Olimpiadi della Fisica

Roberto Capone

Preparazione alle gare di II livello

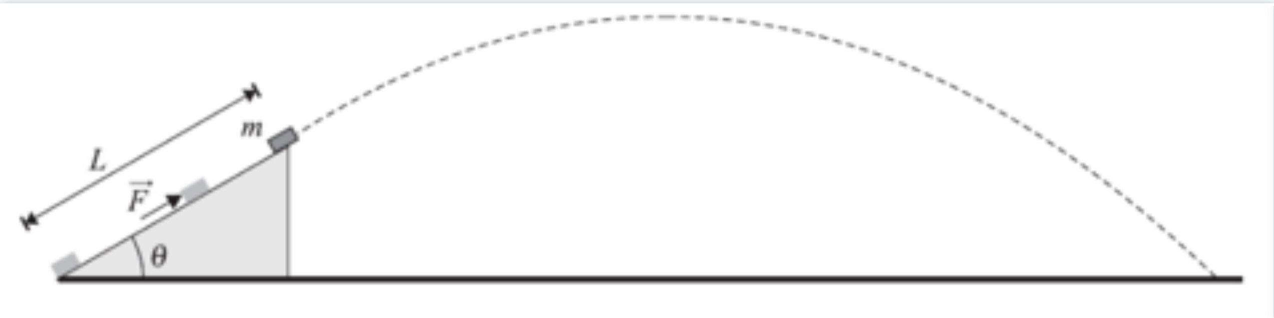
Fisciano, gennaio 2016

Dinamica e Cinematica del punto materiale

PROBLEMA n°1

Una forza $\vec{F}$ avente modulo di 400N spinge una massa m di 5 kg su per un piano inclinato di 30°.

Il piano è liscio e lungo L = 2m e la massa, di dimensioni trascurabili rispetto al piano inclinato, inizialmente è ferma. Quando la massa raggiunge la sommità del piano, la forza $\vec{F}$ cessa di agire e rimane solo la gravità. Con che velocità tocca terra la massa?



PROBLEMA n°2

Un blocco di 2.5 kg, inizialmente fermo, è appoggiato su un piano orizzontale. Ad esso viene applicata una forza $\vec{F}$ di modulo 40.1N e inclinata di 60° verso l'alto. Calcolare il modulo dell' accelerazione del blocco.

PROBLEMA n°3

Due blocchi A e B, di massa rispettivamente m_A e m_B, sono collocati uno sopra l'altro. Una fune inestensibile e di massa trascurabile li collega scorrendo senza attrito su di una carrucola fissata ad una parete. I due tratti di fune al di fuori della carrucola sono orizzontali. Una forza $\vec{F}$ viene applicata al blocco superiore, come mostrato in figura. Si vuole studiare il comportamento del sistema nei quattro casi che si presentano in funzione delle forze di attrito statico agenti tra il blocco A ed il pavimento e tra i due blocchi A e B.

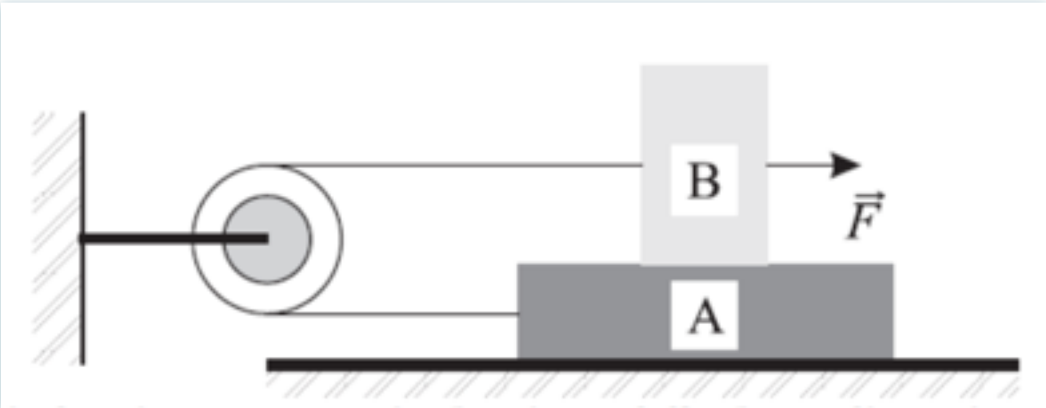
1. Trascurando inizialmente ogni forma di attrito, disegnare, separatamente per i due blocchi, il diagramma di tutte le forze agenti e successivamente determinare l'accelerazione dei due blocchi e la forza risultante agente su ciascuno dei due.

2. Per ognuno dei casi sottoelencati disegnare, separatamente per i due blocchi, il diagramma di tutte le forze agenti e determinare il modulo F della forza minima necessaria per mettere in moto il sistema:

a. attrito statico solamente tra il pavimento ed il blocco A, il cui coefficiente vale μ_A;

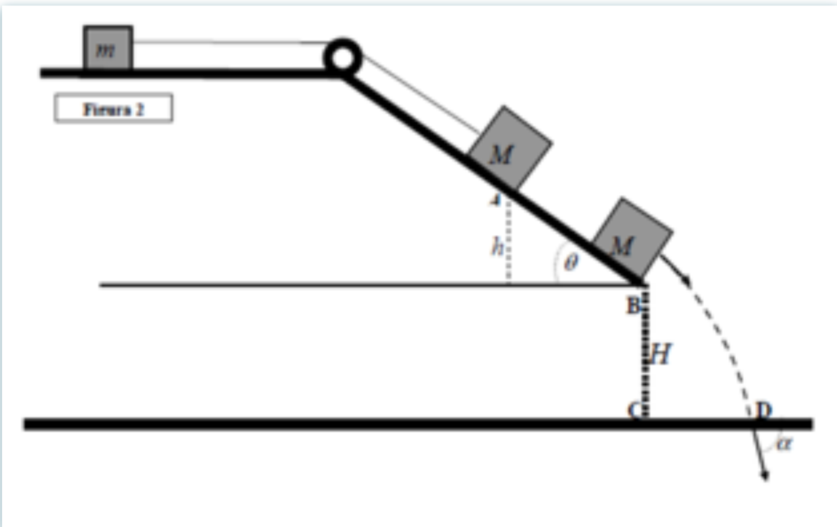
b. attrito statico solamente tra il blocco A ed il blocco B, il cui coefficiente vale μ_B;

c. attrito statico tra il pavimento ed il blocco A e tra il blocco A ed il blocco B, i cui coefficienti valgono rispettivamente μ_A e μ_B.



PROBLEMA n°4

Un corpo di massa m si trova su una superficie orizzontale che si raccorda con la sommità di un piano inclinato formante un angolo θ con l'orizzontale, come mostrato in figura Le superfici sono lisce (cioè prive di attrito). Un altro corpo di massa M, posto sul piano inclinato, ad un'altezza h rispetto alla base del piano inclinato, è collegato al primo tramite una fune ideale, cioè di massa trascurabile ed inestensibile, attraverso una carrucola ideale, priva di attrito e di massa trascurabile. Il sistema parte da fermo.



Calcolare la velocità delle due masse quando la massa M dopo essere scesa di un'altezza h raggiunge la base del piano inclinato (punto B in figura). Quando la massa M raggiunge la base del piano inclinato (punto B) la fune viene tagliata e il corpo M cade liberamente nel vuoto per un'altezza H fino a raggiungere terra nel punto D (vedi figura).

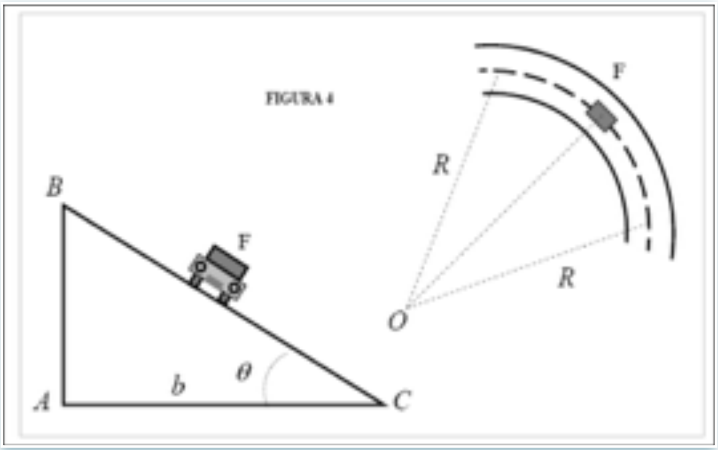
Calcolare

- La distanza CD

- Il tempo impiegato dal blocchetto per andare da B a D
- Il modulo e la direzione della velocità v_D del corpo M quando arriva in D.

Valori numerici : M = 5kg; m =1kg; h = 2m; H = 2m; θ = 60°; accelerazione di gravità $g=9.81\ m/s^2$.

PROBLEMA n°5

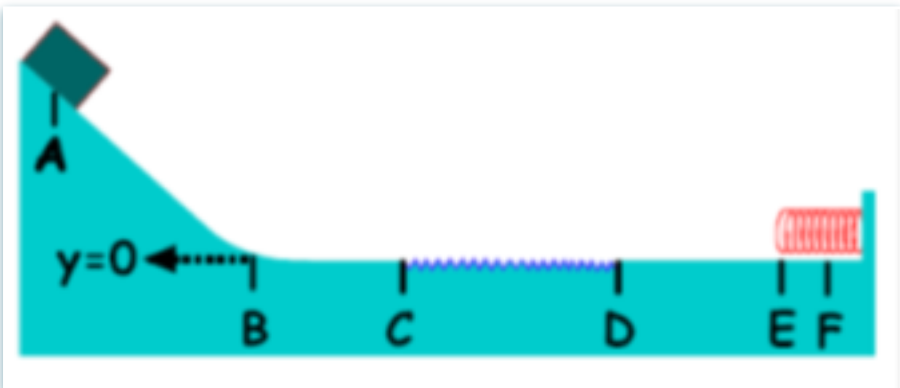


Lungo la curva sopraelevata disegnata in figura, supposta circolare e di raggio R=200m, in una strada larga 12m (lato BC del triangolo BAC in figura) e realizzata in modo tale da avere coefficiente di attrito trascurabile, il limite di velocità è di =100 km/h. Calcolare di quanto il bordo esterno della strada, lato BA, debba essere rialzato rispetto a quello interno, affinché l'autovettura, procedendo alla massima velocità consentita, non sbandi uscendo fuori strada.

PROBLEMA N°6

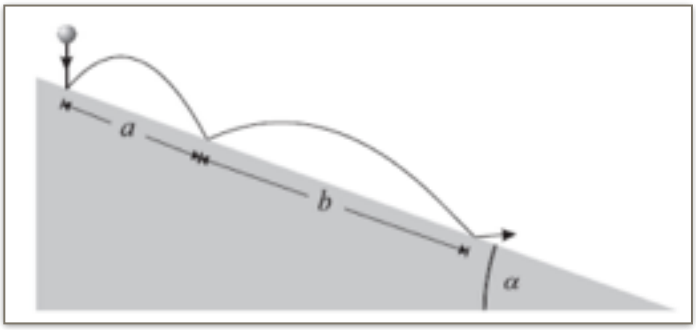
Un blocco di massa m=2Kg passa per il punto A con una energia potenziale di 64J rispetto al piano orizzontale. Determinare:

1. la velocità con cui il blocco arriva nel punto B
2. Il lavoro delle forze non conservative nel tratto CD lungo 30 metri e con coefficiente di attrito 0,1
3. La compressione massima della molla dotata di costante elastica k=800N/m



PROBLEMA N°7

Una palla elastica è lasciata cadere verticalmente sopra un piano privo di attrito, inclinato di un angolo rispetto all'orizzontale. La palla compie una serie di rimbalzi, come mostrato in figura. Siano a e b rispettivamente la distanza percorsa dalla palla sul piano tra il primo e il secondo urto e tra il secondo e il terzo urto. Trovare il rapporto a/b



PROBLEMA N°8

Ad un corpo di 12 Kg sono applicate due forze perpendicolari. Una delle due ha una intensità di 15 N. Sapendo che il corpo si muove con una accelerazione di 2 calcolare l'intensità dell'altra forza.

PROBLEMA N°9

La velocità di lancio di un proiettile è cinque volte maggiore della velocità che esso raggiunge alla massima altezza. Calcolare l'angolo di elevazione al lancio

PROBLEMA N°10

Una molla di costante elastica 200 N/m è compressa di 8 cm, su un piano orizzontale scabro, da una massa di 400 g, mantenuta inizialmente ferma. Dal momento in cui il sistema viene lasciato libero, la massa percorre 24 cm prima di fermarsi. Si calcoli il coefficiente di attrito dinamico tra il piano e la massa.

Problemi proposti

PROBLEMA n°11

Una goccia di pioggia di massa m sta scendendo verticalmente a velocità costante a causa dell'azione di una forza di frenamento $F = kv^2$, dove k è una costante. Calcolare l'energia cinetica della goccia di pioggia, in funzione della massa m, della costante k e dell'accelerazione di gravità g.

PROBLEMA n°12

Due ciclisti fanno una gara ad inseguimento partendo da punti opposti di una pista circolare. Trascurando i brevi intervalli di tempo delle accelerazioni, il moto dei due ciclisti può essere trattato come uniforme.
Se uno dei due mantiene una velocità superiore all'altro del 10%, dopo quanti giri il più veloce raggiunge l'altro?

PROBLEMA n°13

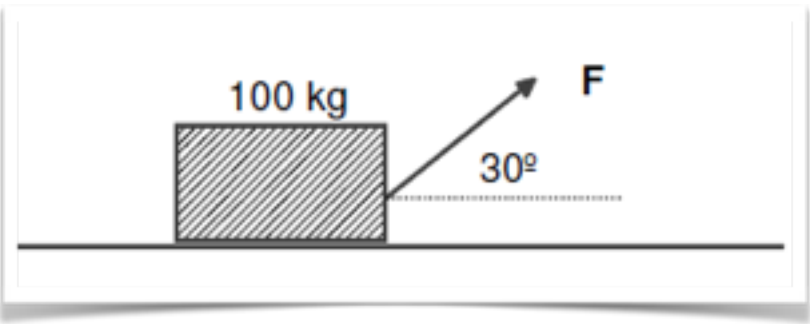
Un carrello di massa m_1 = 200g ed energia cinetica E_1 = 0.9J si muove in linea retta e ne urta un altro, di massa m_2, inizialmente fermo. Dopo l'urto, il primo carrello torna indietro con energia cinetica E_1' = 0.4 J. Calcolare la massa del secondo carrello nell'ipotesi che l'urto sia elastico.

PROBLEMA n°14

La velocità angolare di una ruota diminuisce uniformemente da 24000 giri al minuto a 18000 giri al minuto in 10 secondi. Si calcoli:

- l'accelerazione angolare;
- il numero di giri fatti dalla ruota in quel tempo;
- il vettore accelerazione di una particella posta a 10 cm dal centro dopo che sono trascorsi 5 secondi dopo che ha iniziato a rallentare.

PROBLEMA n°15



Un blocco di massa 100Kg è ferma su un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito 0.1. Al blocco si applica una forza di 200N inclinata di 30° rispetto all'orizzontale per 2 secondi in modo che il blocco accelera e subito inizia a frenare per la presenza dell'attrito. Si determini:

- l'accelerazione durante i primi due secondi;
- l'accelerazione mentre frena;
- il lavoro della forza F da quando ha inizio il moto fino a che si arresta;
- il lavoro della forza di attrito da quando il moto ha inizio fino a che si arresta.

PROBLEMA N°16

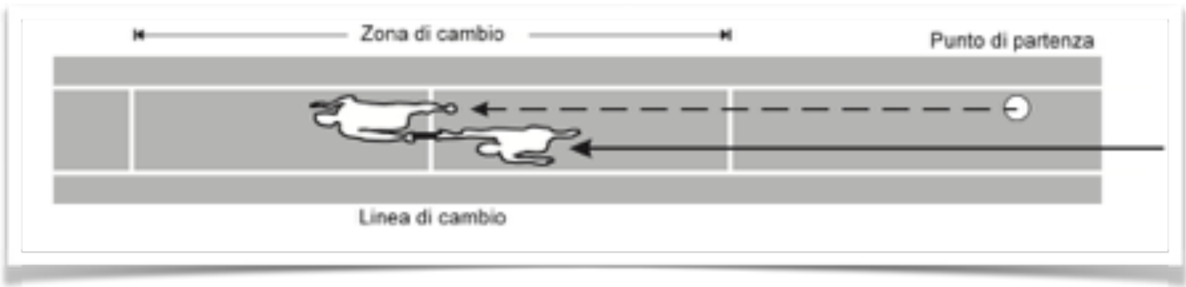
Si schematizza la corsa di un atleta, su una lunghezza totale L, in questo modo: in un primo tratto lungo l_0 l'atleta si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione a e per il resto del percorso (pari a $L - l_0$) di moto uniforme alla velocità v raggiunta nel primo tratto.

Nella corsa di un centometrista si può assumere che l'accelerazione duri per metà del percorso, ovvero per $l_0 = L/2$.

1. Sapendo che l'attuale record mondiale sui 100 m è di T_R = 9,74 s (Asafa Powell, Giamaica, realizzato il 9 Settembre 2007 a Rieti), calcolare l'accelerazione e la velocità finale del recordman.

Nella gara della "Staffetta 4 × 100" gli atleti (escluso il primo) effettuano una partenza "lanciata" muovendosi 20 m prima del traguardo delle frazioni lunghe 100 m che chiameremo *linea di cambio*; questa linea è al centro della *zona di cambio* (± 10 m, come mostrato in figura), che è il tratto di pista entro cui il *testimone* deve essere passato di mano in mano tra i corridori.

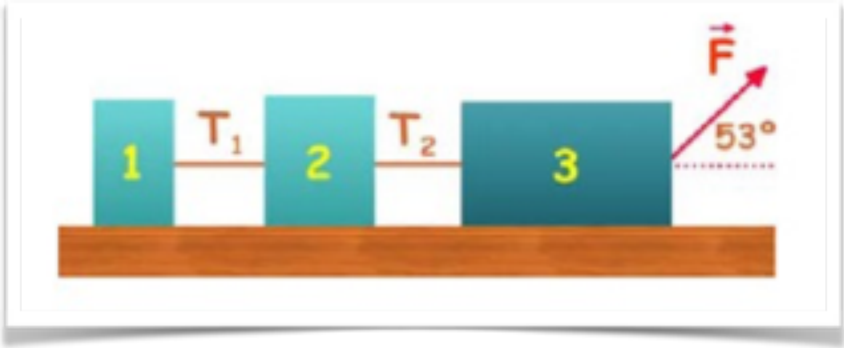
Supporremo adesso che la prima frazione di 100 m sia percorsa dal campione mondiale nello stesso modo detto sopra e che gli altri tre corridori siano tutti in grado di sviluppare la stessa accelerazione del campione, fino alla *linea di cambio*, proseguendo poi a velocità costante.



2. In quanto tempo sarebbero percorsi i 400 m, supponendo che ogni passaggio del testimone avvenga sulla *linea di cambio*, cioè esattamente ogni 100 m?

3. Nel momento in cui il secondo corridore scatta dal punto indicato, a che distanza da lui si trova il primo atleta in arrivo? E nei successivi cambi?

PROBLEMA N°17



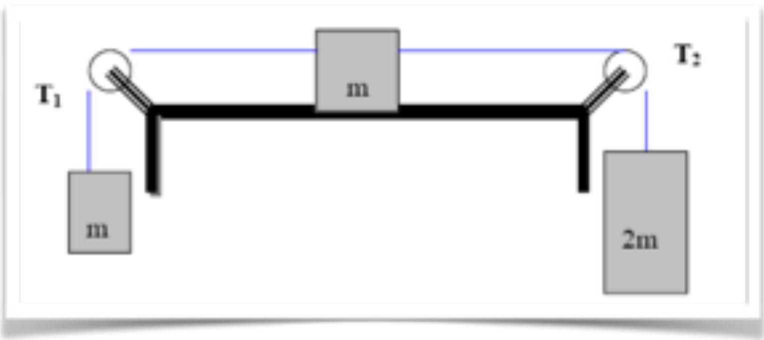
La figura mostra tre blocchi collegati da due corde (di massa trascurabile ed in estensibili) che si muovono su una superficie orizzontale priva di attrito sottoposte ad una forza di modulo F=20N. Se le masse valgono rispettivamente 1 Kg, 2 Kg e 3 Kg, si calcoli:

A – l'accelerazione del sistema;

B – il valore della Normale su ciascuno dei corpi

C – il valore della tensione di ciascuna corda.

PROBLEMA N°18



Le funi e le pulegge della figura sono prive di massa e non c'è attrito. Si trovi la tensione delle funi e l'accelerazione del sistema. Si ripeta poi l'esercizio nel caso in cui il coefficiente di attrito cinetico tra il blocco e la superficie valga 0,1. (caso a) T1 = 5/4 mg, T2 = 3/2 mg)

PROBLEMA N°19

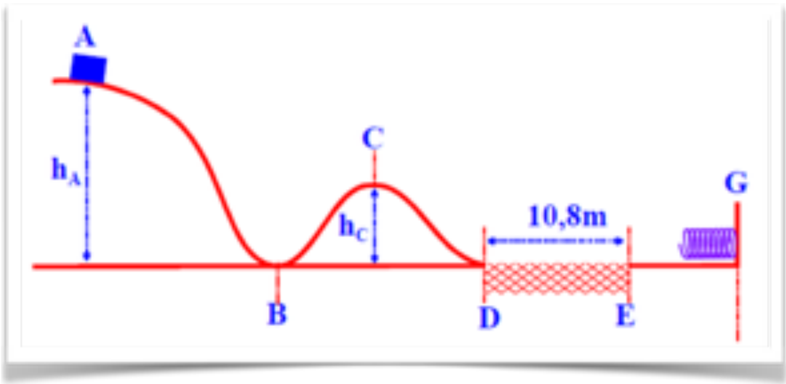
In figura è mostrato un blocco di massa 2 Kg assimilabile a un punto materiale che passa dalla posizione A posta a 6,4 m dal suolo con una velocità di 4m/s . Sapendo che nel tratto DE il piano di scorrimento è scabro, si calcoli:

a) L' altezza h del tratto nella posizione C sapendo che la velocità del blocco in C è 8m/s.

b) Si calcoli il lavoro nel tratto AC.

c) Alla fine il blocco giunge nel punto D dove incontra il tratto scabro DE. Se la velocità con cui arriva nel punto E situato a 10.8m da D è 6m/so rugoso DE. Qual è il valore del coefficiente di attrito cinetico tra le ruote e la strada nel ramo DE?

d) Se nel tratto EG non esiste attrito quanto vale la compressione massima della molla se la sua costante elastica è k=450 N/m?



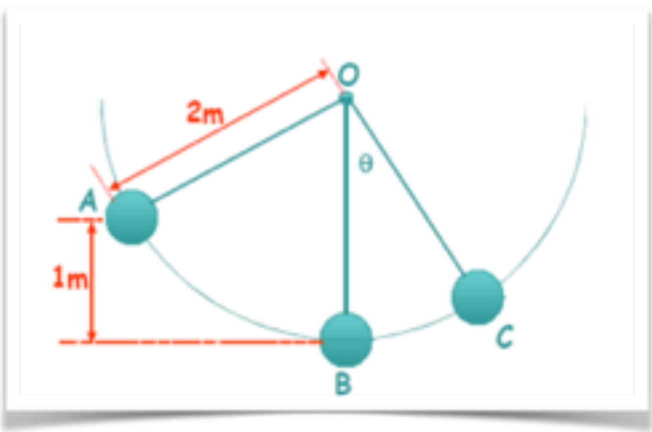
PROBLEMA N°20

Un oggetto di massa 0,5Kg è collegato al soffitto mediante una corda inestensibile e di massa trascurabile lunga 2 metri come mostrato in figura. Se l'oggetto viene sollevato fino ad un'altezza h=1m (posizione A) si calcoli:

a) la tensione della corda quando l'oggetto si trova in B.

b) l'angolo θ che la corda formerà con la verticale nell'istante in cui la velocità raggiunge 12m/s.

c) Il lavoro realizzato dalla forza peso quando l'oggetto si porta da B a C.



Soluzione dei problemi

PROBLEMA N°1

La forza di gravità compie lavoro nullo dato che il punto di partenza e il punto di arrivo sono alla medesima quota. La variazione di energia cinetica della massa è solamente data dal lavoro di $\vec{F}$ lungo il piano inclinato. Si ha, dunque:

$$F\,L = \frac{1}{2} m\,v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\,F\,L}{m}} = 17.9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

PROBLEMA N°2

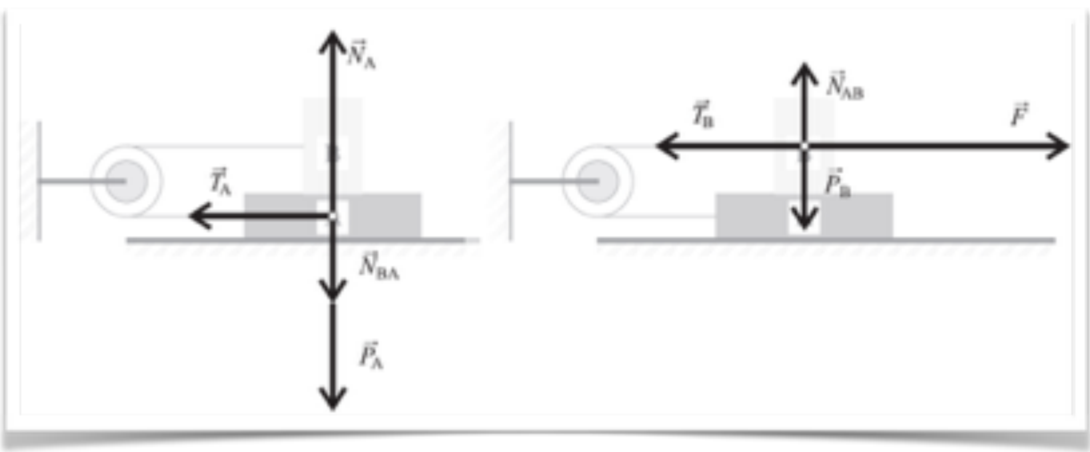
Poiché la componente verticale della forza che agisce sul blocco (F sen 60° = 34.7 N) è maggiore del peso (mg = 24.5 N), il blocco si solleva dal piano. Le forze che agiscono sul blocco sono dunque soltanto la forza $\vec{F}$ e il peso $\vec{P}$. L'angolo α tra di esse è 150°. Il modulo dell' accelerazione risulta allora

$$a = \frac{F_{\mathrm{ris}}}{m} = \frac{\sqrt{F^2 + (mg)^2 + 2Fmg\cos\alpha}}{m} = 9.0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

PROBLEMA N°3

Sul blocco A agiscono quattro forze: il proprio peso$\vec{}$, la spinta$\vec{}$ esercitata dal blocco B, la reazione del pavimento e la forza$\vec{}$ esercitata dalla fune. Anche sul blocco B agiscono quattro forze: il proprio peso$\vec{}$ la reazione$\vec{}$ esercitata dal blocco A su cui appoggia, la forza$\vec{}$ esercitata dalla fune e la forza $\vec{F}$ applicata.

I rispettivi diagrammi del corpo libero sono mostrati nella figura seguente.



Dalla seconda legge della dinamica applicata al blocco A, tenuto conto che il blocco non ha un moto verticale, si ricava

$$T_A = m_A a_A \quad e \quad NN_A = N_{BA} + P_A \qquad (1 - 2)$$

dove a_A è l'accelerazione del blocco. In modo analogo sul blocco B la seconda legge della dinamica fornisce

$$F - T_B = m_B a_B \quad \text{e} \quad N_{AB} = P_B \qquad (3 - 4)$$

con a_B accelerazione del blocco B. Per il terzo principio della dinamica si ha

$$N_{BA} = N_{AB} \qquad (5)$$

e, poiché la fune è inestensibile, i moduli delle accelerazioni sono uguali e si può porre

$$a_A = a_B \qquad (6)$$

Poiché la massa della fune è trascurabile e si è ipotizzato che la fune scivoli senza attrito sulla carrucola, le due forze esercitate dalla fune sui blocchi sono uguali in modulo e si pone

$$T_A = T_B = T \qquad (7)$$

Posto ancora

$$P_A = m_A g, \; P_B = m_B g$$

e combinando le espressioni (1), (3), (5), (6) e (7) si ricava

$$a = \frac{F}{m_A + m_B}$$

Sul blocco A agisce una forza risultante orizzontale di intensità

$$F_A = T = m_A a = F \frac{m_A}{m_A + m_B}$$

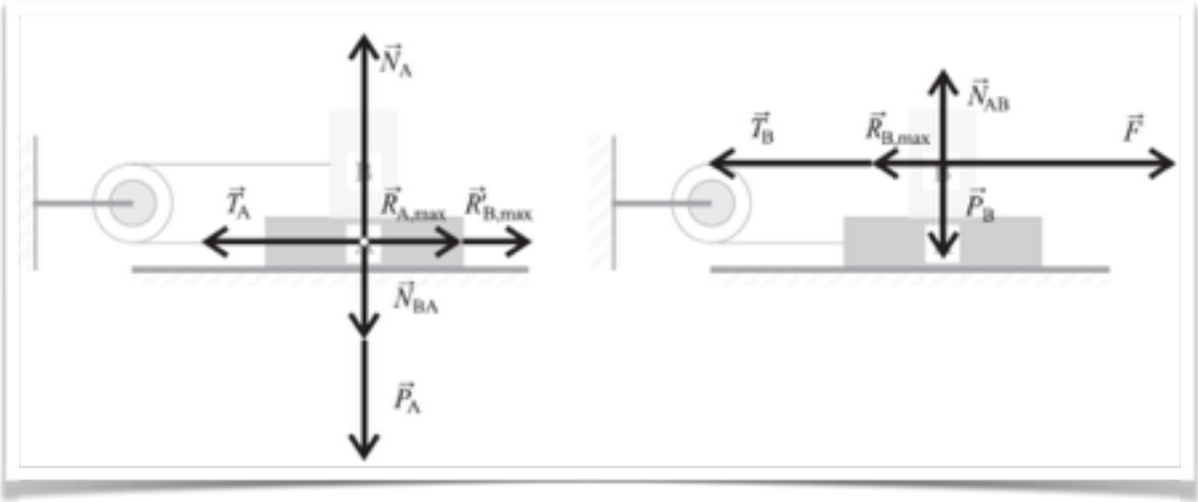
mentre sul blocco B agisce una forza risultante di intensità

$$F_B = F - T = F \frac{m_B}{m_A + m_B}$$

Quesito n. 2.

La forza minima necessaria per far muovere il sistema in presenza di attrito è quella relativa alla cosiddetta"condizione di distacco" in cui le forze di attrito assumono il valore massimo possibile mentre il sistema é ancora fermo: le forze risultano quindi ancora complessivamente equilibrate. I casi a. e b. sono due casi particolari del caso generale c. Conviene pertanto studiare prima il caso generale c. e poi da questo ricavare i due casi particolari a. e b. Naturalmente le soluzioni corrette saranno accettate in qualunque ordine siano state trovate.

Caso c. Il diagramma del corpo libero per i due blocchi A e B risulta quello mostrato nella figura seguente:



Sul blocco A in aggiunta alle quattro forze già esaminate agiscono anche la forza di attrito $\vec{R}_A$ tra blocco e pavimento e la forza $\vec{R}_B$ dovuta all'attrito tra i due blocchi.

Sul blocco B in aggiunta alle quattro forze già esaminate agisce solamente la forza di attrito $\vec{R}_B$ tra i due blocchi. Per il terzo principio della dinamica si ha $R_B = R'_B$. I versi delle forze sono mostrati in figura.

La forza di attrito massimo al distacco agente tra il pavimento ed il blocco A vale $R_{A;max} = \mu_A(m_A + m_B)g$, dove g è l'accelerazione di gravità; pertanto indicando con T' il modulo della forza minima necessaria per mettere in moto il blocco A ($\vec{T}_A$) si deve avere

$$T' - R_{A,max} - R'_B = 0 \quad \Rightarrow \quad T' = \mu_A(m_A + m_B)g + R'_B$$

In maniera analoga la forza di attrito massimo al distacco agente tra i due blocchi vale

$$R_{B,max} = \mu_B m_B g$$

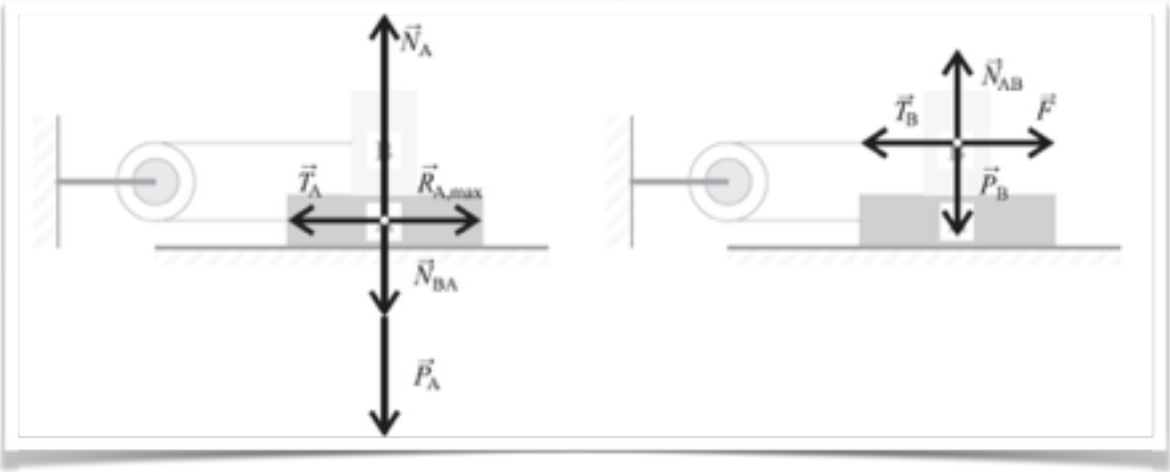
e di conseguenza, considerando le forze agenti sul blocco B (dove la forza $\vec{T}_B$ ha ancora modulo T'), si avrà il moto di quest' ultimo, rispetto al blocco A, se

$$F - T' - R_{B,max} = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \mu_A(m_A + m_B)g + 2\mu_B m_B g$$

Caso a.

In questo caso è presente solamente l'attrito tra il blocco A ed il pavimento. Pertanto sia nei diagrammi del corpo libero precedenti sia nelle formule si deve porre $\mu_B = 0$ ovvero trascurare la presenza delle forze $\vec{R}_B$ e $\vec{R}'_B$

Il diagramma del corpo libero dei due blocchi è rappresentato nella figura seguente.

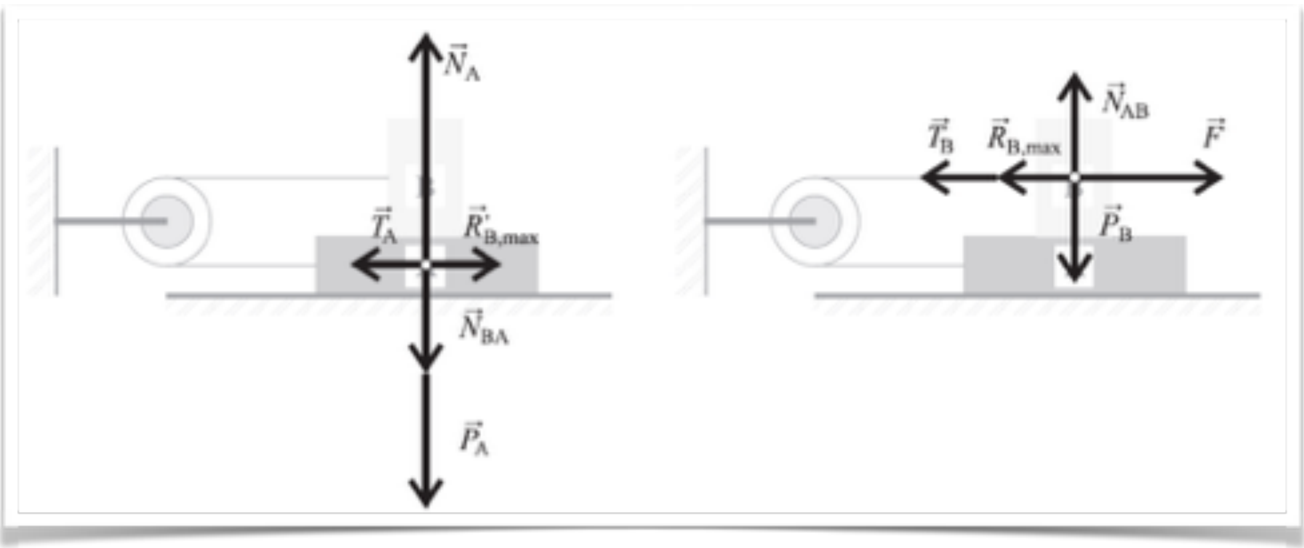


La forza minima necessaria per mettere in moto il sistema sarà

$$F = \mu_A(m_A + m_B)g$$

Caso b.

In questo caso è presente solamente l'attrito tra i due blocchi A e B. Pertanto sia nei diagrammi del corpo libero precedenti sia nelle formule si deve porre $\mu_A = 0$ ovvero trascurare la presenza della forza$\vec{}$. Il diagramma del corpo libero dei due blocchi è rappresentato nella figura sottostante.



La forza minima necessaria per mettere in moto il sistema sarà

$$F = 2\mu_B m_B g$$

PROBLEMA N°4

L'accelerazione del corpo M quando scende lungo il piano inclinato (prima che il filo venga tagliato) vale:

$$a = 4.08\ m/s^2$$

Il modulo della velocità v_B r del corpo M quando questo ha percorso la distanza AB e ha raggiunto il punto B alla base del piano inclinato vale:

$$v = 7.5\ m/s$$

Il modulo della velocità v_m del corpo m quando M ha raggiunto il punto B alla base del piano inclinato vale:

$$v = 7.5\ m/s$$

La velocità v_B del corpo M quando ha raggiunto il punto B ha componente orizzontale v_{Bx} :

$|v_{Bx}| = 4.95\ m/s$ ed è diretta verso destra

La velocità v_B del corpo M quando ha raggiunto il punto B ha componente verticale By

$|v\ | = 8.2\ m/s$ ed è diretta verso il basso

Il tempo impiegato dal corpo M per andare da B a D vale A. t=0. 66 s

La distanza CD vale $CD = 3.25\ m$

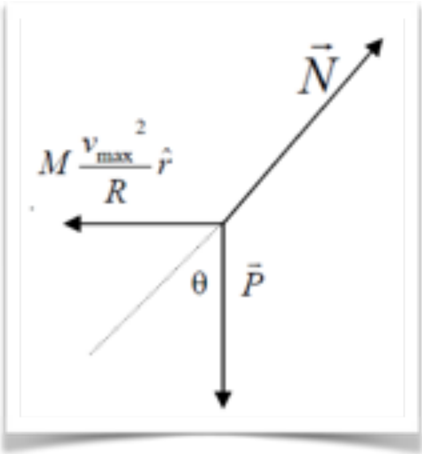
L'angolo α tra la velocità v_D nel punto D ed il suolo orizzontale vale:

$$\alpha = 1.08\ rad$$

PROBLEMA N°5

Affinché l'autovettura effettui la curva alla velocità limite non uscendo fuori strada ovvero non sbandando lateralmente, deve avvenire che la reazione normale N al piano inclinato, la forza peso P e la forza inerziale si equilibrino esattamente tra di loro:

$$P + N = -Ma = -M\frac{v^2}{R}$$



In poche parole, la risultante di P e della forza inerziale deve equilibrare la reazione N del piano.

Ciò avviene quando la tangente dell'angolo θ di inclinazione del piano è uguale al rapporto tra il modulo della forza inerziale e quello della forza peso, il che equivale anche geometricamente, al fatto che il seno dello stesso angolo è pari al rapporto tra la sopraelevazione h del piano stradale e la larghezza L della carreggiata, cioè:

$$tg\theta = \frac{Mv_{max}^2}{RMg}$$

$$sin\theta = \frac{h}{L}$$

Da cui

$$h = Lsin\left(arctg\left(\frac{v_{max}^2}{Rg}\right)\right)$$

In questo modo geometricamente si simula l'effetto dell'attrito tra battistrada e fondo stradale evitando all'autovettura di uscire fuori strada.

PROBLEMA N°6

Tra i punti A e B il sistema considerato è conservativo. Pertanto

$$E_A = E_B$$

$$E_A = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{\frac{2E_A}{m}} = 8\,m/s$$

Nel tratto CD, una parte dell'energia viene dissipata a causa dell'attrito. Pertanto:

$$\Delta E = L_{nc} = F_A d = -\mu_k N d$$

Essendo $N = mg$, si ha:

$$\Delta E = -\mu_k mgd - 60J$$

L'energia in D sarà

$$E_D = E_C + L_{cn} = 64\,J - 60\,J = 4\,J$$

Quando di ha la massima compressione, si ha:

$$E_D = E_P$$

$$E_D = \frac{1}{2}kx^2$$

Da qui si ricava:

$$x = \sqrt{\frac{2E_D}{k}} = 0{,}1\,m$$

PROBLEMA N°7

Si fissi un sistema di riferimento con asse x parallelo e asse y perpendicolare al piano inclinato. Il moto della palla si scompone in moti uniformemente accelerati lungo entrambi gli assi; l'accelerazione della palla ha componenti:

$$\begin{cases} a_x = g sin\alpha \\ a_y = -g cos\alpha \end{cases}$$

La velocità della palla subito prima del primo urto vale:

$$\begin{cases} v_x = v_0 sin\alpha \\ v_y = -v_0 cos\alpha \end{cases}$$

Nell'istante dell'urto, il piano esercita sulla palla una forza impulsiva perpendicolare al piano stesso, quindi la componente x della velocità della palla non cambia. Per quanto riguarda la componente y, subito dopo ogni rimbalzo essa è uguale in modulo a quella che era subito prima ma in verso contrario. Infatti, poiché l'urto è elastico si conserva l'energia cinetica e, di conseguenza, il modulo della velocità.

Il tempo t' di "salita" dopo un rimbalzo, lungo l'asse y, si ricava dalla legge della velocità:

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t$$

Nella fase di salita dopo un rimbalzo $v_{0y} = v_0 cos\alpha$ mentre $v_y(t') = 0$

Il tempo di salita vale quindi

$$t' = \frac{v_0}{g}$$

e per la simmetria del moto lungo l'asse y, il tempo complessivo tra ogni rimbalzo e il successivo è il doppio:

$$t = 2t' = \frac{2v_0}{g}$$

In questo tempo t, lo spostamento lungo l'asse x tra il primo e il secondo urto vale:

$$a = v_x t + \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{4v_0^2}{g} sin\alpha$$

Mentre tra il primo e il terzo urto, considerando un tempo 2t, si trova

$$a + b = v_x(2t) + \frac{1}{2} a_x (2t)^2 = \frac{12v_0^2}{g} sin\alpha$$

Da cui

$$b = \frac{4v_0^2}{g} sin\alpha$$

Quindi $a/b = 1/2$

PROBLEMA N°8

Dalla seconda legge della dinamica

$$\sum F = ma$$

Poiché le forze F_1 ed F_2 sono perpendicolari, si ha:

$$F_{ris} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \Rightarrow \quad F_2 = \sqrt{(ma)^2 - F_1^2} = 18.7\ N$$

PROBLEMA N°9

Adottiamo come sistema di riferimento quello in cui l'origine degli assi viene posto dove avviene il lancio. In questo modo sono applicabili le leggi "standard" del moto del proiettile

Alla massima altezza, osserviamo $v_y = 0$ e indichiamo $v_x = v$. In questa notazione, abbiamo $v_0 = 5v$. Successivamente, si osserva $v_0 \cos\theta_0 = v_{0x} = v$, in modo da arrivare a un'equazione che può essere risolta rispetto a θ_0:

$$(5v)cos\theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = arccos\left(\frac{1}{5}\right) = 78.5°$$

PROBLEMA N°10

Si applichi l'equazione dell'energia meccanica, considerando come posizione iniziale quella di partenza (molla compressa da m di un tratto d) e come posizione finale quella di arresto della massa. Si otterrà un valore del coefficiente di attrito pari a 0.68

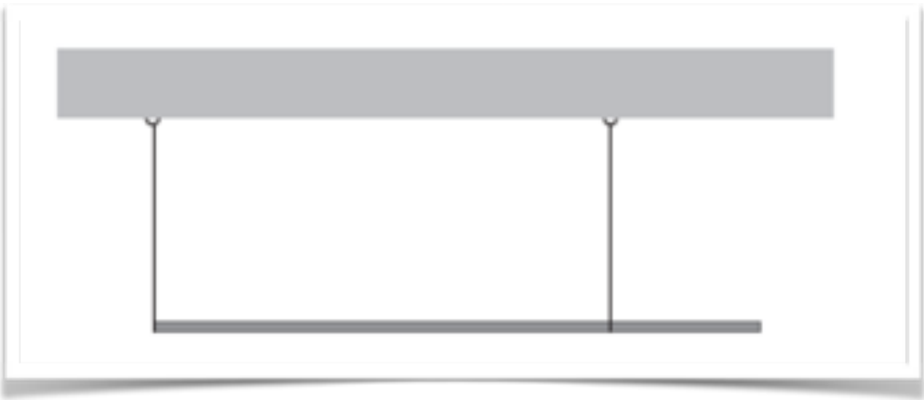
Meccanica dei sistemi rigidi

PROBLEMA n°1

Due dischi identici sono liberi di ruotare attorno a uno stesso asse di simmetria disposto verticalmente. Inizialmente, quello posto più in basso sta ruotando con una energia cinetica di rotazione E. Ad un certo istante, l'altro, inizialmente fermo, si lascia cadere su quello inferiore al quale rimane attaccato. Quanto vale l'energia cinetica di rotazione del sistema?

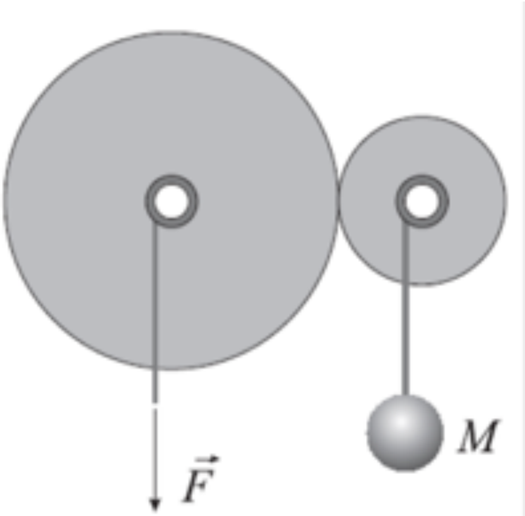
PROBLEMA n°2

Un'asta cilindrica di massa m e lunghezza l viene mantenuta in posizione orizzontale da due funi disposte verticalmente. La prima è attaccata all'estremità sinistra dell'asta; la seconda invece ad una distanza l/4 dall'estremità destra. Trovare la tensione della seconda fune.



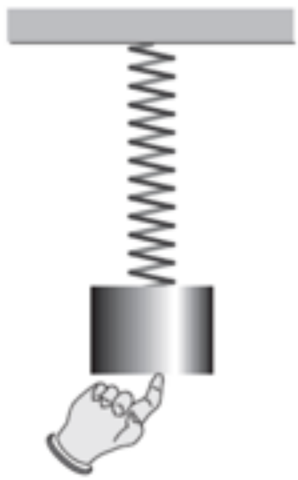
PROBLEMA n°3

Il sistema in figura rappresenta due dischi di raggi $R1 = R$ ed $R2 = R/2$ che, per attrito, possono ruotare a contatto uno dell'altro senza slittare. Su ciascun disco è fissato un rocchetto di raggio r su cui è avvolta una fune. Alla prima è applicata una forza verticale $\vec{F}$ mentre alla seconda è appesa una massa M. Se sui perni non c'è attrito e tutto il sistema è in equilibrio, quanto vale il modulo della forza $\vec{F}$?

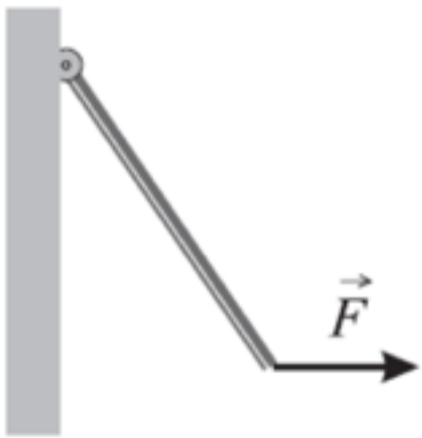


PROBLEMA n°4

Un corpo di massa m = 400 g è in equilibrio, appeso ad una molla di costante elastica $k = 10\text{Nm}^{-1}$, che lo sostiene. Il corpo viene sollevato, molto lentamente, di un tratto Δx = 30 cm. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza che solleva il corpo.



PROBLEMA n°5



Un corpo di massa m = 5 kg viene fatto ruotare uniformemente, in un piano verticale, per mezzo di un'asta lunga 2 m. Il periodo della rotazione è T = 2 s ed il corpo non è soggetto a forze di resistenza idrodinamica. Calcolare la forza F esercitata dall'asta sul corpo quando questo passa nel punto più basso.

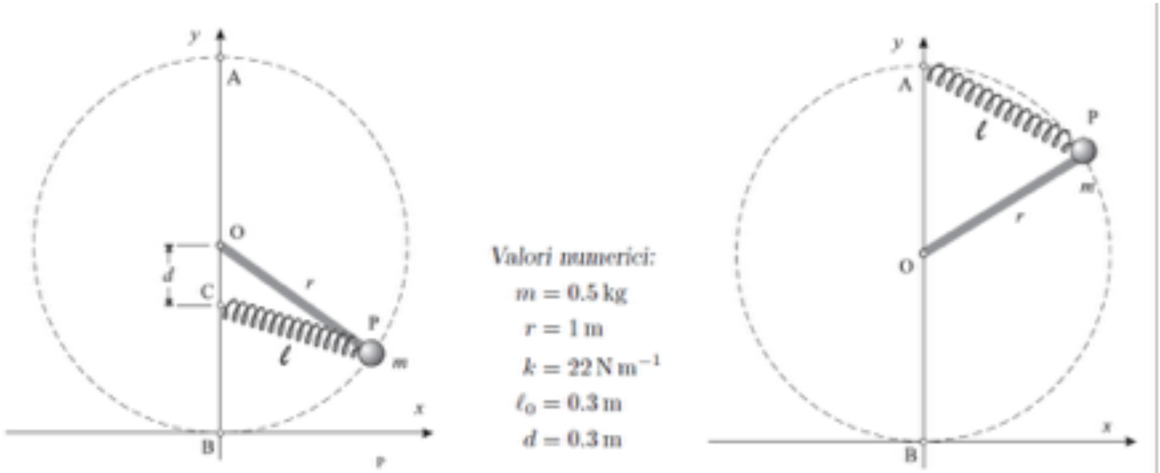
$$F = m\left(g + \frac{4\pi^2 R}{T^2}\right) = 148 \text{ N}.$$

PROBLEMA n°6

Un'asta di lunghezza ℓ, costruita di materiale omogeneo di densità lineare δ, è imperniata su un asse orizzontale fissato a una parete verticale e coincidente con la sua estremità in alto. E' tenuta in equilibrio esercitando una forza orizzontale $\vec{F}$ nell'estremo più in basso.

Siano: ℓ = 1.5 m, $\delta = 2.0\ \text{kgm}^{-1}$, F = 38 N. Quanto vale l'intensità della reazione che il muro esercita sull'estremo più in alto dell'asta?

PROBLEMA n°7



La figura a sinistra mostra un corpo puntiforme, di massa m, attaccato ad un'estremità di un'asta rigida che può ruotare liberamente in un piano verticale attorno alla sua altra estremità, fissata nel punto O. L'asta ha massa trascurabile e lunghezza r. Il corpo è attaccato anche ad una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo ℓ_0, la cui altra estremità è fissata ad un punto C che si trova sulla verticale passante per O, ad una distanza d sotto di esso. La figura mostra anche il sistema di riferimento nel piano verticale che suggeriamo di utilizzare.

Da quanto detto sopra segue che il punto P in cui si trova il corpo può assumere tutte le posizioni sulla circonferenza di raggio r, fra il punto più in alto, A, e quello più in basso, B. La lunghezza ℓ della molla può variare fra il valore massimo, $r + d$, nel punto A e quello minimo, $r - d$, nel punto B. Dati i valori di r e d riportati sopra, ℓ è sempre maggiore della lunghezza minima ℓ_0, per cui la molla è sempre in trazione.

1. Mostrare che l'equilibrio è instabile nel punto A, è stabile nel punto B e che non esistono altri punti di equilibrio stabile (basta mostrarlo in un punto P qualunque).

2. Ricavare l'espressione dell'energia del corpo in condizioni statiche in un punto P generico e calcolarne il valore nei punti A e B.

3. Supponendo che l'asta venga messa in moto quando si trova nel punto B facendole acquistare una velocità angolare ω, qual è il minimo valore di ω che permette al corpo di raggiungere il punto A?

Si consideri adesso la situazione illustrata nella figura a destra, in cui la molla è attaccata al punto A. Le posizioni che il corpo può occupare sono ancora sulla stessa circonferenza. Ci si limiti a considerare quelle per cui la molla è allungata (cioè quelle per cui $\ell > \ell_0$). In questa situazione esistono due altre posizioni di equilibrio (oltre a B), con x diverso da zero, simmetriche rispetto all'asse y.

4. Calcolare il valore dell'angolo α = d OAP che la molla forma con la verticale in una di queste due posizioni.

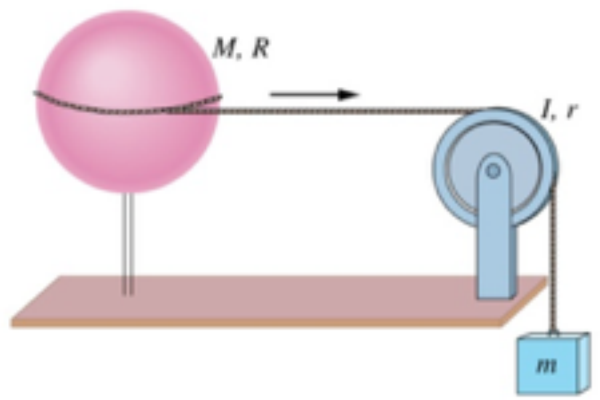
PROBLEMA n°8

Due ragazzi su una pista di pattinaggio vogliono confrontare le loro rispettive masse, chi ha la massa maggiore e di quante volte. Come possono operare il confronto, usando solo una cordella metrica?

PROBLEMA n°9

Un proiettile di massa m, giunto al culmine della sua traiettoria, esplode in tre frammenti di uguale massa. Il primo frammento cade a terra nel punto A, a distanza x_1=200m dal punto di lancio, un altro sale verticalmente verso l'alto e il terzo non si trova. Dove dobbiamo andare a cercare il terzo frammento se la gittata del proiettile inesploso è G=900m?

PROBLEMA n°10

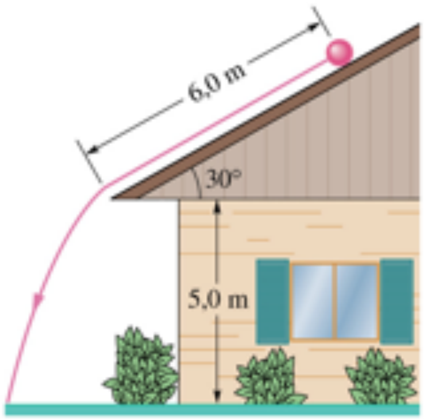


Il guscio sferico uniforme mostrato in figura di massa M=4,5 Kg e raggio R=8,5 cm, ruota intorno a un asse verticale su cuscinetti privi di attrito. Una corda priva di massa avvolta intorno all'equatore della sfera, passando senza slittamenti sopra una puleggia priva di attrito, avente momento d'inerzia $I=3{,}0x10^{-3}Kgm^2$ e raggio r=5,0 cm, tiene appeso un piccolo oggetto di massa m=0,60 Kg. La corda non slitta e il perno è privo di attrito. Quale sarà la velocità dell'oggetto dopo che sarà disceso per una distanza h=82 cm dalla posizione di riposo?

Problemi proposti

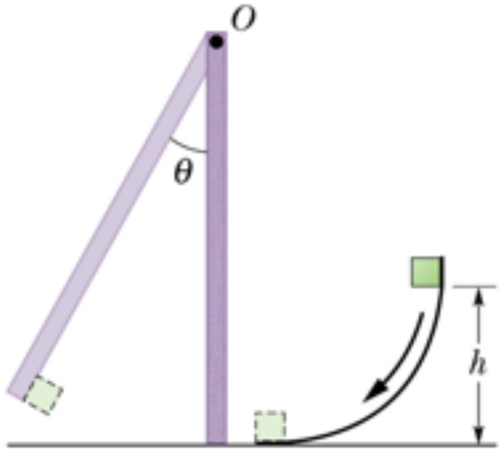
PROBLEMA n°11

Un cilindro pieno di raggio 10 cm e di massa 12 Kg, partendo da fermo, rotola senza strisciare per una distanza di 6,0 m giù per il tetto di una casa inclinato di 30°. Quando lascia il bordo del tetto, qual è la sua velocità angolare rispetto a un asse passante per il suo centro di massa? La parete esterna della casa è alta 5,0 m. A che distanza dal bordo del tetto atterrerà sul terreno piano?



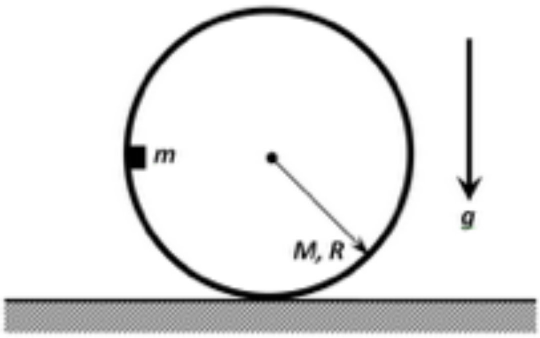
PROBLEMA n°12

Un oggetto di massa m050 g scivola giù per una superficie priva di attrito per un'altezza h=20 cm e va a urtare l'estremità dell'asta verticale omogenea (massa M=100 g e lunghezza d=40 cm) alla quale rimane attaccata. L'asta gira intorno a un punto, fissato come origine, di un certo angolo e quindi arriva a un istante di arresto. Si calcoli l'angolo.



PROBLEMA n°13

A small puck of mass *m* is carefully placed onto the inner surface of the thin hollow thin cylinder of mass *M* and of radius *R*. Initially, the cylinder rests on the horizontal plane and the puck is located at the height *R* above the plane as shown in the figure on the left. Find the interaction force *F* between the puck and the cylinder at the moment when the puck passes the lowest point of its trajectory. Assume that the friction between the puck and the inner surface of the cylinder is absent, and the cylinder moves on the plane without slipping. The free fall acceleration is *g*.



PROBLEMA n°14

Un satellite cosiddetto "geostazionario" gira intorno alla Terra in (circa) 24 ore, stando ad un'altezza di circa 36 000 km sulla superficie terrestre.

1. In quanto tempo una sonda spaziale percorre un'orbita circolare se la sua altezza dal suolo è di circa 900 km ?

Per un esperimento si vuole lanciare, dalla sonda spaziale verso la Terra, un oggetto che cada giù verticalmente, con una velocità iniziale $v_0 = 1.5$ kms^{-1} rispetto alla Terra (l'oggetto ha una massa trascurabile rispetto a quella della sonda).

2. Rispetto alla direzione di moto della sonda, a che angolo sarà lanciato l'oggetto?

3. Che velocità viene data all'oggetto, rispetto alla sonda?

4. Supponendo di poter trascurare la presenza dell'atmosfera fino ad una quota di circa 20km dal suolo, che velocità ha l'oggetto quando incontra l'atmosfera?

Soluzione dei problemi

PROBLEMA n°1

I due dischi sono identici, quindi hanno lo stesso momento d'inerzia I rispetto all'asse verticale. Il disco posso più in basso ha momento angolare $L_1=I\omega$, mentre l'altro ha, inizialmente, momento angolare $L_2=0$. Nella collisione, il momento angolare L' del sistema si conserva dato che sui dischi agiscono momenti dovuti a forze esterne; esso vale $L'=2I\omega'=I\omega$. Da cui $\omega'=\omega/2$

L'energia cinetica di rotazione del sistema vale dunque la metà dell'energia cinetica di rotazione iniziale.

PROBLEMA n°2

L'asta è soggetta a tre forze: la forza peso mg applicata al suo centro e rivolta in basso e le forze di tensione delle due funi, rispettivamente T_1 e T_2 applicate nei punti indicati nel testo e in figura. Dall'equilibrio dei momenti delle forze, calcolati rispetto all'estremità sinistra dell'asta, si ha:

$T_2 3l/4 = mgl/2$

Da cui

$T_2=(2/3)mg$

PROBLEMA n°4

Le condizioni in cui inizia il sollevamento la molla è allungata di un tratto $\Delta\ell = mg/k = 39.2$ cm. L'energia potenziale del sistema è in parte gravitazionale e in parte elastica (quella cinetica è trascurabile, visto che il moto è molto lento). Fissando uguale a zero l'energia potenziale gravitazionale nella situazione iniziale, si ha

$$U_0 = U_g + U_k = 1/2k(\Delta\ell)^2$$

Alla fine del sollevamento sarà

$$U_{\text{fin}} = U'_{\text{g}} + U'_{\text{k}} = mg\Delta x + \frac{1}{2}k(\Delta\ell - \Delta x)^2$$

Il lavoro compiuto è allora

$$\mathcal{L} = U_{\text{fin}} - U_0 = (mg - k\Delta\ell)\Delta x + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = 0.45\,\text{J}$$

In alternativa si può considerare che il lavoro della forza elastica è $L_e = mg\Delta x - 1/2\ k(\Delta x)2$, quello del peso $L_P = -mg\Delta x$ e che il lavoro della forza esterna si ottiene come l'opposto della somma dei primi due, trovando infine lo stesso risultato.

PROBLEMA n°5

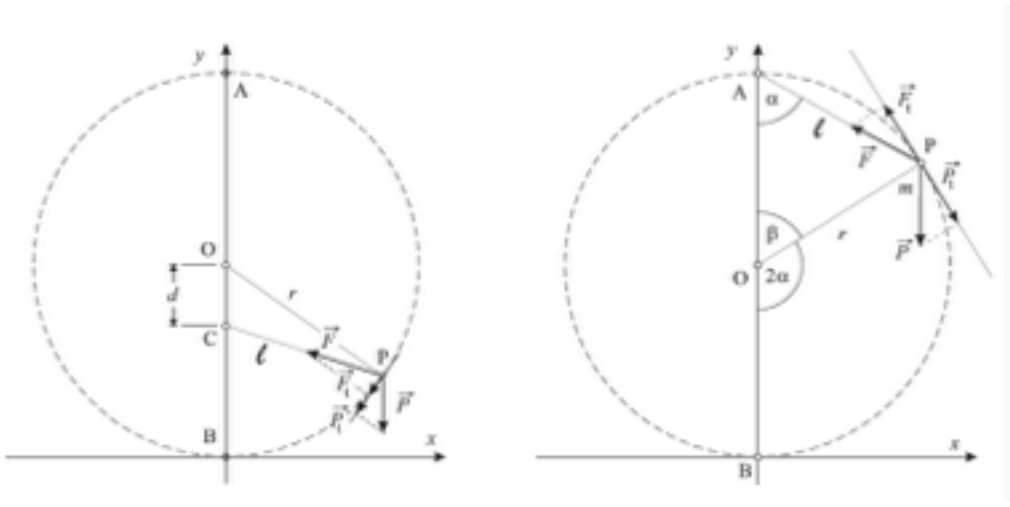
Durante tutta la rotazione la risultante delle forze agenti sul corpo deve essere diretta verso il centro di rotazione e avere modulo $F = m\omega^2 R$ (forza centripeta). Nel punto più basso tale forza, diretta verticalmente verso l'alto, è la somma della forza gravitazionale diretta verso il basso, di modulo mg, e della forza richiesta. Sarà allora ....

PROBLEMA n°6

La forza $\vec{R}$ che il muro applica sull'asta ha due componenti, una orizzontale e una verticale, per equilibrare rispettivamente la forza $\vec{F}$ e il peso $\vec{P}$ dell'asta (il cui modulo è $\ell\delta g$). In definitiva $\vec{R}$ avrà un'intensità data da

$$R = \sqrt{F^2 + P^2} = 48\,\text{N}$$

PROBLEMA n°7



Le forze che agiscono sul corpo sono tre: il peso, $\vec{P}$, la forza elastica, $\vec{F}$, esercitata dalla molla, e la reazione vincolare, $\vec{f}_a$, esercitata dall'asta. Poiché l'asta ha massa – e quindi peso – trascurabile, ed è libera di ruotare attorno ad O, almeno nelle posizioni di equilibrio la forza che il corpo esercita sull'asta non può avere componenti tangenziali, cioè perpendicolari all'asta, perché altrimenti l'asta ruoterebbe (si potrebbe dimostrare che questo è vero anche nelle altre posizioni). Per il principio di azione e reazione, anche la forza che l'asta esercita sul corpo deve essere radiale e la sua intensità è tale da impedire movimenti del corpo in questa direzione. L'equilibrio lungo la direzione radiale è dunque assicurato, in ogni posizione, dalla forza esercitata dall'asta. Allora, occorre e basta che ci sia equilibrio lungo la direzione tangenziale; poiché $\vec{f}_a$ non ha componenti in questa direzione, si avrà equilibrio quando si compensano le componenti tangenziali del peso e della forza elastica, $\vec{P}_t$ e $\vec{F}_t$. Nei punti A e B queste componenti sono entrambe nulle e dunque c'è equilibrio. In qualunque altro punto, $\vec{P}_t$ e $\vec{F}_t$ hanno lo stesso verso (v. figura a sinistra dove, per chiarezza grafica, $\vec{f}_a$ non è rappresentata) e non si può mai avere equilibrio. In particolare, entrambe le componenti spingono il corpo verso B, per cui questa posizione è di equilibrio stabile, mentre A è di equilibrio instabile.

In condizioni statiche, l'energia è solo potenziale e questa è la somma del contributo gravitazionale e di quello elastico. L'energia meccanica risulta quindi $E = mgy + 1/2\, k(\ell-\ell_0)^2$. Pertanto

$$\text{in B:}\quad y = 0 \quad \text{e} \quad \ell = r - d;\quad E_B = {}^1\!/_2\, k(r - d - \ell_0)^2 = 1.8\,\mathrm{J}$$

$$\text{in A:}\quad y = 2r \quad \text{e} \quad \ell = r + d;\quad E_A = 2mgr + {}^1\!/_2\, k(r + d - \ell_0)^2 = 20.8\,\mathrm{J}$$

Il minimo valore di ω che permette al corpo di raggiungere il punto A sarà quello in corrispondenza del quale il corpo arriva in questo punto con velocità nulla. In questa situazione, il bilancio energetico diventa:

$${}^1\!/_2\, k(r - d - \ell_0)^2 + {}^1\!/_2\, m(\omega r)^2 = 2mgr + {}^1\!/_2\, k(r + d - \ell_0)^2$$

Dal calcolo si ottiene

$$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{gr + \frac{kd(r - l_0)}{m}} = 8.7\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

L'angolo al centro d BOP risulta 2α, in quanto insiste sullo stesso arco BP dell'angolo alla circonferenza α. Affinché ci sia equilibrio, anche in questo caso occorre e basta che ci sia equilibrio tra le componenti tangenziali delle forze.

La componente tangenziale del peso vale

$$P_t = mg \operatorname{sen} \beta = mg \operatorname{sen} 2\alpha = 2mg \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

La lunghezza della molla è $\ell = 2r \cos \alpha$, e di conseguenza la forza elastica è $F = k(2r \cos \alpha - \ell_0)$. La sua componente tangenziale vale allora:

$$F_t = F \text{ sen } \alpha = k(2r \cos \alpha - \ell_0) \text{ sen } \alpha$$

Imponendo la condizione $P_t = F_t$, si ottiene l'equazione

$$2mg \text{ sen } \alpha \cos \alpha = k \text{ sen } \alpha(2r \cos \alpha - \ell_0) .$$

Poiché la situazione è simmetrica e dobbiamo cercare soluzioni solo per $\ell > \ell_0$, per cui $\cos \alpha > \ell_0/(2r)$ ed $\alpha < 81.4°$, possiamo limitarci all'intervallo $0° < \alpha < 81.4°$.

Risolvendo l'equazione precedente troviamo due soluzioni nell'intervallo indicato: una per $\alpha = 0$, che ci da` la posizione di equilibrio in B che già conosciamo (stavolta però – coi valori numerici considerati – si tratta di equilibrio instabile, come si può verificare), e l'altra per

$$\cos \alpha = \frac{k\ell_0}{2(kr - mg)} = 0.193 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 78.9°$$

Soluzione alternativa

Per chi conosce il calcolo differenziale, è possibile seguire una linea di ragionamento diversa, sapendo che nelle posizioni di equilibrio deve annullarsi la derivata dell'energia potenziale. In funzione dell'angolo α, l'energia potenziale gravitazionale è data da:

$$U_g(\alpha) = mgy = mgr(1 - \cos 2\alpha) = 2mgr \text{ sen}^2 \alpha$$

dove abbiamo sfruttato la formula di duplicazione del coseno. L'energia potenziale elastica vale:

$$U_{el}(\alpha) = \frac{1}{2} k(2r \cos \alpha - \ell_0)^2$$

L'energia potenziale sarà la somma di queste due. Le posizioni di equilibrio saranno quelle in cui la derivata di questa funzione si annulla. Calcoliamo la derivata rispetto ad α:

$$\frac{dU}{d\alpha} = 4mgr \text{ sen } \alpha \cos \alpha - k(2r \cos \alpha - \ell_0)\, 2r \text{ sen } \alpha$$

Imponendo che questa espressione si annulli, ritroviamo gli stessi valori trovati precedentemente.

PROBLEMA n°8

I ragazzi possono misurare la distanza percorsa da quando si spingono l'un con l'altro a quando si fermano. Moltiplicando queste distanze con le corrispondenti masse , il coefficiente di attrito μ e l'accelerazione di gravità g essi possono trovare l'ammontare del lavoro compiuto dalle forze frenanti:

$$F_1=\mu m_1 g s_1$$
$$F_2=\mu m_2 g s_2$$

che naturalmente sono uguali alle energie iniziali

$$E_1=m_1 v_1^2/2$$
$$E_2=m_2 v_2^2/2$$
$$\mu m_1 g s_1=m_1 v_1^2/2$$
$$\mu m_2 g s_2=m_2 v_2^2/2$$

Dividendo i termini si ottiene: $s_1/s_2=(v_1/v_2)^2$.

Poiché il sistema inizialmente è in quiete, per il principio della conservazione della quantità di moto, deve essere $0=m_1\, \mathbf{v_1}+m_2\, \mathbf{v_2}$ da cui

$$(m_2/m_1)^2=(v_1/v_2)^2 \text{ e quindi } m_2/m_1=(s_1/s_2)^{1/2}$$

Poiché le distanze s_1 e s_2 sono state misurate il problema è risolto. Si deve notare tuttavia che per ritenere il risultato accettabile occorre ripetere più volte le misure e calcolare i valori medi.

PROBLEMA n°9

Il sistema è isolato quindi si conserva la quantità di moto totale del sistema e la posizione del CM.
La posizione del centro di massa dei tre frammenti è la stessa che avrebbe occupato il CM del proiettile se fosse arrivato a terra.

$$x_{CM}=(mx_1/3+mx_2/3+mx_3/3)/m=(\, x_1+G/2+x_3)/3=G$$
$$x_1+G/2+x_3=3G$$
$$x_3=5G/2-x_1$$
$$x_3=2050m$$

Il terzo frammento è caduto a terra in un punto che dista x_3 = 2050m dal punto di lancio.
Il secondo frammento che sale verso l'alto, ricade lungo verticale a terra nel $x_2=G/2$.

PROBLEMA n°10

Si suggerisce di ricorrere al teorema di conservazione dell'energia meccanica, tenendo conto che all'energia cinetica del centro di massa bisogna aggiungere l'energia cinetica rotazionale (sia della sfera che della puleggia). La velocità richiesta è 1,4 m/s