVOLTO N°4

Si studino i punti stazionari della seguente funzione

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^4 + y^4}$$

La funzione ammette l'origine (0,0) come punto critico in cui si annulla il gradiente. Si verifica facilmente che la matrice hessiana è nulla in (0,0). Tale punto è di minimo assoluto e relativo perché $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$

ESERCIZIO SVOLTO N°5

Si studino i punti stazionari della seguente funzione

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^4 - y^4}$$

L'unico punto critico (0,0) presenta hessiano nullo. Esso non è né di massimo né di minimo dato che risulta

$$f(x,0) = x^4 > 0 = g(0,0)$$

$$f(0,y) = -y^4 < 0 = g(0,0)$$

ESERCIZIO SVOLTO N°6

Si studino i punti stazionari della seguente funzione

$$\boldsymbol{f(x,y) = 2y^2}$$

Per i punti critici, come al solito, imponiamo che il gradiente della funzione sia uguale a zero, quindi

$$\nabla f(x,y) = (0, 4y)$$

La fx vale sempre zero perché la f non dipende da x. Dalla seconda equazione ricaviamo y = 0, da cui i punti critici della funzione sono tutti i punti di coordinate (x; 0), cioè tutti i punti dell'asse delle x.
Andiamo a calcolare l'Hessiano in questi punti. Poichè $f_{xx} = 0$; $f_{xy} = 0$, e $fyy = 4$, segue che $Hf\ (x;\ 0) = 0$. Quindi il teorema sul test delle derivate seconde non ci può dire nulla.
In tal caso, dobbiamo vedere come è fatta la funzione e cercare di capire cosa succede in un intorno di questi punti critici.
Fissato $x = x_0$, per il punto $(x_0;\ 0)$, in un suo qualunque intorno vale $f(x;\ y) = 2y^2 = f(x0;\ 0)$ (posso prendere anche un punto che ha $y = 0$ ma $x \neq x_0$). Si conclude quindi che $(x_0;\ 0)$ è un punto di minimo relativo. Questo vale per tutti i punti $(x;\ 0)$, che sono, dunque, tutti punti di minimo relativo.

ESERCIZIO SVOLTO N°7

Si studino i punti stazionari della seguente funzione

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2}$$

Si ricercano in primo luogo i punti stazionari della funzione, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ f_y = 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 4(x^3 + y^3) = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 4x(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \ e \ \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \mp\sqrt{2} \end{cases}$$

Quindi i punti stazionari sono

$$A = (0,0), B\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big), C(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

La matrice hessiana è

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Si ha che

$$H(B) = H(C) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

Poiché

$$detH(B) = detH(C) > 0$$

E

$$f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20 > 0$$

allora i punti B e C risultano essere di minimo relativo.

Inoltre, dal momento che

$$H(A) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

ha $detA = 0$. Allora si può provare a studiare la f lungo rette. Si prova che A non è né di massimo né di minimo. Infatti, per la retta $y = x$ (ossia, per la restrizione di f all'insieme dei punti del tipo $y = x$) il punto è di minimo relativo, come segue dalle seguenti considerazioni:

Se $y = x$, allora $f(x, x) = h(x) = 2x^4$ per cui ovviamente x=0 è un punto di minimo relativo.

Se $y = -x$, allora $f(x, -x) = g(x) = 2x^4 - 8x^2$

Dato che $g'(x) = 8x^3 - 16x$ e $g''(x) = 24x^2 - 16$, allora $g''(0) = -16 < 0$ e quindi $x = 0$ è un punto di massimo relativo.

ESERCIZIO SVOLTO N°8

Determinare i punti di massimo e minimo della seguente funzione

$$\boldsymbol{f(x, y) = 2(x^2 + y^2 + 1) - (x^4 + y^4)}$$

I punti stazionari sono:

$$\begin{cases} f_x = 4x - 4x^3 = 0 \\ f_y = 4y - 4y^3 = 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x(1 - x^2) = 0 \\ y(1 - y^2) = 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \ o \ x = \pm 1 \\ y = 0 \ o \ y = \pm 1 \end{cases}$$

Si hanno nove punti critici. In particolare il punto (0,0) presenta Hessiano nullo.

Essendo $g'(x) = 4x^3 - 6x$ e $g''(x) = 12x^2 - 6$, il punto di ascissa x=0 è un punto di massimo relativo. Analogo risultato si ha sulla retta y=0. Mentre se consideriamo la curva x=0, la funzione diventa

$$f(0,y) = h(y) = y^4$$

che presenta nel punto y=0 un minimo relativo, di fatto, assoluto. Di conseguenza il punto A(0,0) non è né di massimo né di minimo per f.

ESERCIZIO SVOLTO N°9

Determinare i massimi e i minimi della funzione di due variabili

$$z = x^4 + (y-1)^2$$

Calcoliamo le derivate parziali rispetto ad x e rispetto ad y:

$$f_x(x,y) = 4x^3$$

$$f_y(x,y) = 2(y-1)$$

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 2(y-1) = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema:

$$x = 0, y = 1$$

Il punto (0,1) si candida ad essere un punto di minimo o un punto di massimo, per capire la sua natura impostiamo l'Hessiana:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{x,x}(x,y) & f_{x,y}(x,y) \\ f_{y,x}(x,y) & f_{y,y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Calcoliamo le derivate parziali del secondo ordine che ci servono:

$$f_{x,x}(x,y) = 12x^2$$

$$f_{x,y}(x,y) = 0 = f_{y,x}(x,y)$$

$$f_{y,y}(x,y) = 2$$

La matrice hessiana è:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice Hessiana è nullo nel punto (0,1) quindi il metodo fallisce miseramente. Dobbiamo precedere in altro modo ed in particolare con il metodo del segno

Consideriamo la differenza:

$$f(x,y) - f(0,1) \geq 0$$

Nota che:

$$f(0,1) = 0$$

quindi la precedente disequazione diventa:

$$x^4 + (y-1)^2 \geq 0$$

Questa disequazione è soddisfatta per qualsiasi valore di x e di y, di conseguenza:

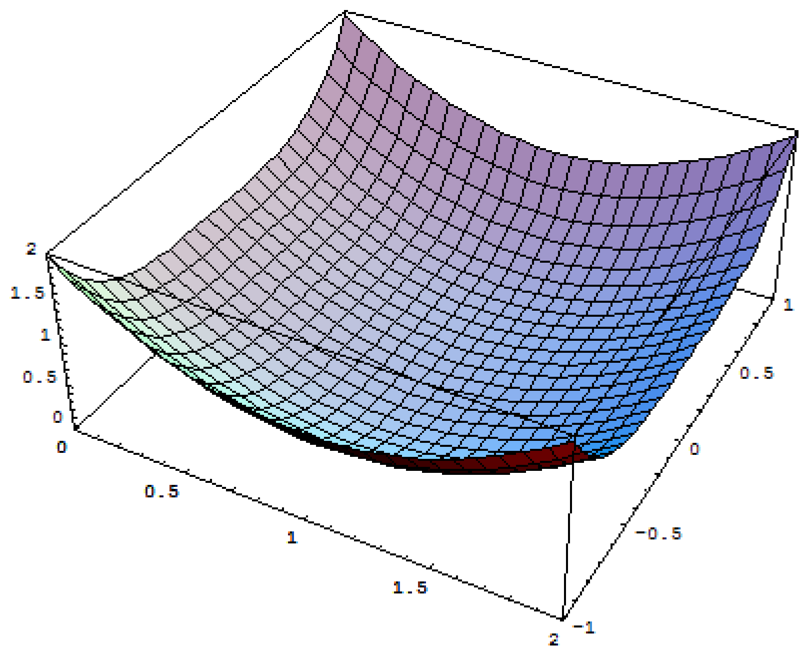
$$f(x,y) - f(0,1) \geq 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Quindi:

$$f(x,y) \geq f(0,1) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Per definizione di minimo assoluto scopriamo che (0,1) è un punto di minimo assoluto per la funzione.

Il grafico della funzione è:



Da cui si evince che il punto (0, 1) è di minimo assoluto.

ESERCIZIO SVOLTO N°10

Determinare i massimi e i minimi della funzione di due variabili

$$f(x, y) = \arcsin^2(xy)$$

nel suo insieme di definizione.

L'insieme di definizione è

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\right\}$$

Le derivate parziali sono

$$f_x(x, y) = \frac{2y \arcsin(xy)}{\sqrt{1 - x^2y^2}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{2x \arcsin(xy)}{\sqrt{1 - x^2y^2}}$$

La radice è definita e non nulla se risulta:

$$1 - x^2y^2 > 0$$

cioè

$$|xy| < 1$$

Dal momento in cui l'arcoseno si annulla se e solo se è nullo il suo argomento il mio sistema diventa

$$|xy| < 1, xy = 0$$

le cui soluzioni sono

$$S = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$$

L'insieme di definizione è dettato dalla disequazione:

$|xy| \leq 1$

Il dominio è dunque:

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1\}$$

Rappresenta questa insieme, è la parte di piano compresa tra le iperboli di equazione

$y = \frac{1}{x}$ e $y = -\frac{1}{x}$.

Impostando il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Si ottengono i punti:

$(x_0, 0) \text{ con } x_0 \in \mathbb{R}$

$(0, y_0) \text{ con } y_0 \in \mathbb{R}$

Conviene calcolare l'Hessiano nei punti determinati? No, non conviene, anche perché l'Hessiano è nullo.

Si può studiare il segno della funzione variazione:

$$\Delta f(x, y) = f(x, y) - f(x_0, 0) = \arcsin^2(xy)$$

La differenza tra la funzione e il valore che essa assume nei punti critici del tipo $(x_0, 0)$ è maggiore o uguale a zero.

$$\Delta f(x, y) = f(x, y) - f(x_0, 0) =$$

$$= \arcsin^2(xy) \geq 0 \implies f(x, y) \geq f(x_0, 0) \forall (x, y) \in \mathrm{dom}(f)$$

I punti $(x_0, 0)$ sono punti di minimo relativo per la funzione f perché rispettano la definizione, anzi di più, sono punti di minimo assoluto, perché la relazione vale per ogni coppia (x, y) del dominio! 😄

Procedendo allo stesso modo per i punti $(0, y)$con $y_0 \in R$, si scopre che anch'essi sono punti di minimo relativo.

Cosa succede sul bordo del dominio?

Sul bordo del dominio

$$\partial \text{dom}(f) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| = 1 \right\}$$

la funzione assume il valore costante:

$$f(x_0, y_0) = \frac{\pi^2}{4} \quad \forall (x_0, y_0) \in \partial \text{dom}(f)$$

Una delle tante proprietà del arcoseno è che è una funzione limitata:

$$|\arcsin(xy)| \leq \frac{\pi}{2}$$

elevando membro a membro al quadrato otterremo:

$$\arcsin^2(x, y) \leq \frac{\pi^2}{4}$$

Si ha l'uguaglianza quando $xy = 1$ oppure $xy = -1$ ovvero quando $|xy| = 1$.
La funzione $f(x, y)$ ha massimo assoluto uguale a $M = \frac{\pi^2}{4}$ ed è raggiunto da tutti i punti del bordo del dominio che sono punti di massimo assoluto