Indice

Prefazione

Guardando i libri di testo sia con gli occhi dell'insegnante che li usa, sia dell'autore che li scrive, ci si rende conto di un fatto banale: chi scrive i manuali scolastici sono gli insegnanti, chi li usa sono sempre gli insegnanti. Dal momento che oggi ci sono gli strumenti, sia quelli elettronici, sia il sistema della stampa *on demand*, che permettono di "circuitare" direttamente autori e fruitori, mi sono deciso a intraprendere la creazione di un manuale di matematica libero, nel senso più ampio che oggi, nell'era delle tecnologie dell'informazione e della comunicazione, si riesce a dare a questo termine. Tuttavia, adottare "ufficialmente" un testo scolastico nella scuola italiana è un fatto semplice solo se si segue un percorso consolidato nel tempo, fatto più che altro di prassi e abitudini che non di leggi specifiche. Per rispondere a queste esigenze questo Manuale è fatto di Autori, Contenuti, Supporti e Dati legali.

Obiettivi Il progetto "Matematica C^3" ha per obiettivo la realizzazione di un manuale di matematica, per tutto il percorso scolastico e per ogni tipologia di scuola, scritto in forma collaborativa e con licenza *Creative Commons*. Si propone, quindi, di abbattere i costi dell'istruzione, ridurre il peso dei libri, invogliare gli studenti a usare il libro, promuovere l'autoformazione per chi è fuori dai percorsi scolastici. Ha inoltre l'ambizione di avviare una sfida "culturale" più ampia di una scuola più democratica, più libera, dove ognuno possa accedere gratuitamente almeno alle risorse di base.

Autori Il manuale è scritto in forma collaborativa da diverse decine di docenti di matematica sulla base della loro esperienza reale di insegnamento nelle diverse scuole. Alla sua realizzazione hanno contribuito anche studenti e appassionati. Tutti hanno contribuito in maniera gratuita e libera.

Contenuti Matematica C^3 si presenta come un *work in progress* sempre aggiornato e migliorabile da parte di tutti, docenti e studenti. Può essere liberamente personalizzato da ciascun insegnante per adeguarlo alla scuola in cui insegna, al proprio modo di lavorare, alle esigenze dei suoi studenti. È pensato non tanto per lo studio della teoria, che resta principalmente un compito dell'insegnante, quanto per fornire un'ampia scelta di esercizi da cui attingere per "praticare" la matematica. Lo stile scelto è quello di raccontare la matematica allo stesso modo in cui l'insegnante la racconta in classe di fronte agli studenti. Gli argomenti sono trattati secondo un approccio laboratoriale, senza distinguere eccessivamente tra teoria ed esercizi; teoria, esempi svolti, esercizi guidati, esercizi da svolgere vengono presentati come un tutt'uno.

Supporti Matematica C^3 è scaricabile dal sito `http://www.matematicamente.it`. È disponile in formato elettronico pdf completamente gratuito; i sorgenti in LaTeXsono liberi e disponibili sullo stesso sito. I diversi volumi che compongono l'opera possono essere stampati, fotocopiati in proprio o stampati in tipografia per le sole le parti che occorrono, in nessun caso ci sono diritti d'autore da pagare agli autori o all'editore. Il docente che vorrà sperimentare nuove forme d'uso può usarlo in formato elettronico su tablet pc, netbook o più semplicemente pc portatili, può proiettarlo direttamente sulla lavagna interattiva (LIM) interagendo con il testo, svolgendo direttamente esempi ed esercizi, personalizzando con gli alunni definizioni ed enunciati; ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet, confrontando definizioni e teoremi su Wikipedia, cercando sull'enciclopedia libera notizie storiche sugli autori, ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet (sul sito http://www.matematicamente.it sono disponibili gratuitamente test interattivi e alcune videolezioni). A casa lo studente potrà usare il libro sullo stesso dispositivo che ha usato in classe (tablet, notebook) con le annotazioni e le modifiche fatte dall'insegnante, potrà svolgere gli esercizi sul computer o sul libro cartaceo, potrà scambiare file attraverso i *social network* o i sistemi di messaggistica istantanea, particolarmente diffusi tra i ragazzi.

VI Edizione Modifiche sostanziali presenti in questa edizione: nuovo capitolo sulla Logica di base, inseriti e rivisti i capitoli sulle Relazioni e sulle Funzioni prima presenti nell'appendice, cambiato l'ordine del capitolo Equazioni di primo grado che passa dopo le Frazioni algebriche, aggiunta di numerosi esercizi in tutti i capitoli, revisione degli esercizi e aggiunta di numerosi risultati.

Il coordinatore del progetto
prof. Antonio Bernardo.

I Numeri

"One door, one key..."
Foto di Silv3rFoX
http://www.flickr.com/photos/12030514@N08/2272118558/

Numeri naturali 1

1.1 L'origine dei numeri

L'origine del sistema dei numeri naturali si perde nella notte dei tempi. Non abbiamo documenti sufficienti per capire come l'uomo li abbia costruiti o scoperti; è possibile che il nostro sistema di numerazione sia nato contemporaneamente al linguaggio stesso della specie umana. Sono stati ritrovati tronchi fossili risalenti a più di trentamila anni fa, recanti delle incisioni a distanza regolare. In particolare, è stato ritrovato un osso di babbuino, detto "Osso di Ishango" (figura 1.1) [1] in quanto è stato rinvenuto presso la città di Ishango nel Congo tra il Nilo e il lago Edoardo, che riporta delle tacche disposte in modo tale da farci pensare che rappresentino dei numeri o dei calcoli. L'osso risale a un periodo tra il 20 000 a.C. e il 18 000 a.C.

Possiamo immaginare che i pastori per contare i capi del proprio gregge, facessero delle tacche su dei bastoni mano a mano che le pecore entravano nel recinto una alla volta: una tacca per ogni pecora. Tuttavia, questo metodo di associazione uno ad uno (una tacca per una pecora) non è efficace per greggi, o oggetti da contare, di grandi dimensioni. Si immagini, per esempio, la difficoltà di tracciare cinquecento tacche su un bastone. È possibile allora che per rappresentare numeri grandi si siano cominciati a usare simboli specifici che richiamassero alla mente i numeri grandi e che contemporaneamente siano state fissate alcune regole per associare questi simboli.

Figura 1.1: Osso di Ishango

Sappiamo per certo che circa 6 000 anni fa gli antichi Egizi scrivevano, incidendo sulla pietra, i numeri utilizzando geroglifici per le potenze di 10:

𓁨	𓆐	𓂭	𓆼	𓍢	𓎆	𓏺
1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1

Ripetendo questi simboli è possibile scrivere, per esempio, il numero 3 673 così:

𓆼𓆼𓆼𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺

I Romani usavano invece sette simboli con i quali, seguendo determinate regole, rappresentavano qualunque numero. I simboli sono I $=$ 1, V $=$ 5, X $=$ 10, L $=$ 50, C $=$ 100, D $=$ 500, M $=$ 1 000. La scrittura MM rappresenta il valore $1\,000 + 1\,000 = 2\,000$, mentre VI rappresenta $5 + 1 = 6$ ed invece IV rappresenta $5 - 1 = 4$.

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Osso_d'Ishango

1.2 Il sistema di numerazione decimale posizionale

Il modo di scrivere i numeri dei Romani risultava piuttosto complicato sia nella scrittura dei numeri sia nell'esecuzione dei calcoli. Il sistema tutt'oggi utilizzato per la scrittura dei numeri fa uso dei soli dieci simboli 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, che vengono detti *cifre*. Un numero è rappresentato da una sequenza ordinata di tali cifre (eventualmente anche ripetute).

Per rappresentare il numero dieci, che segue il 9, non si fa uso di un simbolo diverso ma si scrivono due cifre: il simbolo 1 e il simbolo 0 alla sua destra. Per chiarire questo metodo utilizziamo un pallottoliere (figura 1.2) con aste verticali capaci di contenere fino a 9 dischetti: per rappresentare il numero 10 dispongo un dischetto nell'asta a sinistra e svuotando quella immediatamente alla sua destra: il numero dieci viene rappresentato dalla scrittura 10 che indica appunto 1 dischetto nella seconda asta (iniziando il conteggio da quella più a destra) e 0 in quella immediatamente a destra.

I dischetti sull'ultima asta rappresentano il numero 9; un dischetto sulla penultima rappresenta il numero 10. Per rappresentare il numero cento si fa uso della scrittura 100. Ovvero si sposta il numero 1 ancora a sinistra ponendo uno 0 nel posto lasciato vuoto.

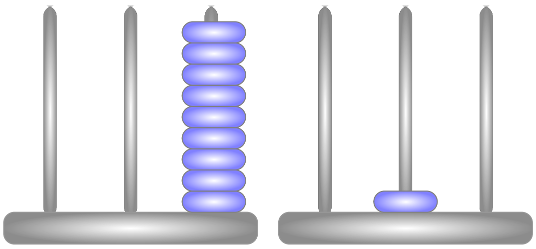


Figura 1.2: Il pallottoliere

Questo metodo rappresenta i numeri dando ad ogni cifra un peso differente a seconda della posizione che essa occupa all'interno della rappresentazione del numero stesso: ogni posizione occupata da una cifra vale 10 volte di più rispetto a quella che si trova immediatamente alla sua destra. La rappresentazione di un numero è quella che si ottiene riportando il numero di dischetti presenti in ogni asta dell'abaco, uno accanto all'altro. Per esempio, se ci sono soltanto 3 dischetti nella terza asta il numero in cifre è 300, mentre la scrittura 219 indica 2 dischetti nella terza asta, 1 nella seconda e 9 nella prima. Il sistema di numerazione che utilizziamo, detto *sistema decimale*, si basa sulle potenze di 10 (sezione 1.6), che è la base dei pesi assegnati alle posizioni occupate dalle cifre.

Nel pallottoliere ciascuna asta indica una potenza di dieci. Il valore di un numero si ottiene moltiplicando ciascuna cifra per il suo peso e sommando i valori ottenuti.

Per esempio, tre dischetti nella terza asta rappresentano il numero $3 \cdot 10^2 = 300$. Il numero 219 si rappresenta tenendo conto di questa scrittura $2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 9$.

Per quanto detto, il sistema di numerazione che usiamo è decimale o a base dieci, perché utilizza dieci simboli (cifre) per rappresentare i numeri, e posizionale perché una stessa cifra assume un peso (valore) diverso a seconda della posizione che essa occupa.

1.3 I numeri naturali

I primi numeri che abbiamo usato sin da bambini per contare gli oggetti o le persone si chiamano *numeri naturali*

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots$$

L'insieme di tutti questi numeri si indica con la lettera $\mathbb{N}$.

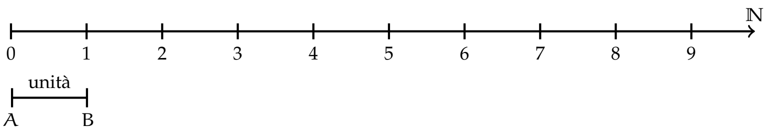
Cosa hanno in comune le dita di una mano, con 5 mele, 5 penne, 5 sedie? Evidentemente il numero 5. Una caratteristica cioè che è comune a tutti gli insiemi formati da 5 oggetti. Questa caratteristica può essere vista come un oggetto a sé stante, un oggetto astratto di tipo matematico.

Ma i numeri naturali non servono solo per indicare quanti oggetti ci sono (aspetto *cardinale* del numero), vengono usati anche per rappresentare l'ordine con cui si presentano gli oggetti, (aspetto *ordinale*), l'ordine per esempio con cui i corridori arrivano al traguardo: primo, secondo, terzo, …

Nonostante i numeri naturali e le operazioni su di essi ci vengano insegnati fin da piccoli, e nonostante l'umanità li usi da tempi antichissimi una loro piena comprensione non è semplice, come dimostra il fatto che ancora oggi i matematici ne discutono. Il dibattito su cosa siano i numeri e su cosa si fondano è stato particolarmente animato nei primi decenni del XX secolo, quando ne hanno discusso matematici e filosofi come Frege, Peano, Russell, Hilbert e tanti altri. Oggi ci sono diversi punti di vista.

1.3.1 Rappresentazione geometrica

I numeri naturali possono essere rappresentati su una semiretta: si identifica il numero 0 con l'origine della semiretta, come verso di percorrenza si prende quello da sinistra verso destra e come unità di misura un segmento $\overline{AB}$. Si riporta questa unità di misura più volte partendo dall'origine e a ogni passo si va al numero successivo.



Ogni numero naturale si costruisce a partire dal numero 0 e passando di volta in volta al numero successivo: 1 è il successore di 0, 2 è il successore di 1, 3 è il successore di 2, ecc. Ogni numero naturale ha il successore e ogni numero, a eccezione di 0, ha il precedente. L'insieme $\mathbb{N}$ ha 0 come elemento minimo e non ha un elemento massimo.

I numeri rappresentati sulla retta sono sempre più grandi man mano che si procede da sinistra verso destra. Ogni numero è maggiore di tutti i suoi precedenti, quelli che stanno alla sua sinistra, e minore di tutti i suoi successivi, quelli che stanno alla sua destra. Tra i numeri naturali esiste quindi una *relazione d'ordine*, che si rappresenta con i simboli di *disuguaglianza* $\leqslant$ (si legge "minore o uguale a") e $\geqslant$ (si legge "maggiore o uguale a") o *disuguaglianza stretta* $<$ (si legge "minore di") e $>$ (si legge "maggiore di"). Grazie a questo ordinamento, è sempre possibile confrontare due numeri naturali qualsiasi.

Legge 1.1 (di tricotomia)**.** *Dati due numeri naturali* n *e* m *vale sempre una delle seguenti tre relazioni:* $n < m, \quad n = m, \quad n > m.$

1.4 Operazioni con i numeri naturali

1.4.1 Addizione e moltiplicazione di numeri naturali

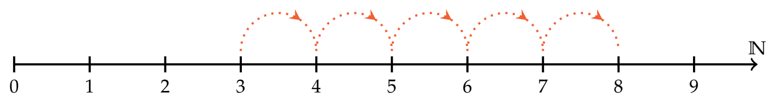
Tra i numeri naturali è definita l'operazione di addizione come segue:

Definizione 1.1. Dati due numeri naturali n e m, detti *addendi*, l'operazione di *addizione* associa ai due addendi un terzo numero s, detto *somma*, che si ottiene partendo da n e procedendo verso i successivi di n tante volte quante indica il secondo addendo m.

L'operazione di addizione è indicata con il simbolo "+":

$$\boxed{n + m = s.}$$

Ad esempio, se vogliamo eseguire la somma $3 + 5$, dobbiamo partire da 3 e contare 5 numeri successivi:



Definizione 1.2. Dati due numeri naturali n, m, detti *fattori*, l'operazione di *moltiplicazione* associa ai due fattori un terzo numero p, detto *prodotto*, che si ottiene sommando n addendi tutti uguali a m.

L'operazione di moltiplicazione può essere indicata con diversi simboli:

$$\boxed{n \times m = p, \qquad n \cdot m = p, \qquad n * m = p.}$$

Per eseguire la moltiplicazione $4 \cdot 2$, che possiamo leggere "quattro volte due", dobbiamo addizionare 4 volte 2, cioè $2 + 2 + 2 + 2$, e otteniamo 8.

Le operazioni di addizione e moltiplicazione si dicono *operazioni interne* all'insieme dei numeri naturali, poiché, utilizzando numeri naturali, esse danno sempre come risultato un numero naturale.

✍ *Esercizio proposto:* 1.1

1.4.2 Sottrazione e divisione di numeri naturali

Diamo la seguente definizione:

Definizione 1.3. Dati due numeri naturali n e m, il primo detto *minuendo* e il secondo *sottraendo*, si dice *differenza* il numero naturale d, se esiste, che aggiunto ad m dà come somma n.

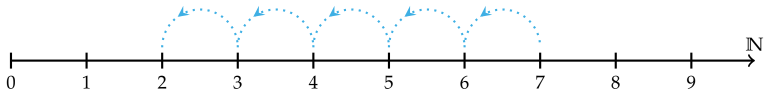
L'operazione di sottrazione è indicata con il simbolo "−":

$$\boxed{n - m = d.}$$

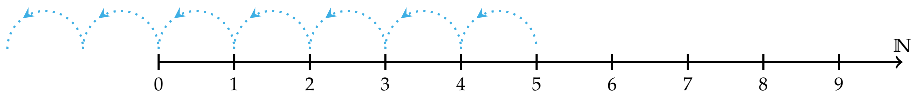
Per esempio, $7 - 5 = 2$ perché $5 + 2 = 7$.

Non esiste invece la differenza tra 5 e 7, in quanto nessun numero naturale aggiunto a 7 può dare 5.

Ritornando alla rappresentazione dei numeri naturali sulla semiretta orientata, la differenza tra i numeri 7 e 5 si può trovare partendo da 7 e procedendo a ritroso di 5 posizioni.



Diventa allora evidente perché non è possibile trovare la differenza tra 5 e 7, infatti partendo dal 5 non è possibile andare indietro di 7 posizioni, poiché non è possibile andare oltre il numero 0 che è il più piccolo dei numeri naturali.



Si può osservare allora che in $\mathbb{N}$ la sottrazione $a - b$ è possibile solo se b è più piccolo o al più uguale ad a.

Definizione 1.4. Dati due numeri naturali n e m, con $m \neq 0$, il primo detto *dividendo* e il secondo *divisore*, si dice *quoziente esatto* (o *quoto*) un numero naturale q, se esiste, che moltiplicato per m dà come prodotto n.

L'operazione di divisione può essere indicata con diversi simboli:

$$\boxed{n \div m = q, \qquad n : m = q, \qquad n/m = q.}$$

Se il quoziente esiste, il numero m si dice *divisore* di n oppure si dice che n è *divisibile* per m.

Definizione 1.5. Un numero naturale m si dice *multiplo* di un numero naturale n se esiste un numero p che moltiplicato per n dà m, cioè $m = n \cdot p$.

Esempio 1.1. Divisori e multipli.

- ➡ $12 : 3 = 4$ perché $3 \cdot 4 = 12$. Quindi, 12 è divisibile per 3; 3 è un divisore di 12; 12 è un multiplo di 3;
- ➡ 20 è divisibile per 4 perché $20 : 4 = 5$;
- ➡ 7 è divisore di 35 perché $35 : 7 = 5$;
- ➡ 6 è multiplo di 3 perché $6 = 2 \cdot 3$;
- ➡ 5 non è multiplo di 3 poiché non esiste alcun numero naturale che moltiplicato per 3 dà 5.

❑ **Osservazione** In $\mathbb{N}$ la divisione tra due numeri m e n, è possibile solo se m è multiplo di n.

✍ *Esercizio proposto:* 1.2

Come hai potuto notare dagli esercizi precedenti la divisione tra due numeri naturali non è sempre possibile. Con i numeri naturali però è sempre possibile eseguire la divisione con il resto.

Esempio 1.2. Nella divisione con resto tra 25 e 7 si ha quoziente 3 (infatti $7 \cdot 3 = 21$, mentre $7 \cdot 4 = 28$ supera il dividendo) e resto 4 (infatti $25 - 21 = 4$). Pertanto si può scrivere $25 = 7 \cdot 3 + 4$.

$$\begin{array}{r|l} \text{dividendo} \longrightarrow 25 & 7 \longleftarrow \text{divisore} \\ 21 & 3 \longleftarrow \text{quoziente} \\ \hline \text{resto} \longrightarrow 4 & \end{array}$$

Definizione 1.6. Dati due numeri naturali n e m, con $m \neq 0$, si dice *quoziente* tra n e m, il più grande numero naturale q che moltiplicato per m dà un numero minore o uguale a n. Si dice *resto* della divisione tra n e m la differenza r tra il dividendo n e il prodotto tra il divisore m e il quoziente q.

In simboli:

$$\boxed{n = m \cdot q + r, \qquad r = n - m \cdot q.}$$

Esempio 1.3. Divisione con resto.

- ➡ $0 : 2 = 0$;
- ➡ $1 : 2 = 0$ con resto 1;
- ➡ $5 : 2 = 2$ con resto 1.

La divisione con il resto ci permette di risolvere situazioni in cui dobbiamo dividere o raggruppare persone o altri oggetti indivisibili.

Esempio 1.4. Dovendo raggruppare 321 studenti in classi da 30 alunni, dividiamo $312 : 20 = 10$ con resto 12. I rimanenti 12 alunni possono formare un'altra classe oppure possono essere distribuiti nelle altre classi.

❑ **Osservazione** Nella definizione di quoziente abbiamo sempre richiesto che il divisore sia diverso da zero. In effetti, se il divisore è 0 non c'è nessun numero che moltiplicato per 0 ci possa dare un dividendo diverso da zero. Per esempio, nella divisione $5 : 0$ dobbiamo ottenere un numero che moltiplicato per 0 dia 5; ciò non è possibile in quanto qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0. Invece nella divisione $0 : 0$ un qualsiasi numero è adatto come quoziente, infatti qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0 come prodotto.

Nel linguaggio matematico diciamo che una divisione del tipo $n : 0$, con $n \neq 0$, è *impossibile*; mentre la divisione $0 : 0$ è *indeterminata*.

Definizione 1.7. Dati due numeri naturali n e m, con $m \neq 0$, la *divisione intera* tra n e m è l'operazione che associa il più grande numero naturale q (il quoziente) per il quale si ha $q \cdot m \leqslant n$.

La divisione intera si indica con “div”:

$$\boxed{n \operatorname{div} m = q \quad \text{(con resto } r\text{).}}$$

Esempio 1.5. L’operazione divisione intera.

- $0 \operatorname{div} 5 = 0$;
- $9 \operatorname{div} 2 = 4$;
- $10 \operatorname{div} 3 = 3$;
- $16 \operatorname{div} 9 = 1$;
- $3 \operatorname{div} 5 = 0$;
- $3 \operatorname{div} 0 =$ non si può fare.

Definizione 1.8. Dati due numeri naturali n e m, con $m \neq 0$, l’operazione che restituisce il resto della divisione intera tra n e m si chiama *modulo* di n rispetto a m.

L’operazione di modulo viene indicata con “mod”:

$$\boxed{n \bmod m = r \quad \text{(dove } r \text{ è il resto di } n \operatorname{div} m\text{).}}$$

Esempio 1.6. L’operazione modulo.

- $0 \bmod 5 = 0$;
- $9 \bmod 5 = 4$;
- $10 \bmod 5 = 0$;
- $3 \bmod 5 = 3$;
- $11 \bmod 5 = 1$;
- $3 \bmod 0 =$ non si può fare.

✍ *Esercizi proposti:* 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6

Ripassiamo l’algoritmo della divisione intera per numeri a più cifre; questa procedura risulterà particolarmente utile nel seguito.

$$\begin{array}{rr|l}
 & 3\,2\,7 & 2\,3 \\ \cline{3-3}
- & 2\,3 & 1\,4 \\ \cline{2-2}
 & 9\,7 & \\
- & 9\,2 & \\ \cline{2-2}
 & 5 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|l}
 & 1\,3\,2\,9 & 1\,0\,7 \\ \cline{3-3}
- & 1\,0\,7 & 1\,2 \\ \cline{2-2}
 & 2\,5\,9 & \\
- & 2\,1\,4 & \\ \cline{2-2}
 & 4\,5 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|l}
 & 1\,2\,5\,9\,4\,3 & 1\,7\,1 \\ \cline{3-3}
- & 1\,1\,9\,7 & 7\,3\,6 \\ \cline{2-2}
 & 6\,2\,4 & \\
- & 5\,1\,3 & \\ \cline{2-2}
 & 1\,1\,1\,3 & \\
- & 1\,0\,2\,6 & \\ \cline{2-2}
 & 8\,7 &
\end{array}$$

(a) (b) (c)

a) $327 : 23 =$ quoziente 14 e resto 5;
b) $1\,329 : 107 =$ quoziente 12 e resto 45;
c) $125\,943 : 171 =$ quoziente 736 e resto 87.

✍ *Esercizio proposto:* 1.7

1.5 Proprietà delle operazioni

1.5.1 Proprietà commutativa

Un'operazione ($\diamond$) gode della proprietà *commutativa* se, cambiando l'ordine dei numeri sui quali essa va eseguita, il risultato non cambia.

$$\boxed{a \diamond b = b \diamond a.}$$

La proprietà commutativa *vale* per le seguenti operazioni:

addizione $a + b = b + a$. Es. $3 + 5 = 5 + 3 = 8$;
moltiplicazione $a \cdot b = b \cdot a$. Es. $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$.

La proprietà commutativa *non vale* per le seguenti operazioni:

sottrazione $a - b \neq b - a$. Es. $8 - 3 = 5 \neq 3 - 8$ non si può fare in $\mathbb{N}$;
divisione $a : b \neq b : a$. Es. $8 : 4 = 2 \neq 4 : 8$ non si può fare in $\mathbb{N}$;
divisione intera $a \operatorname{div} b \neq b \operatorname{div} a$. Es. $17 \operatorname{div} 5 = 3 \neq 5 \operatorname{div} 17 = 0$;
modulo $a \bmod b \neq b \bmod a$. Es. $9 \bmod 2 = 1 \neq 2 \bmod 9 = 2$;
potenza $a^b \neq b^a$. Es. $3^2 = 9 \neq 2^3 = 8$.

1.5.2 Proprietà associativa

Un'operazione ($\diamond$) gode della proprietà *associativa* se, presi arbitrariamente tre numeri legati da due operazioni, è indifferente da quale operazione si inizia, in quanto il risultato che si ottiene è sempre lo stesso.

$$\boxed{(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c).}$$

La proprietà associativa *vale* per le seguenti operazioni:

addizione $(a + b) + c = a + (b + c)$. Es. $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2) = 10$;
moltiplicazione $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Es. $(3 \cdot 5) \cdot 2 = 3 \cdot (5 \cdot 2) = 30$.

La proprietà associativa *non vale* per le seguenti operazioni:

sottrazione $(a - b) - c \neq a - (b - c)$. Es. $(10 - 5) - 2 = 3 \neq 10 - (5 - 2) = 7$;
divisione $(a : b) : c \neq a : (b : c)$. Es. $(16 : 4) : 2 = 2 \neq 16 : (4 : 2) = 8$;
divisione intera $(a \operatorname{div} b) \operatorname{div} c \neq a \operatorname{div}(b \operatorname{div} c)$.
Es. $(17 \operatorname{div} 5) \operatorname{div} 2 = 1 \neq 17 \operatorname{div}(5 \operatorname{div} 2) = 8$;
modulo $(a \bmod b) \bmod c \neq a \bmod (b \bmod c)$.
Es. $(17 \bmod 7) \bmod 1 = 1 \neq 17 \bmod (7 \bmod 2) = 0$.

1.5.3 Elemento neutro

Un'operazione ($\diamond$) ha un *elemento neutro* n se componendo n con qualsiasi altro numero lo lascia invariato, sia quando il numero è a destra, sia quando è a sinistra dell'operatore.

$$\boxed{a \diamond n = n \diamond a = a.}$$

L'elemento neutro dell'addizione è 0, sia che si trovi a destra che a sinistra:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

L'elemento neutro della moltiplicazione è 1, sia che si trovi a destra sia che si trovi a sinistra:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

La divisione ha l'elemento neutro a destra, che è 1, ma non ha elemento neutro a sinistra:

$$a : 1 = a \quad (1 : a \neq a, \text{ se } a \neq 1).$$

In maniera analoga, anche la sottrazione ha l'elemento neutro 0 solo a destra:

$$a - 0 = a \quad (0 - a \neq a, \text{ se } a \neq 0).$$

1.5.4 Proprietà distributiva

La proprietà *distributiva* coinvolge due operazioni differenti ($\diamond$ e $\star$). La proprietà distributiva di $\star$ rispetto a $\diamond$ è espressa in simboli:

$$\boxed{\begin{array}{l} a \star (b \diamond c) = a \star b \diamond a \star c \\ (a \diamond b) \star c = a \star c \diamond b \star c. \end{array}}$$

Proprietà distributiva della moltiplicazione

Rispetto all'addizione Moltiplicare il risultato dell'addizione di più numeri per un altro numero dà lo stesso risultato che moltiplicare ogni addendo per il fattore considerato e addizionare i prodotti ottenuti. Questa proprietà vale sia se la somma è a destra sia se è a sinistra.

$$\begin{array}{ll} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c & \text{Es. } 3 \cdot (2 + 4) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 18 \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c & \text{Es. } (2 + 4) \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 18. \end{array}$$

Rispetto alla sottrazione In maniera analoga:

$$\begin{array}{ll} a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c & \text{Es. } 6 \cdot (10 - 4) = 6 \cdot 10 - 6 \cdot 4 = 36 \\ (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c & \text{Es. } (10 - 4) \cdot 6 = 10 \cdot 6 - 4 \cdot 6 = 36. \end{array}$$

Proprietà distributiva della divisione

Rispetto all'addizione Solo se le somme sono a sinistra:

$$(a + b + c) : d = a : d + b : d + c : d \quad \text{Es. } (20 + 10 + 5) : 5 = 20 : 5 + 10 : 5 + 5 : 5 = 7.$$

Verifichiamo con un esempio che non vale la proprietà distributiva se le somme si trovano a destra: $120 : (3 + 5)$ Eseguendo prima l'operazione tra parentesi si ottiene correttamente $120 : 8 = 15$. Se si prova ad applicare la proprietà distributiva si ottiene $120 : 3 + 120 : 5 = 40 + 24 = 64$. Il risultato corretto è il primo.

Rispetto alla sottrazione Solo se la sottrazione è a sinistra:

$$(a-b):c = a:c-b:c \quad \text{Es. } (20-10):5 = 20:5-10:5 = 4-2 = 2.$$

Se, però, la sottrazione è a destra:

$$120:(5-3) = 120:2 = 60 \neq 120:5-120:3 = 24-40 = \quad \text{non si può fare in } \mathbb{N}.$$

Legge 1.2 (Annullamento del Prodotto)**.** *Il prodotto di due o più numeri naturali si annulla se e solo se almeno uno dei fattori è nullo.*

Il matematico Carl Friedrich Gauss[2] fu un bambino prodigio. Si racconta che a nove anni il suo insegnante ordinò di fare la somma dei numeri da 1 a 100. Poco dopo Gauss diede la risposta esatta sorprendendo il suo insegnante. Probabilmente egli aveva scritto in una riga i numeri da 1 a 100 e nella riga sottostante i numeri da 100 a 1, notando che ogni colonna dava per somma 101. Quindi, anziché sommare uno ad uno i numeri da 1 a 100, moltiplicando 100 per 101 e dividendo il risultato per 2, Gauss aveva ottenuto rapidamente la risposta: $100 \cdot 101 : 2 = 5\,050$.

1	2	3	4	5	...	97	98	99	100
100	99	98	97	96	...	4	3	2	1
101	101	101	101	101	...	101	101	101	101

✍ *Esercizi proposti:* 1.8, 1.9

1.6 Potenza

La *potenza* di un numero naturale è una moltiplicazione che ha tutti i fattori uguali.

Definizione 1.9. Dati due numeri naturali a e n, con $n > 1$, il primo detto *base* ed il secondo *esponente*, la potenza di a con esponente n è il numero p che si ottiene moltiplicando fra loro n fattori tutti uguali ad a. Si scrive $a^n = p$ e si legge "a *elevato a* n *uguale a* p".

Per esempio, $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

$$\underset{\text{base}}{5}^{\overset{\text{esponente}}{3}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ volte}} = \underset{\text{potenza}}{125}$$

Quindi, in simboli

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}}$$

[2]matematico, astronomo e fisico tedesco (1777 - 1855).

Per completezza, alla definizione precedente vanno aggiunti i seguenti casi particolari:

$$\boxed{\begin{aligned} &a^1 = a, \\ &a^0 = 1 \quad \text{se } a \neq 0, \\ &0^0 = \text{non ha significato.} \end{aligned}}$$

Queste definizioni trovano giustificazione nelle proprietà delle potenze.

1.6.1 Proprietà delle potenze

I Il prodotto di due potenze con la stessa base è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$
$$2^5 \cdot 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11}.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ volte}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a)}_{n+m \text{ volte}} = a^{n+m}.$$

II Il quoziente di due potenze con la stessa base, la prima con esponente maggiore o uguale all'esponente della seconda, è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

$$\boxed{a^n : a^m = a^{n-m}}$$
$$4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$a^n : a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} : \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ volte}} \tag{1.1}$$
$$= \underbrace{(a : a) \cdot (a : a) \cdot \ldots \cdot (a : a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n-m \text{ volte}} \tag{1.2}$$
$$= a^{n-m}. \tag{1.3}$$

Il passaggio dalla 1.1 alla 1.2 avviene per via della proprietà invariantiva della divisione.

III La potenza di una potenza è uguale a una potenza che ha la base della prima potenza e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$
$$(6^2)^5 = 6^{2 \cdot 5} = 6^{10}.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$(a^n)^m = \overbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}^{m \text{ volte}} = \overbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}}}^{m \text{ volte}} = a^{n \cdot m}.$$

IV Il prodotto di potenze con lo stesso esponente è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori.

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

$$(2 \cdot 5)^8 = 2^8 \cdot 5^8.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ volte}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ volte}} = a^n \cdot b^n.$$

V La potenza di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze dei singoli fattori.

$$\boxed{(a : b)^n = a^n : b^n}$$

$$(4 : 2)^8 = 4^8 : 2^8.$$

Le definizioni dei casi particolari di potenze si giustificano nel seguente modo:

$$a^0 = a^{5-5} = a^5 : a^5 = 1,$$
$$a^1 = a^{5-4} = a^5 : a^4 = a.$$

Alla potenza 0^0 non si assegna nessun valore perché applicando la definizione di a^0 si dovrebbe avere 1; applicando la definizione 0^a si dovrebbe avere 0.

✍ *Esercizi proposti:* 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14

1.6.2 Cenni sull'estrazione di radice

L'operazione inversa dell'elevazione a potenza è l'estrazione di *radice*.

Definizione 1.10. Dati due numeri naturali a e n (con $n > 1$) si definisce *radice* n-esima di a il numero r tale che moltiplicando tra loro n fattori tutti uguali a r si ottiene come risultato a.

In simboli:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = r.}$$

Per esempio $\sqrt[3]{64} = 4$ poiché $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Esempio 1.7. L'operazione estrazione di radice

- ➡ $\sqrt[5]{32} = 2$, infatti $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.
- ➡ $\sqrt[3]{125} = 5$, infatti $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.
- ➡ $\sqrt[4]{81} = 3$, infatti $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.
- ➡ $\sqrt[7]{1} = 1$, infatti $1^7 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

Particolare importanza riveste la radice con $n = 2$, detta anche *radice quadrata*. Ad esempio, la radice quadrata di 25 è 5, cioè $\sqrt[2]{25} = 5$, poiché infatti $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$, e anche $\sqrt[2]{49} = 7$ ($7^2 = 49$). L'uso della radice quadrata è talmente predominante in matematica rispetto a quelle di ordine superiore (quelle con $n > 2$) che nel caso in cui l'indice n della radice non sia specificato si sottintende il valore 2: cioè $\sqrt{9} = \sqrt[2]{9} = 3$.

1.7 Numeri Primi

Osserva il seguente schema

$$\boxed{18} \xrightarrow[\text{è divisibile per}]{\text{è multiplo di}} \boxed{6} \xrightarrow[\text{è divisore di}]{\text{è sottomultiplo di}} \boxed{18}$$

In esso sono descritte alcune caratteristiche del numero 18 e i suoi legami con il numero 6.

Definizione 1.11. Chiamiamo *divisore proprio* di un numero un suo divisore diverso dal numero stesso e dall'unità.

Osserva ora il seguente schema

$$\boxed{31} \xrightarrow[\text{è divisibile per}]{\text{è multiplo di}} \boxed{\ldots} \xrightarrow[\text{è divisore di}]{\text{è sottomultiplo di}} \boxed{31}$$

Nella casella centrale, al posto dei puntini, puoi inserire soltanto i numeri 31 o 1.

Definizione 1.12. Un numero $p > 1$ si dice *primo* se è divisibile solo per se stesso e per l'unità. Un numero naturale maggiore di 1 non primo si dice *composto*.

Per come sono stati definiti i numeri primi e quelli composti si ha:

0 non è primo né composto;	5 è primo;	10 è composto;
1 non è primo né composto;	6 è composto;	11 è primo;
2 è primo;	7 è primo;	12 è composto;
3 è primo;	8 è composto;	13 è primo.
4 è composto;	9 è composto;	...

Esempio 1.8. Per verificare se 31 è primo, calcolo il valore approssimato $\sqrt{31} \simeq 5{,}5$ e verifico se è divisibile per i numeri primi $\leqslant 5$, cioè 2, 3 e 5. 31 non è divisibile per 2 in quanto è dispari, non è divisibile per 3 poiché la somma delle sue cifre è 4 (che non è divisibile per 3) e non è divisibile per 5 in quanto non finisce per 0 o 5 (sezione 1.8). Quindi 31 è primo.

Esempio 1.9. Per verificare se 59 è un numero primo calcolo $\sqrt{59} \simeq 7{,}6$ e verifico se 59 è divisibile per un numero primo $\leqslant 7$, cioè per 2, 3, 5 e 7. Eseguendo le divisioni si vede che 59 non è divisibile per nessuno di questi numeri, quindi è primo.

❑ **Osservazione** Un numero è primo quando non è divisibile per nessun numero primo compreso tra 2 e la radice quadrata del numero stesso.

✍ *Esercizi proposti:* 1.15, 1.16

1.8 Criteri di divisibilità

Per verificare se un numero è divisibile per i primi numeri interi si possono applicare i seguenti criteri di divisibilità.

Divisibilità per 2 Un numero è divisibile per 2 se e solo se la sua ultima cifra, quella delle unità, è un numero pari, cioè è 0, 2, 4, 6, 8.

- 1 236 finisce per 6 quindi è divisibile per 2;
- 109 230 finisce per 0 quindi è divisibile per 2;
- 10 923 finisce per 3 quindi non è divisibile per 2.

Divisibilità per 3 Un numero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle cifre che lo compongono è divisibile per 3.

- 24 è divisibile per 3, infatti la somma delle sue cifre è $2+4=6$, dato che 6 è divisibile per 3 anche 24 è divisibile per 3;
- 1 236 è divisibile per 3, infatti la somma delle sue cifre è $1+2+3+6=12$; 12 è divisibile per 3 dato che la somma delle sue cifre è $1+2=3$, quindi anche 1 236 è divisibile per 3;
- 31 non è divisibile per 3, infatti la somma delle sue cifre è $3+1=4$, dato che 4 non è divisibile per 3 neanche 31 è divisibile per 3.

Divisibilità per 5 Un numero è divisibile per 5 se la sua ultima cifra è 0 o 5.

- 1 230 finisce per 0 quindi è divisibile per 5;
- 59 235 finisce per 5 quindi è divisibile per 5;
- 109 253 finisce per 3 quindi non è divisibile per 5;

Divisibilità per 7 Un numero (maggiore di 10) è divisibile per 7 se la differenza (in valore assoluto[3]) fra il valore ottenuto dal numero stesso togliendo la cifra delle unità e il doppio della cifra delle unità è 7 o un multiplo di 7.

- 252 è divisibile per 7, infatti $|25-2\cdot 2|=21$ è multiplo di 7;
- 49 è divisibile per 7, infatti $|4-2\cdot 9|=14$ è multiplo di 7;
- 887 non è divisibile per 7, infatti $|88-2\cdot 7|=74$ non è divisibile per 7.

Divisibilità per 11 Un numero è divisibile per 11 se e solo se la differenza, in valore assoluto, fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari è 0, 11 o un multiplo di 11.

- 253 è divisibile per 11, infatti $|5-(2+3)|=0$;
- 9 482 è divisibile per 11, infatti $|(9+8)-(4+2)|=11$;
- 887 non è divisibile per 11, infatti $|8-(8+7)|=7$.

✍ *Esercizi proposti:* 1.17, 1.18

1.9 Scomposizione in fattori primi

Scomporre in fattori (o fattorizzare) un numero significa scriverlo come prodotto di altri numeri naturali.

[3] il *valore assoluto* è trattato a pagina 32.

Teorema 1.3 (fondamentale dell'aritmetica). *Ogni numero naturale $n > 1$ si può scrivere in modo unico come prodotto di numeri primi.*

Esempio 1.10. Scomporre in fattori primi il numero 630.

630	2	630 è divisibile per 2 perché l'ultima cifra è pari;
315	3	315 è divisibile per 3 (la somma delle sue cifre è 9, divisibile per 3);
105	3	105 è divisibile per 3 (la somma delle sue cifre è 6, divisibile per 3);
35	5	35 è divisibile per 5 perché l'ultima cifra è 5;
7	7	7 è un numero primo.
1		

$$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

In generale, un numero può essere scomposto in fattori in più modi. Per esempio, $12 = 3 \cdot 4$, ma anche $12 = 6 \cdot 2$. Il teorema fondamentale dell'aritmetica ci assicura che, se si scompone un numero in fattori primi, questa scomposizione è unica, a meno dell'ordine con cui si scrivono i fattori. Tornando all'esempio precedente $12 = 2^2 \cdot 3$ è l'unico modo in cui il 12 si può scomporre in fattori primi, a meno che non si scambino di posto i fattori $12 = 3 \cdot 2^2$.

I numeri primi sono quindi i mattoni fondamentali dell'aritmetica, poiché gli altri numeri naturali possono essere ottenuti, in maniera univoca, come prodotto di primi.

Sebbene al crescere dei valori considerati i numeri primi diventino sempre più radi, essi sono comunque infiniti, come affermò Euclide[4] con il seguente teorema che porta il suo nome:

Teorema 1.4 (di Euclide). *I numeri primi sono infiniti.*

✍ *Esercizi proposti:* 1.19, 1.20

1.9.1 Numeri primi e crittografia

Il problema legato alla scomposizione in fattori primi è di notevole interesse per i matematici, poiché non è ancora stato individuato un meccanismo che permette di stabilire se un numero sia primo o meno[5], se non quello di provare a dividerlo per tutti i numeri minori o uguali alla sua radice quadrata, procedura che diventa sempre più lunga man mano che le cifre che compongono il numero da verificare aumentano. Per questo motivo l'utilizzo di valori che siano il prodotto di numeri primi con un numero elevato di cifre è ciò che sta alla base della moderna crittografia, ovvero dei sistemi per la cifratura dei messaggi.

Consideriamo un semplice esempio che può chiarire come funziona il meccanismo di base per inviare messaggi segreti.

Alice deve inviare la sua password, la parola "BACI", a suo fratello Bruno. Alice trasforma la parola in numeri secondo la semplice regola A=1, B=2, C=3, I=9 (assegnando ad ogni lettera il numero cardinale corrispondente alla sua posizione nell'alfabeto). Il messaggio diventa così 2 139. Alice moltiplica questo numero per un numero primo "segreto" (che conosce solo

[4] matematico e scienziato della Grecia antica (367 a.C. ca. - 283 a.C.).

[5] si tratta della dimostrazione dell'ipotesi di Riemann, uno dei 7 *Millennium problems* elencati il 24 maggio 2000, ovvero questioni matematiche ad oggi (2014) ancora non dimostrate (tranne una). Vista l'enorme difficoltà nel riuscire nell'intento, il Clay Mathematics Institute ha messo in palio un milione di dollari per la dimostrazione di ognuna di esse (v. http://it.wikipedia.org/wiki/Problemi_per_il_millennio).

lei) 26 417 e ottiene $2\,139 \cdot 26\,417 = 56\,505\,963$ e invia quest'ultimo numero a Bruno. Chiunque intercetti questo numero non è in grado di individuare la password in chiaro.

Quando Bruno riceve il numero 56 505 963 lo moltiplica per un suo numero primo "segreto" (che conosce solo lui) 43 969 ottenendo $5\,650\,593 \cdot 43\,969 = 2\,484\,510\,687\,147$ e lo invia nuovamente ad Alice.

Quando Alice riceve il numero lo divide per il suo numero primo $2\,484\,510\,687\,147 : 26\,417 = 94\,049\,691$ e quindi lo rispedisce a Bruno, A questo punto Bruno divide il numero ricevuto per il suo numero primo segreto ottenendo $94\,049\,691 : 43\,969 = 2\,139$. Conoscendo il meccanismo di codifica (relazione tra i numeri e le lettere dell'alfabeto 2=B, 1=A, 3=C, 9=I) Bruno può dunque ricostruire la password "BACI".

In realtà, i sistemi per lo scambio di messaggi cifrati oggi utilizzati per mezzo dei computer si basano su meccanismi leggermente differenti che evitano il doppio invio di messaggi tra Alice e Bruno. I meccanismi sono essenzialmente due: il primo è detto *a chiave simmetrica*, in cui sia Alice che Bruno condividono il numero segreto con il quale viene cifrato il messaggio e quindi entrambi possono codificarlo e decodificarlo autonomamente; il secondo, un po' più complesso ma che dà le stesse garanzie del doppio invio di messaggi (nessuna condivisione del numero segreto tra gli interlocutori), viene chiamato *a chiave asimmetrica* e si basa sull'utilizzo di un numero segreto ed un numero pubblico da condividere con l'interlocutore.

Va comunque sottolineato il fatto che la robustezza del meccanismo di cifratura sta nella difficoltà intrinseca della fattorizzazione di numeri molto grandi. Ciò non significa che i messaggi rimarranno segreti per sempre: prima o poi saranno decifrati visto che la velocità di calcolo dei computer è sempre in aumento. Per cercare di rendere il processo di decifratura più arduo si possono scegliere chiavi di cifratura composte da numeri primi sempre più grandi.

1.10 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo

Definizione 1.13. Il *massimo comune divisore* di numeri naturali a e b è il più grande tra tutti i divisori comuni ad a e b e viene indicato con $\text{MCD}(a, b)$.

Applicando la definizione, il massimo comune divisore tra 18 e 12 si ottiene prendendo tutti i divisori di 18 e di 12:

$$\begin{array}{ll} \text{divisori di 18:} & 18, 9, 6, 3, 2, 1; \\ \text{divisori di 12:} & 12, 6, 4, 2, 1. \end{array}$$

I divisori comuni sono 6, 2 e 1. Il più grande dei divisori comuni è 6, quindi $\text{MCD}(18, 12) = 6$.

Per calcolare il massimo comune divisore di due o più numeri si può applicare la seguente procedura:

Procedura 1.5. *Calcolo del* MCD *di due o più numeri naturali:*

a) si scompongono i numeri in fattori primi;
b) si moltiplicano tra loro i fattori comuni, presi una sola volta e con il minore esponente.

Esempio 1.11. Calcolare $\text{MCD}(60, 48, 36)$.

Si scompongono in fattori i singoli numeri $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $48 = 2^4 \cdot 3$ e $36 = 2^2 \cdot 3^2$. I fattori comuni sono 2 e 3; il 2 compare con l'esponente minimo 2 ed il 3 compare con esponente minimo 1.

Pertanto $\text{MCD}(60, 48, 36) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Esempio 1.12. Calcolare $\text{MCD}(60, 120, 90)$.

Si scompongono in fattori i singoli numeri $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ e $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. I fattori in comune sono 2, 3 e 5. L'esponente minino è 1 per tutti.

Pertanto $\text{MCD}(60, 120, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Definizione 1.14. Due numeri a e b si dicono *primi tra loro* o *coprimi* se $\text{MCD}(a, b) = 1$.

Esempio 1.13. Numeri primi tra loro:

- 12 e 25 sono primi tra loro. Infatti il $\text{MCD}(12, 25) = 1$ dato che nelle loro scomposizioni in fattori non si hanno fattori comuni: $12 = 2^2 \cdot 3$ e $25 = 5^2$;
- 35 e 16 sono primi tra loro. Infatti $35 = 5 \cdot 7$ e $16 = 2^4$. I due numeri non hanno divisori comuni, quindi il loro $\text{MCD} = 1$;
- 11 e 19 sono primi tra loro infatti il $\text{MCD}(11, 19) = 1$ dato che 11 e 19 sono entrambi numeri primi;
- 12 e 15 non sono primi tra di loro in quanto hanno 3 come divisore comune.

Definizione 1.15. Il *minimo comune multiplo* di due numeri naturali a e b si indica con $\text{mcm}(a, b)$ ed è il più piccolo tra tutti i multipli comuni di a e di b.

Per calcolare il minimo comune multiplo tra 6 e 15 applicando la definizione occorre calcolare i primi multipli dei due numeri:

$$\begin{array}{ll} \text{multipli di 6:} & 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, \ldots; \\ \text{multipli di 15:} & 15, 30, 45, 60, 75, 90, \ldots \end{array}$$

Sono multipli comuni $30, 60, 90, \ldots$ Il più piccolo di essi è 30, ovvero $\text{mcm}(6, 15) = 30$.

Per calcolare il minimo comune multiplo tra due o più numeri si può applicare la seguente procedura:

Procedura 1.6. *Calcolo del* mcm *di due o più numeri naturali:*

a) si scompongono i numeri in fattori primi;
b) si moltiplicano tra loro i fattori comuni e non comuni, presi una sola volta, con il maggiore esponente.

Esempio 1.14. Calcolare il $\text{mcm}(60, 48, 36)$.

Scomponendo in fattori i numeri si ha $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $48 = 2^4 \cdot 3$ e $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Tutti i fattori comuni e non comuni presi una sola volta con l'esponente più grande con cui compaiono sono: 2^4, 3^2 e 5.

Quindi il mcm è $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$.

Esempio 1.15. Calcolare il $\text{mcm}(20, 24, 450)$.

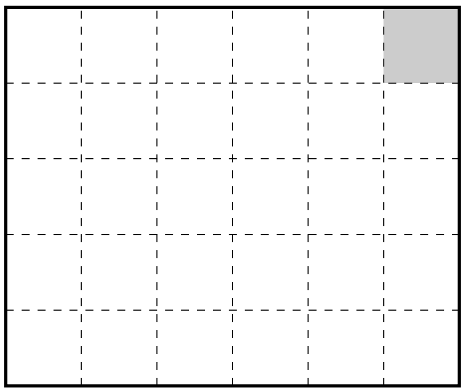
Scomponendo in fattori si ha: $20 = 2^2 \cdot 5$, $24 = 2^3 \cdot 3$ e $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Moltiplicando i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente si ha $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1\,800$.

Esempio 1.16. Si vuole pavimentare una stanza a pianta rettangolare di 315 cm per 435 cm con mattonelle quadrate le più grandi possibili, senza sprecarne alcuna. Quali sono le dimensioni delle mattonelle? Quante mattonelle sono necessarie?

Poiché le mattonelle devono essere quadrate devono avere il lato tale che entri un numero intero di volte sia nel 315 sia nel 435, pertanto la dimensione delle mattonelle deve essere un divisore comune di 315 e di 435. Poiché è richiesto che le mattonelle siano quanto più grandi possibile, la dimensione deve essere il massimo divisore comune.

$$
\begin{array}{r|l}
315 & 3 \\
105 & 3 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
435 & 3 \\
145 & 5 \\
29 & 29 \\
 & \\
 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
315 &= 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \\
435 &= 3 \cdot 5 \cdot 29
\end{aligned}
$$



La soluzione del problema è data quindi dal $\text{MCD}(315, 435) = 3 \cdot 5 = 15$. Le mattonelle devono avere il lato di 15 cm. Ci vogliono $435 : 15 = 29$ mattonelle per ricoprire il lato di 435 cm e $315 : 15 = 21$ mattonelle per ricoprire il lato da 315 cm. In tutto occorrono $29 \cdot 21 = 609$ mattonelle.

Esempio 1.17. Alla fermata dei pulman l'autobus rosso passa ogni 20 minuti, l'autobus verde passa ogni 30 minuti e il pulman blu ogni 45 minuti. Se i pulman rosso, verde e blu erano insieme alla fermata delle 8:00, quando si troveranno di nuovo insieme alla stessa fermata?

Gli autobus si incontrano nei minuti che sono i multipli comuni di 20, 30 e 45. quindi alle 11:00, alle 14:00, alle 17:00 ecc. La prima volta che si incontrano sarà data dal minimo comune multiplo di 20, 30 e 45, quindi dopo 180 minuti.

✍ *Esercizi proposti:* 1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.25, 1.26

1.11 Espressioni numeriche

Nel linguaggio comune alcune frasi possono risultare ambigue. Per esempio «Luca ha detto Mario è stato promosso» può avere due significati diversi a seconda di come si inserisce la punteggiatura: scrivendo «Luca, ha detto Mario, è stato promosso» significa che è stato promosso Luca; scrivendo «Luca ha detto: Mario è stato promosso» significa che è stato promosso Mario.

Anche nella matematica, quando abbiamo più operazioni da eseguire, dobbiamo chiarire l'ordine con cui esse devono essere eseguire. Per esempio, l'espressione $2+3\cdot 4$ può valere 14 oppure 20, infatti:

- eseguendo per prima la moltiplicazione si ha $2+3\cdot 4=2+12=14$;
- eseguendo per prima l'addizione si ha $2+3\cdot 4=5\cdot 4=20$.

Per eliminare queste ambiguità sono state fissate alcune regole che bisogna rispettare nell'esecuzione dei calcoli. Intanto diamo la seguente definizione:

Definizione 1.16. Un'*espressione aritmetica* è una successione di operazioni da eseguire su più numeri.

1.11.1 Regole per semplificare le espressioni

I Se un'espressione contiene solo addizioni, le operazioni si possono eseguire in qualsiasi ordine, grazie alla proprietà associativa dell'addizione.

Esempio 1.18. Semplificare l'espressione $3+2+5$.

- $3+2+5=5+5=10$. In questo caso si sono eseguite le operazioni nell'ordine in cui compaiono;
- $3+2+5=3+7=10$. In questo caso si è eseguita per prima l'ultima addizione indicata. Il risultato ottenuto è lo stesso;
- $5+6+15=6+20=26$. In questo caso abbiamo applicato anche la proprietà commutativa.

II Se un'espressione contiene solo moltiplicazioni, le operazioni si possono eseguire in qualsiasi ordine, anche in questo caso grazie alla proprietà associativa della moltiplicazione.

Esempio 1.19. Dovendo moltiplicare $2\cdot 3\cdot 4$ si può procedere in più modi.

- $2\cdot 3\cdot 4=6\cdot 4=24$. In questo caso si è seguito l'ordine in cui compaiono;
- $2\cdot 3\cdot 4=2\cdot 12=24$. In questo caso si è seguito l'ordine opposto; il risultato è lo stesso.

III Se un'espressione, senza parentesi, contiene più sottrazioni, si deve procedere eseguendole nell'ordine in cui sono scritte, la sottrazione infatti non gode né della proprietà associativa né di quella commutativa.

Esempio 1.20. Semplificare l'espressione $10-6-1$.

- $10-6-1=4-1=2$;
- $10-6-1=10-5=5$, errato!

IV Se un'espressione senza parentesi contiene solo addizioni e sottrazioni, le operazioni si devono eseguire nell'ordine con cui sono scritte.

Esempio 1.21. Semplificare l'espressione $12+6-5-1+2$.

$$12+6-5-1+2=18-5-1+2=13-1+2=12+2=14.$$

V Se un'espressione senza parentesi contiene solo divisioni, le operazioni si devono eseguire nell'ordine nel quale sono scritte.

Esempio 1.22. Semplificare l'espressione $360:\ 12:\ 3$.

- ➡ $360:12:3=30:3=10$;
- ➡ $360:12:3=360:4=90$, errato!

VI Se un'espressione senza parentesi contiene addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni e potenze, si eseguono prima le potenze, poi moltiplicazioni e divisioni, rispettando l'ordine con cui sono scritte, e poi addizioni e sottrazioni, rispettando l'ordine.

Esempio 1.23. Semplificare l'espressione $18:2:9+5^2-2\cdot 3^2:3-1$.

$$\begin{aligned}18:2:9+5^2-2\cdot 3^2:3-1&=18:2:9+25-2\cdot 9:3-1\\&=9:9+25-18:3-1\\&=1+25-6-1\\&=26-6-1\\&=20-1\\&=19.\end{aligned}$$

VII Se l'espressione contiene una coppia di parentesi si devono eseguire prima le operazioni racchiuse nelle parentesi, rispettando le regole precedenti; si eliminano poi le parentesi ottienendo un'espressione senza parentesi alla quale devono essere applicate nuovamente le regole precedenti.

Esempio 1.24. Semplificare l'espressione $5\cdot(4+3^2-1)$.

$$\begin{aligned}5\cdot(4+3^2-1)&=5\cdot(4+9-1)\\&=5\cdot(13-1)\\&=5\cdot 12\\&=60.\end{aligned}$$

VIII Se l'espressione contiene più ordini di parentesi, si eseguono per prima le operazioni racchiuse nelle parentesi più interne, rispettando le regole precedenti, si eliminano le parentesi e si procede considerando la nuova espressione. Se ci sono ancora delle parentesi si eseguono per prima le operazioni contenute nelle parentesi più interne, rispettando le regole precedenti, si eliminano le parentesi e si procede considerando la nuova espressione. E così via.

Per facilitare il riconoscimento dei livelli di parentesi, in genere si usano le parentesi tonde $(\ldots)$ per il primo livello (quello più interno), le quadre $[\ldots]$ per il secondo livello e le graffe $\{\ldots\}$ per il terzo livello (quello più esterno). L'uso di parentesi di diverso tipo rende visivamente più evidente l'ordine da seguire nelle operazioni, ma in un'espressione le parentesi possono anche essere soltanto tonde. Ciò accade, per esempio, quando si usano gli strumenti di calcolo elettronico come il computer e la calcolatrice.

Esempio 1.25. $\{[3\cdot 5-(5\cdot 2-4)]\cdot 2\}:[(5\cdot 6):(3\cdot 5)+5:5]-\{(5^2\cdot 4):10-3^2\}+1.$

$$
\begin{aligned}
\{[3\cdot 5-(5\cdot 2-4)]\cdot 2\}:[(5\cdot 6):(3\cdot 5)+5:5]-\{(5^2\cdot 4):10-3^2\}+1\\
&=\{[3\cdot 5-(10-4)]\cdot 2\}:[30:15+5:5]-\{(25\cdot 4):10-3^2\}+1\\
&=\{[3\cdot 5-6]\cdot 2\}:[2+1]-\{100:10-9\}+1\\
&=\{[15-6]\cdot 2\}:3-\{10-9\}+1\\
&=\{9\cdot 2\}:3-\{1\}+1\\
&=\{18\}:3-\{1\}+1\\
&=6-1+1\\
&=6.
\end{aligned}
$$

✍ *Esercizio proposto:* 1.27

1.12 Esercizi

1.12.1 Esercizi dei singoli paragrafi

1.4 - Operazioni con i numeri naturali

1.1. Rispondi alle seguenti domande:

a) Esiste il numero naturale che aggiunto a 3 dà come somma 6?
b) Esiste il numero naturale che aggiunto a 12 dà come somma 7?
c) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 4 dà come prodotto 12?
d) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 5 dà come prodotto 11?

1.2. Inserisci il numero naturale mancante, se esiste:

a) $7 - \ldots = 1$;
b) $3 - 3 = \ldots$;
c) $5 - 6 = \ldots$;
d) $3 - \ldots = 9$;
e) $15 : 5 = \ldots$;
f) $18 : \ldots = 3$;
g) $\ldots : 4 = 5$;
h) $12 : 9 = \ldots$;
i) $36 \cdot \ldots = 9$.

1.3. Vero o falso?

a) $5 : 0 = 0$ V F
b) $0 : 5 = 0$ V F
c) $5 : 5 = 0$ V F
d) $1 : 0 = 1$ V F
e) $0 : 1 = 0$ V F
f) $0 : 0 = 0$ V F
g) $1 : 1 = 1$ V F
h) $1 : 5 = 1$ V F

1.4. Se è vero che $p = n \cdot m$, quali affermazioni sono vere?

a) p è multiplo di n V F
b) p è multiplo di m V F
c) m è multiplo di p V F
d) m è multiplo di n V F
e) p è divisibile per m V F
f) m è divisibile per n V F
g) p è divisore di m V F
h) n è multiplo di m V F

1.5. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a) 6 è un divisore di 3 V F
b) 3 è un divisore di 6 V F
c) 8 è un multiplo di 2 V F
d) 5 è divisibile per 10 V F

1.6. Esegui le seguenti operazioni:

a) $18 \operatorname{div} 3 = \ldots$;
b) $18 \bmod 3 = \ldots$;
c) $20 \operatorname{div} 3 = \ldots$;
d) $20 \bmod 3 = \ldots$;
e) $185 \operatorname{div} 7 = \ldots$;
f) $185 \bmod 7 = \ldots$;
g) $97 \operatorname{div} 5 = \ldots$;
h) $97 \bmod 5 = \ldots$;
i) $240 \operatorname{div} 12 = \ldots$;
j) $240 \bmod 12 = \ldots$.

1.7. Esegui le seguenti divisioni con numeri a più cifre, senza usare la calcolatrice.

a) $311 : 22$;
b) $429 : 37$;
c) $512 : 31$;
d) $629 : 43$;
e) $755 : 53$;
f) $894 : 61$;
g) $968 : 45$;
h) $991 : 13$;
i) $1\,232 : 123$;
j) $2\,324 : 107$;
k) $3\,435 : 201$;
l) $4\,457 : 96$;
m) $5\,567 : 297$;
n) $6\,743 : 311$;
o) $7\,879 : 201$;
p) $8\,967 : 44$;
q) $13\,455 : 198$;
r) $22\,334 : 212$;
s) $45\,647 : 721$;
t) $67\,649 : 128$.

1.5 - Proprietà delle operazioni

1.8. Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o false indicando la proprietà utilizzata:

a) $33 : 11 = 11 : 33$ proprietà .... V F
b) $108 - 72 : 9 = (108 - 72) : 9$ proprietà .... V F
c) $8 - 4 = 4 - 8$ proprietà .... V F
d) $35 \cdot 10 = 10 \cdot 35$ proprietà .... V F
e) $9 \cdot (2 + 3) = 9 \cdot 3 + 9 \cdot 2$ proprietà .... V F
f) $80 - 52 + 36 = (20 - 13 - 9) \cdot 4$ proprietà .... V F
g) $(28 - 7) : 7 = 28 : 7 - 7 : 7$ proprietà .... V F
h) $(8 \cdot 1) : 2 = 8 : 2$ proprietà .... V F
i) $(13 + 11) + 4 = 13 + (11 + 4)$ proprietà .... V F

1.9. Data la seguente operazione tra i numeri naturali $a \circ b = 2 \cdot a + 3 \cdot b$, verifica se è:

a) commutativa, cioè se $a \circ b = b \circ a$;
b) associativa, cioè se $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$;
c) 0 è elemento neutro.

1.6 - Potenza

1.10. Inserisci i numeri mancanti:

a) $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = 3^{\cdots + \cdots + \cdots} = 3^{\cdots}$;
b) $3^4 : 3^2 = 3^{\cdots - \cdots} = 3^{\cdots}$;
c) $(3 : 7)^5 = 3^{\cdots} : 7^{\cdots}$;
d) $6^3 : 5^3 = (6 : 5)^{\cdots}$;
e) $7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3 = (7 \cdot 5 \cdot 2)^{\cdots}$;
f) $(2^6)^2 = 2^{\cdots \cdot \cdots} = 2^{\cdots}$;
g) $(18^6) : (9^6) = (\ldots\ldots)^{\cdots} = 2^{\cdots}$;
h) $(5^6 \cdot 5^4)^4 : \left[(5^2)^3\right]^6 = \ldots\ldots\ldots = 5^{\cdots}$.

1.11 (*). Calcola applicando le proprietà delle potenze:

a) $2^5 \cdot 2^3 : 2^2 \cdot 3^6$;
b) $(5^2)^3 : 5^3 \cdot 5$;
c) $\left\{\left[(2^3)^2 : 2^3\right]^3 : 2^5\right\} : (2^8 : 2^6)^2$;
d) $\left[(2^1)^4 \cdot 3^4\right]^2 : 6^5 \cdot 6^0$.
e) $2^2 \cdot (2^3 + 5^2)$;
f) $\left[(3^6 : 3^4)^2 \cdot 3^2\right]^1$;
g) $4^4 \cdot (3^4 + 4^2)$;
h) $3^4 \cdot (3^4 + 4^2 - 2^2)^0 : 3^3 + 0 \cdot 100$.

1.12. Completa, applicando le proprietà delle potenze:

a) $7^4 \cdot 7^{\cdots} = 7^5$;
b) $3^9 \cdot 5^9 = (\ldots\ldots)^9$;
c) $5^{15} : 5^{\cdots} = 55$;
d) $(\ldots\ldots)^6 \cdot 5^6 = 15^6$;
e) $8^4 : 2^4 = 2^{\cdots}$;
f) $\left(18^5 : 6^5\right)^2 = 3^{\cdots}$;
g) $20^7 : 20^0 = 20^{\cdots}$;
h) $\left(\ldots^3\right)^4 = 1$;

1.13. Il risultato di $3^5 + 5^3$ è:

$\boxed{\text{A}}$ 368 $\boxed{\text{B}}$ $(3+5)^5$ $\boxed{\text{C}}$ $15+15$ $\boxed{\text{D}}$ 8^8.

1.14. Il risultato di $(73+27)^2$ è:

$\boxed{\text{A}}$ 200 $\boxed{\text{B}}$ $73^2 + 27^2$ $\boxed{\text{C}}$ 10^4 $\boxed{\text{D}}$ 1 000.

1.7 - Numeri Primi

1.15. Per ognuno dei seguenti numeri indica i divisori propri:

a) 15 ha divisori propri . . . , . . . , . . . , . . . ;
b) 19 ha divisori propri . . . , . . . , . . . , . . . ;
c) 24 ha divisori propri . . . , . . . , . . . , . . . ;
d) 30 ha divisori propri . . . , . . . , . . . , ...

1.16 (Crivello di Eratostene)**.** Nella tabella che segue sono rappresentati i numeri naturali fino a 100. Per trovare i numeri primi, seleziona 1 e 2, poi cancella tutti i multipli di 2. Seleziona il 3 e cancella i multipli di 3. Seleziona il primo dei numeri che non è stato cancellato, il 5, e cancella tutti i multipli di 5. Procedi in questo modo fino alla fine della tabella. Quali sono i numeri primi minori di 100?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1.8 - Criteri di divisibilità

1.17. Per quali numeri sono divisibili i valori seguenti? Segna i divisori con una crocetta.

a) 1 320 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
b) 2 344 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
c) 84 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d) 1 255 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
e) 165 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f) 720 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
g) 792 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
h) 462 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

1.18. Determina tutti i divisori di 32, 18, 24, 36.

1.9 - Scomposizione in fattori primi

1.19 (*). Scomponi i seguenti numeri in fattori primi:

a) 16; b) 18; c) 24; d) 30; e) 32; f) 36; g) 40; h) 42; i) 48; j) 52; k) 60; l) 72; m) 81; n) 105; o) 120; p) 135; q) 180; r) 225; s) 525; t) 360.

1.20 (*). Scomponi i seguenti numeri in fattori primi:

a) 675; b) 715; c) 1 900; d) 1 078; e) 4 050; f) 4 536; g) 12 150; h) 15 246; i) 85 050; j) 138 600; k) 234 000; l) 255 000; m) 293 760; n) 550 800; o) 663 552.

1.10 - Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo

1.21 (*). Calcola mcm e MCD tra i seguenti gruppi di numeri:

a) 6, 15
b) 12, 50
c) 1, 6, 10, 14
d) 15, 5, 10
e) 2, 4, 8
f) 2, 1, 4
g) 5, 6, 8
h) 24, 12, 16
i) 6, 16, 26
j) 6, 8, 12
k) 50, 120, 180
l) 20, 40, 60
m) 16, 18, 32
n) 30, 60, 27
o) 45, 15, 35

1.22 (*). Calcola mcm e MCD tra i seguenti gruppi di numeri:

a) 6, 8, 10, 12
b) 30, 27, 45
c) 126, 180
d) 24, 12, 16
e) 6, 4, 10
f) 5, 4, 10
g) 12, 14, 15
h) 3, 4, 5
i) 6, 8, 12
j) 15, 18, 21
k) 12, 14, 15
l) 15, 18, 24
m) 100, 120, 150
n) 44, 66, 12
o) 24, 14, 40

1.23 (*). Tre funivie partono contemporaneamente da una stessa stazione sciistica. La prima compie il tragitto di andata e ritorno in 15 minuti, la seconda in 18 minuti, la terza in 20. Dopo quanti minuti partiranno di nuovo insieme?

1.24 (*). Due aerei partono contemporaneamente dall'aeroporto di Milano e vi ritorneranno dopo aver percorso le loro rotte: il primo ogni 15 giorni e il secondo ogni 18 giorni. Dopo quanti giorni i due aerei si troveranno di nuovo insieme a Milano?

1.25 (*). Una cometa passa in prossimità della Terra ogni 360 anni, una seconda ogni 240 anni e una terza ogni 750 anni. Se quest'anno sono state avvistate tutte e tre, fra quanti anni sarà possibile vederle di nuovo tutte e tre nello stesso anno?

1.26 (*). Disponendo di 56 penne, 70 matite e 63 gomme, quante confezioni uguali si possono fare? Come sarà composta ciascuna confezione?

1.11 - Espressioni numeriche

1.27 (*). Esegui le seguenti operazioni rispettando l'ordine.

a) $15+7-2$;
b) $16-4+2$;
c) $18-8-4$;
d) $16\cdot 2-2$;
e) $12-2\cdot 2$;
f) $10-5\cdot 2$;
g) $20\cdot 4:5$;
h) $16:4\cdot 2$;
i) $2+2^2+3$;
j) $4\cdot 2^3+1$;
k) $2^4:2-4$;
l) $(1+2)^3-2^3$;
m) $\left(3^2\right)^3-3^2$;
n) 2^4+2^3;
o) $2^3\cdot 3^2$;
p) $3^3:3^2\cdot 3^2$.

1.12.2 Esercizi riepilogativi

1.28 (*). Quali delle seguenti scritture rappresentano numeri naturali?

a) $5+3-1$;
b) $6+4-10$;
c) $5-6+1$;
d) $7+2-10$;
e) $2\cdot 5:5$;
f) $2\cdot 3:4$;
g) $3\cdot 4-12$;
h) $12:4-4$;
i) $11:3+2$;
j) $27:9:3$;
k) $18:2-9$;
l) $10-1:3$.

1.29. Calcola il risultato delle seguenti operazioni nei numeri naturali; alcune operazioni non sono possibili, individuale.

a) $5:5=\ldots$;
b) $5:0=\ldots$;
c) $1\cdot 5=\ldots$;
d) $1-1=\ldots$;
e) $10:2=\ldots$;
f) $0:5=\ldots$;
g) $5\cdot 1=\ldots$;
h) $0:0=\ldots$;
i) $10:5=\ldots$;
j) $1:5=\ldots$;
k) $0\cdot 5=\ldots$;
l) $5:1=\ldots$;
m) $0\cdot 0=\ldots$;
n) $1\cdot 0=\ldots$;
o) $1:0=\ldots$;
p) $1:1=\ldots$

1.30 (*). Aggiungi le parentesi in modo che l'espressione abbia il risultato indicato.

a) $2+5\cdot 3+2=35$
b) $2+5\cdot 3+2=27$

1.31 (*). Traduci in espressioni aritmetiche le seguenti frasi e calcola il risultato:

a) aggiungi 12 al prodotto tra 6 e 4;
b) sottrai il prodotto tra 12 e 2 alla somma tra 15 e 27;
c) moltiplica la differenza tra 16 e 7 con la somma tra 6 e 8;
d) al doppio di 15 sottrai la somma dei prodotti di 3 con 6 e di 2 con 5;
e) sottrai il prodotto di 6 per 4 al quoziente tra 100 e 2;
f) moltiplica la differenza di 15 con 9 per la somma di 3 e 2;
g) sottrai al triplo del prodotto di 6 e 2 il doppio del quoziente tra 16 e 4.
h) il quadrato della somma tra il quoziente intero di 25 e 7 e il cubo di 2;
i) la somma tra il quadrato del quoziente intero di 25 e 7 e il quadrato del cubo di 2;
j) la differenza tra il triplo del cubo di 5 e il doppio del quadrato di 5.

1.32 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a) $(1+2\cdot 3):(5-2\cdot 2)+1+2\cdot 4$;
b) $(18-3\cdot 2):(16-3\cdot 4)\cdot(2:2+2)$;
c) $2+2\cdot 6-[21-(3+4\cdot 3:2)]:2$;
d) $\{[15-(5\cdot 2-4)]\cdot 2\}:(30:15+1)-\{[25\cdot 4]:10-(11-2)\}$.

1.33 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a) $[6 \cdot (2 \cdot 4 - 2 \cdot 3) - 6] + \{3 \cdot (21 : 7 - 2) \cdot [(6 \cdot 5) : 10] - 3 \cdot 2\}$;
b) $100 : 2 + 3^2 - 2^2 \cdot 6$;
c) $2^7 : 2^3 - 2^2$;
d) $30 - 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2^2 - 2$.

1.34 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a) $(3+4)^2 - (3^2 + 4^2)$;
b) $5 \cdot 5^3 \cdot 5^4 : (5^2)^3 + 5$;
c) $32^5 : 16^4 - 2^9$;
d) $\left[3^0 + (2^4 - 2^3)^2 : (4^3 : 4^2) + 3\right] : (2^6 : 2^4)$.

1.35 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a) $\left[(4^5 : 4^3) - 2^3\right] \cdot \left[(3^4 \cdot 3^3) : (3^2 \cdot 3)\right] : (2^2 + 2^0 + 3^1)$;
b) $(12 - 5^2 : 5) \cdot 4^2 : 2^3 + 2^2 - 1 + \left[(2^4 : 2^3)^3 + 4^3 : 4 + 2^5\right] : 7$;
c) $(5^2 \cdot 2^2 - (2^5 - 2^5 : (2^2 \cdot 3 + 4^2 : 4) + 2^3 \cdot (3^2 - 2^2))) : (3 \cdot 2) \cdot 5$;
d) $(3^4 \cdot 3^3 : 3^6)^2 + (7^2 - 5^2) : 2^2$.

1.36 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a) $(3 \cdot 2^2 - 10)^4 \cdot (3^3 + 2^3) : 7 - 10 \cdot 2^3$;
b) $(195 : 15) \cdot \{[3^2 \cdot 6 + 3^2 \cdot 4^2 - 5 \cdot (6-1)^2]\} : (4^2 - 3)$;
c) $5 + [(16 : 8) \cdot 3 + (10 : 5) \cdot 3] \cdot (2^3 \cdot 5 - 1)^2 - [(3 \cdot 10) : 6 - 1]$;
d) $[4 \cdot (3 \cdot 2 - 3 \cdot 1^2) - 5] - \{2 \cdot (14 : 7 + 4) : [2 \cdot (3+2)^2 : 10 + 1 - 4^2 : 8]\}$.

1.37 (*). Un'automobile percorre 18 km con 1 litro di benzina. Quanta benzina deve aggiungere il proprietario dell'auto sapendo che l'auto ha già 12 litri di benzina nel serbatoio, che deve intraprendere un viaggio di 432 km e che deve arrivare a destinazione con almeno 4 litri di benzina nel serbatoio?

1.38 (*). Alla cartoleria presso la scuola una penna costa 3 euro più di una matita. Gianni ha comprato 2 penne e 3 matite e ha speso 16 euro. Quanto spenderà Marco che ha comprato 1 penna e 2 matite?

1.39 (*). In una città tutte le linee della metropolitana iniziano il loro servizio alla stessa ora. La linea rossa fa una corsa ogni 15 minuti, la linea gialla ogni 20 minuti e la linea blu ogni 30 minuti. Salvo ritardi, ogni quanti minuti le tre linee partono allo stesso momento?

1.40. Tre negozi si trovano sotto lo stesso porticato, ciascuno ha un'insegna luminosa intermittente: la prima si spegne ogni 6 secondi, la seconda ogni 5 secondi, la terza ogni 7 secondi. Se le insegne vengono accese contemporaneamente alle 19:00 e spente contemporaneamente alle 21:00, quante volte durante la serata le tre insegne si spegneranno contemporaneamente?

1.41. In una gita scolastica ogni insegnante accompagna un gruppo di 12 studenti. Se alla gita partecipano 132 studenti, quanti insegnanti occorrono?

1.42. Un palazzo è costituito da 4 piani con 2 appartamenti per ogni piano. Se ogni appartamento ha 6 finestre con 4 vetri ciascuna, quanti vetri ha il palazzo?

1.43. Spiega brevemente il significato delle seguenti parole:

a) numero primo, b) numero dispari,
c) multiplo, d) cifra.

1.44. Rispondi brevemente alle seguenti domande:

a) cosa vuol dire scomporre in fattori un numero?

b) ci può essere più di una scomposizione in fattori di un numero?

c) cosa vuol dire scomporre in fattori primi un numero?

d) che differenza c'è tra la frase "a e b sono due numeri primi" e la frase "a e b sono primi tra di loro"?

1.12.3 Risposte

1.11. a) 6^6, b) 5^4, c) 1, d) 6^3.

1.19. a) 2^4, b) $2 \cdot 3^2$, c) $2^3 \cdot 3$, d) $2 \cdot 3 \cdot 5$, e) 2^5, f) $2^2 \cdot 3^2$, g) $2^3 \cdot 5$, h) $2 \cdot 3 \cdot 7$, i) $2^4 \cdot 3$, j) $2^2 \cdot 13$, k) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, l) $2^3 \cdot 3^2$, m) 3^4, n) $3 \cdot 5 \cdot 7$, o) $2^3 \cdot 3 \cdot 5$, p) $3^3 \cdot 5$, q) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, r) $2^2 \cdot 5^2$, s) $3 \cdot 5^2 \cdot 7$, t) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

1.20. d) $2 \cdot 7^2 \cdot 11$, e) $2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, f) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 7$, g) $2 \cdot 3^5 \cdot 5^2$, h) $2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2$, i) $2 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$, j) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$, k) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13$, l) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 17$, m) $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 17$, n) $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 17$, o) $2^{13} \cdot 3^4$.

1.21. a) 30; 3, b) 300; 2, c) 210; 1, d) 30; 5, e) 8; 2, f) 4; 1, g) 120; 1, k) 1800; 10, l) 120; 20.

1.22. m) 600; 10, n) 132; 2, o) 840; 2.

1.23. 3 ore.

1.24. 90 giorni.

1.25. 18 000 anni.

1.26. 7 confezioni, ognuna conterrà 8 penne, 10 matite, e 9 gomme.

1.27. a) 20, e) 8, i) 9, m) 720.

1.28. a, b, e, g, j, k.

1.30. a) $(2+5) \cdot (3+2)$, b) $2+5 \cdot (3+2)$.

1.31. a) 36, b) 18, c) 126, d) 2, e) 26, f) 30.

1.32. a) 16, b) 9, c) 8, d) 5.

1.33. a) 9, b) 35, c) 12, d) 41.

1.34. a) 24, b) 30, c) 0, d) 5.

1.35. a) 81, b) 25, c) 25, d) 15.

1.36. a) 0, b) 73, c) 18 253, d) 4.

1.37. Almeno 16.

1.38. 9 euro.

1.39. 60 minuti.