Integrali multipli

Consideriamo, inizialmente il caso degli integrali doppi. Il concetto di integrale doppio è l'estensione della definizione di integrale per una funzione reale di una variabile reale al caso di una funzione reale di due variabili reali

Definizione

L'integrale doppio di f sul rettangolo R è

$$\iint f(x,y)dxdy = \lim_{\delta_P} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f\left(x_{ij}^*,\, y_{ij}^*\right) \cdot A_{ij}$$

quando il limite delle somme di Riemann esiste. In tal caso diciamo che la funzione è *integrabile* sul rettangolo.

Chiamiamo *volume (con segno)* della regione solida *V* compresa tra il grafico di *z* = *f* (*x*, *y*) e il rettangolo *R* il valore del limite. Nel caso di funzioni *positive* l'integrale definisce il volume del solido *V*:

$f \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad Volume\ (V) = \iint f(x,y)dxdy$A seconda del dominio di integrazione e della funzione integranda, la risoluzione dell'integrale doppio può risultare più o meno facile

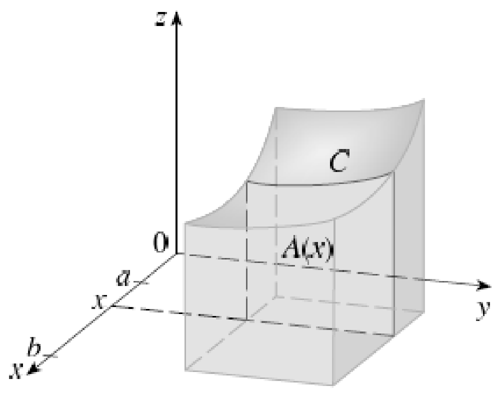
***Teorema**. Una funzione limitata è integrabile sul rettangolo se e soltanto se l'estremo superiore delle somme inferiori, fra tutte partizioni del rettangolo, è uguale all'estremo inferiore delle somme superiori fra le partizioni. Tali estremi sono a loro volta uguali all'integrale doppio.*

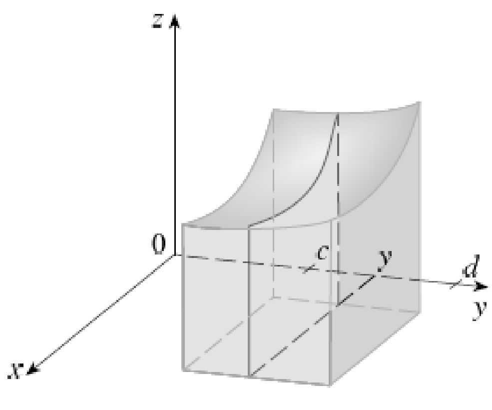
Per calcolare gli integrali doppi, così come capita per quelli semplici, non si applica praticamente mai la definizione di somma di Riemann, ma ci si riduce al calcolo di due integrali semplici. Per fare questa riduzione occorre la nozione di *integrazione parziale*, operazione che corrisponde alla *derivazione parziale*.

Data la funzione

$$f: [a,b] \times [c,d] \to R$$

integrare parzialmente rispetto a x significa integrare rispetto a $y \in [c,d]$ la famiglia delle tracce di f ad $x \in [a,b]$ fissato.



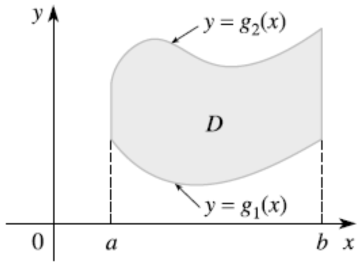


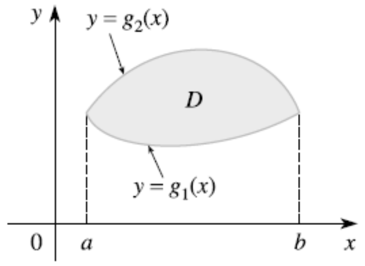
Teorema

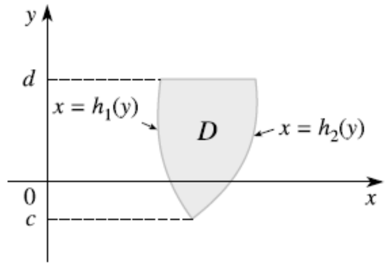
Data una funzione f è continua su un rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$;essa è integrabile e l'integrale doppio è uguale all'integrale iterato:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Tuttavia, nella maggior parte dei casi, si ha a che fare con domini in cui la x e/o la y sono compresi tra due funzioni, così come appare schematizzato







Come appare evidente dai grafici riportati, nei primi due casi, la x è compresa tra due valori costanti, nel terzo caso, invece, la y è compresa tra due valori costanti. Questa discriminazione è molto importante perché ci suggerire la variabile rispetto a cui integrare per prima, così come meglio stabilito dalle seguenti definizioni

Definizione

Una regione $D \subset R^2$è detta *y–semplice* se è compresa tra i grafici di due funzioni della variabile *x*, cioè se è del tipo

$$D = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Quindi l'area di una regione semplice è data dalla formula:

$$Area\ (D) = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]dx$$

Analogamente si definisce una regione x-semplice.

Per ogni funzione f continua su un insieme semplice D è integrabile su D, valgono le seguenti formule, dette formule di riduzione degli integrali doppi (o di Fubini):

$$D\ y - semplice \quad \Longrightarrow \quad \iint f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

$$D\ x - semplice \quad \Longrightarrow \quad \iint f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dx \right) dy$$

Esercizio n°2

Si calcoli il seguente integrale

$$\iint_D (x+2y)dxdy$$

dove $D = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}$

Si tratta di un caso molto semplice in cui il dominio D può essere considerato sia normale rispetto a x sia normale rispetto a y.

Risolviamolo considerando il dominio normale rispetto a x:

$$\iint_D (x+2y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+2y)dy = \int_0^1 [xy+y^2]_0^{1-x} dx = \int_0^1 (-x+1)dx = \frac{1}{2}$$

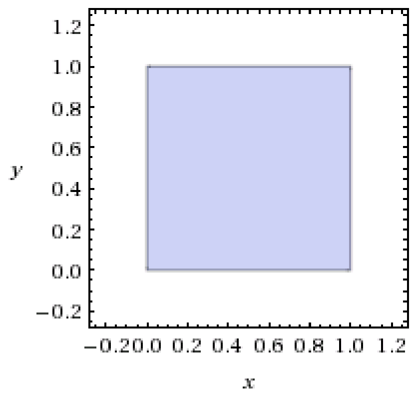
Esercizio n°3

Si calcoli il seguente integrale

$$\iint_D \frac{y}{1+xy} dxdy$$

con $D = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$

In questo caso, ho come dominio un rettangolo.



Pertanto posso scegliere indistintamente di integrare prima rispetto a x o a y. Tuttavia, integrando prima rispetto a x, la risoluzione dell'integrale si presenta molto più agevole:

$$\iint_D \frac{y}{1+xy} dxdy = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y}{1+xy} dx = \int_0^1 [log(1+xy)]_0^1 dy = \int_0^1 log(1+y)dy$$

Quest'ultimo integrale può essere risolto per parti:

$$\int_0^1 log(1+y)dy = [ylog(1+y)]_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{1+y} dy = [ylog(1+y)]_0^1 - \int_0^1 \frac{y+1-1}{1+y} dy =$$

$$= [ylog(1+y) - y + log(1+y)]_0^1 = 2log2 - 1$$

Esercizio n°4

Si calcoli il seguente integrale

$$\iint_D \boldsymbol{xydxdy}$$

dove $\boldsymbol{D = \left\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 4, \frac{x^2}{4} \le y \le 2\sqrt{x}\right\}}$

$$\iint_D xydxdy = \int_0^4 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} xydy = \int_0^4 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \left(2x^2 - \frac{x^5}{32}\right) dx = \frac{64}{3}$$

Esercizio n°5

Si calcoli il seguente integrale

$$\iint_D \boldsymbol{\sqrt{1-y^2}dxdy}$$

dove D è la parte di piano racchiusa dalla circonferenza di centro (1,0) e raggio 1

La circonferenza ha equazione:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

da cui si ricava:

$$-1 \le y \le 1; 1 - \sqrt{1-y^2} \le x \le 1 + \sqrt{1-y^2}$$

Pertanto:

$$\iint_D \sqrt{1-y^2}dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \left[x\sqrt{1-y^2}\right]_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}$$

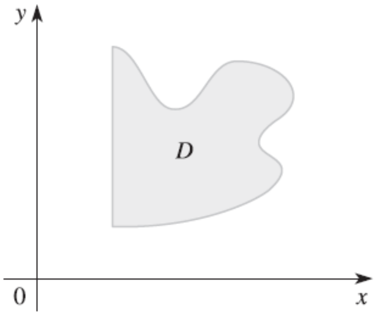
$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\left(1+\sqrt{1-y^2} - 1 + \sqrt{1-y^2}\right) dy = 2\int_{-1}^{1} (1-y^2)dy = 2\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

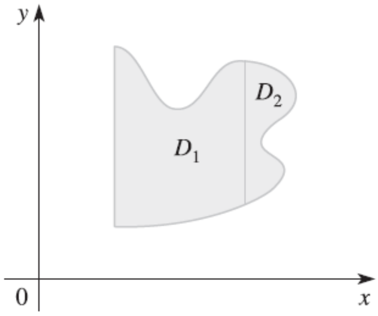
Integrali doppi su domini non semplici

Teorema. *Supponiamo che gli insiemi semplici* $D_1,\ D_2,\ \dots,\ D_k$ *non abbiano, a due a due, punti in comune oltre ad una parte della frontiera. Allora ogni funzione continua sull'unione* $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$ *è integrabile e si ha:*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \dots + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

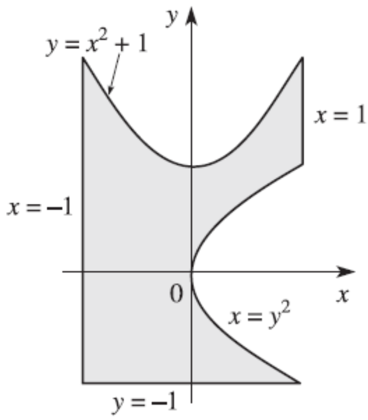
Possiamo usare il Teorema di additività rispetto al dominio per estendere le nostre capacità di calcolo a tutte le regioni che non sono necessariamente semplici, ma che possono essere suddivise in un numero finito di sottoregioni semplici .Tali domini verranno detti *semplicemente decomponibili*.





Esercizio n°5

Si calcoli l'area della regione di piano individuata in figura



Il dominio D può essere visto come unione di tre domini semplici, così definiti:

$$D_1 = \{(x, y): -1 \leq x \leq 0, \ -1 \leq y \leq 1 + x^2\},$$

$$D_2 = \left\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq -\sqrt{x}\right\}$$

$$D_3 = \left\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, \ \sqrt{x} \leq y \leq 1 + x^2\right\}$$

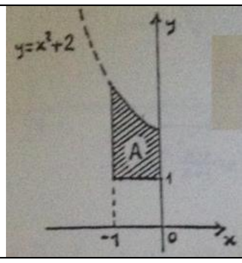
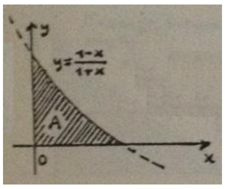
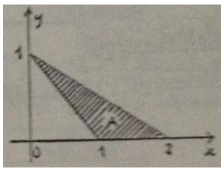
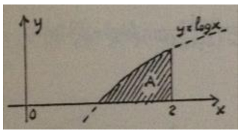
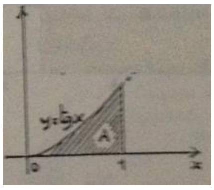
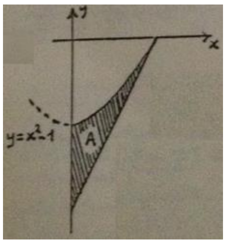
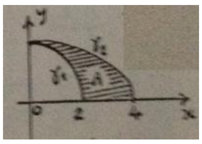
L'area può essere calcolata sfruttando la proprietà di additività dell'integrale

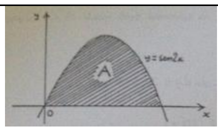
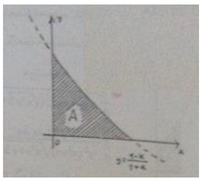
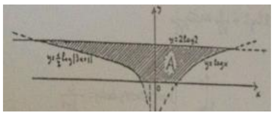
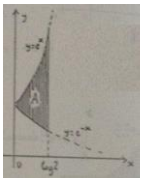
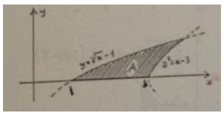
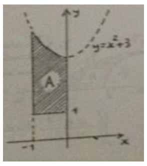
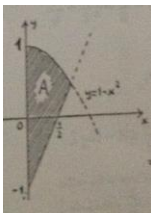
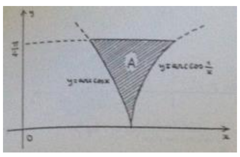
$$Area\ (D) \iint_D dxdy = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy + \iint_{D_3} dxdy$$

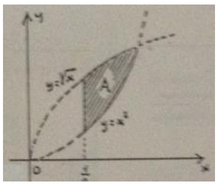
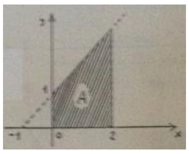
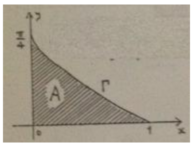
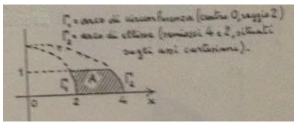
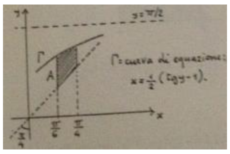
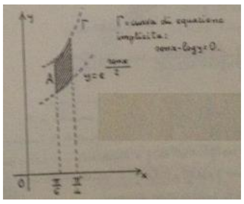
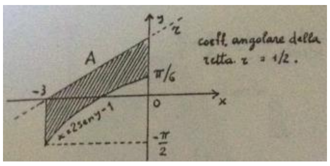
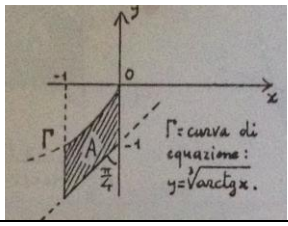
Con semplici calcoli si ottiene il valore $\frac{10}{3}$.

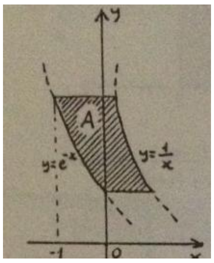
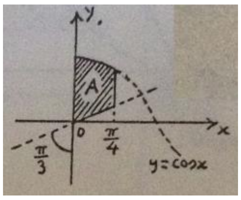
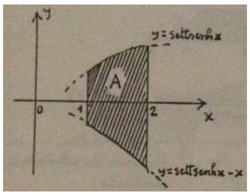
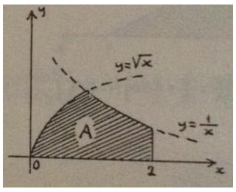
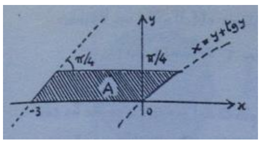
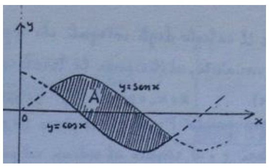
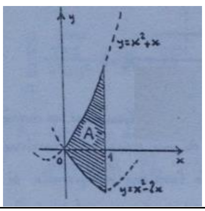
Calcolare i seguenti integrali nei domini indicati in figura

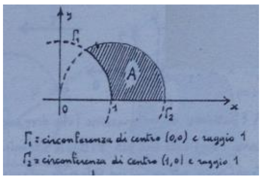
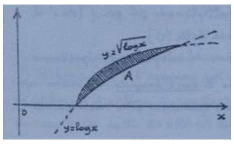
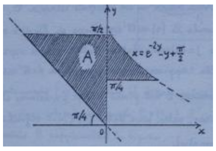
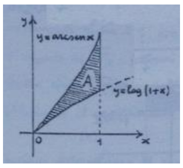
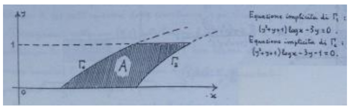
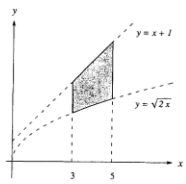
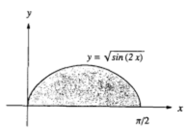
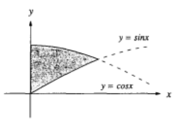
1	$\iint \frac{e^{arctgx}}{\sqrt{y}(1+x^2)\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)} dxdy$		$2\left(1 - e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$
2	$\iint \frac{(x^2+2)dxdy}{y^2(x^2+1)\sqrt{x^2+x+3}}$		$log \frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}-1}$

3	$\iint \frac{(3e^x+2)(x^2+2)e^x}{y^2(x^2+1)(2e^{2x}+3e^x+1)}dxdy$		$log\frac{2e\sqrt{3e}}{(e+1)\sqrt{e+2}}$
4	$\iint \frac{x^2+x+1}{y^2(1-x)}dxdy$		$-\frac{3}{2}+2log2+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{1}{\sqrt{2}}$
5	$\iint x(1+y^2dxdy)$		$\frac{17}{3}-8log2$
6	$\iint cos\pi x \cdot cos\pi y dxdy$		$-\frac{4}{3\pi^2}$
7	$\iint \frac{xe^y}{e^y+1}dxdy$		$\frac{3}{2}log\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$
8	$\iint \frac{\sqrt{x^2+4}}{1+y^2}dxdy$		$\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-8)$
9	$\iint \frac{dxdy}{x^2+1}$		$1-log2$
10	$\iint \frac{xe^{2y}}{y+2}dxdy$		$\frac{3}{8}(e^4-5)$
11	$\iint \sqrt{sin^2x+1}dxdy$		$\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

			
12	$\iint x(1+y)^2 dxdy$		$\frac{1}{6}$
13	$\iint xy(1+y)^4 dxdy$		$\frac{1}{12}$
14	$\iint \frac{(3e^y+2)e^y}{(2e^{2y}+3x+1)^2} dxdy$		$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}log\frac{2^7}{5\sqrt{3}}$
15	$\iint \frac{dxdy}{ye^x(1+ye^x)}$		
16	$\iint \frac{dxdy}{\sqrt{x}\left(2x+\sqrt{x}\right)^2}$		$log3-\frac{20}{9}log2$
17	$\iint \frac{dxdy}{(x+3)(x^2+2)y^2}$		$\frac{1}{24}\left(log3+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$
18	$\iint \frac{(2x+3)}{(2x-y+3)^2} dxdy$		
19	$\iint \frac{1}{x^3 cos^2 y} dxdy$		

20	$\iint \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}dxdy$		
21	$\iint \frac{x(1-y)}{(1+x)\sqrt{y}(1+y)^2}dxdy$		
22	$\iint \frac{x}{(1+x^2)^2}dxdy$		
23	$\iint \frac{xy}{\sqrt{4-y^2}}dxdy$		
24	$\iint \frac{dxdy}{sin^2x \cdot cos^2x(2x+1-tgx)cos^2y}$		
25	$\iint \frac{dxdy}{y \cdot sin^2x \cdot cosx}$		
26	$\iint \frac{cosydxdy}{\left(2sin\frac{x+3}{2}-x-1\right)\cdot coshx}$		
27	$\iint \frac{1-x+2y}{(1+x^2)\left(1-x+\sqrt[3]{arctgx}\right)}dxdy$		$-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}$

28	$$\iint \frac{(2x+logy)y}{(ylogy+1)(1+log^2y)}dxdy$$		$\frac{\pi}{4}$
29	$$\iint \frac{(2y\sqrt{3}-x)\sqrt[3]{tgx}}{(\sqrt{3}cosx-x)cos^3x}dxdy$$		$\frac{3}{4}$
30	$$\iint \frac{x+2y-settsinhx}{x\sqrt{1+x^2}settsinh^2x}dxdy$$		$log\frac{settsinh2}{settsinh1}$
31	$$\iint \frac{y}{1+x}dxdy$$		$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}log\frac{3}{8}$
32	$$\iint \frac{dxdy}{1+sin2y}$$		$1+log2$
33	$$\iint y^2dxdy$$		$\frac{5}{9}\sqrt{2}$
34	$$\iint (x^2-y)\sqrt{1-x^6}dxdy$$		$\frac{\pi}{4}$

35	$\iint y\sqrt{1-y^2}dxdy$		$\frac{1}{3}$
36	$\iint \frac{ydxdy}{x(1+y^2)^2}$		$\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}log2$
37	$\iint e^{-2y}\cdot sin(x+y)dxdy$		$\frac{\alpha\sqrt{2}-5\alpha^2+1}{10}+\frac{1}{2}(cos\alpha^2 - cos\alpha)$
38	$\iint e^y dxdy$		$\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}-2$
39	$\iint \frac{dxdy}{x(y^2+y+1)}$		$\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$
40	$\iint \frac{y}{x^3-4x^2+5x-2}dxdy$		
41	$\iint x^2ydxdy$		
42	$\iint \frac{1}{sinx+cosx}dxdy$		
43	Calcolare il volume del solido che giace sotto la funzione $f(x,y)=2x^2+4y^2$ e sopra la regione del piano (x,y) limitata dalle curve $g(x)=x$ e $h(x)=x^2$		17/70

44	Calcolare il volume del solido che giace sotto la funzione $f(x,y)=3x^2+9y^2$ e sopra la regione del piano (x,y) limitata dalle curve $g(x)=3x$ e $h(x)=x^3$	1161/10
45	Calcolare il volume del solido che giace sotto la funzione $f(x,y)=x^2+2y^2$ e sopra la regione del piano (x,y) limitata dalle curve $g(x)=4x$ e $h(x)=x^2$	42752/35
46	Calcolare $$\iint (y-x)e^y dxdy$$ nella porzione di piano contenuta nel primo quadrante, racchiusa tra l'asse $x=0$ e le rette $y=x$ e $y=\frac{x+1}{2}$	$e-1-\sqrt{e}$
47	Calcolare $$\iint \frac{dxdy}{(x+y)(1+x^4)}$$ nel dominio esteso al primo quadrante delimitato dalla retta $x=1$ e dai grafici delle funzioni $y=e^x-x$ e $y=e^{2x}-x$	$\frac{\pi}{8}$
48	Dato il dominio D limitato dalle rette $y=1, y=2, x=4$ e dalla curva di equazione $x=y^2$ determinare il seguente integrale: $$\iint x\cdot logy dxdy$$	$-\frac{369}{50}-\frac{log2}{5}+log8192$
49	Determinare $$\iint \frac{x}{y}e^y dxdy$$ nel dominio $D=\{(x,y)\in R^2: 0\le x\le 1, x^2\le y\le x\}$	$\frac{e-2}{2}$
50	Determinare $$\iint \frac{1}{(x+y+2)^2}dxdy$$ nel dominio $D=\left\{(x,y)\in R^2: 0\le x\le \frac{\pi}{3}, 0\le y\le x\right\}$	$\frac{1}{3}log\left(\frac{7}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$
51	Determinare $$\iint \frac{x}{(x^2-1)^2(y-1)^2}dxdy$$ dove $D=\left\{(x,y)\in R^2: 0\le x\le \frac{1}{2}, 0\le y\le x^2\right\}$	$\frac{1}{36}$
52	Determinare $$\iint \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}dxdy$$ dove $D=\left\{(x,y)\in R^2: \frac{1}{2}\le x\le 1, 0\le y\le x\right\}$	$\frac{3}{2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}arcsin\frac{1}{3}$
53	Determinare $$\iint x^2y dxdy$$ dove l'integrale si intende nel dominio D, parte del piano racchiusa tra le curve di equazioni $y=sinx$ e $y=cosx$, per $\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi^2+8\pi-8}{64}$

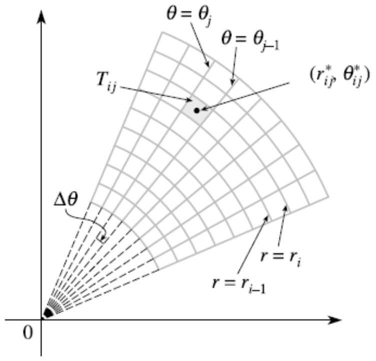
Cambiamento di variabili

Quando il dominio T è un disco, una corona, un settore circolare, per risolvere l'integrale doppio , conviene utilizzare le coordinate polari. In questo modo le regioni corrispondono, attraverso il cambiamento di variabili $T(\rho,\theta)=(\rho cos\theta, \rho sin\theta)$ a rettangoli del piano $\rho\theta$ detti anche rettangoli polari.

La trasformazione in coordinata polari ha jacobiano:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} cos\theta & -\rho sin\theta \\ sin\theta & \rho cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

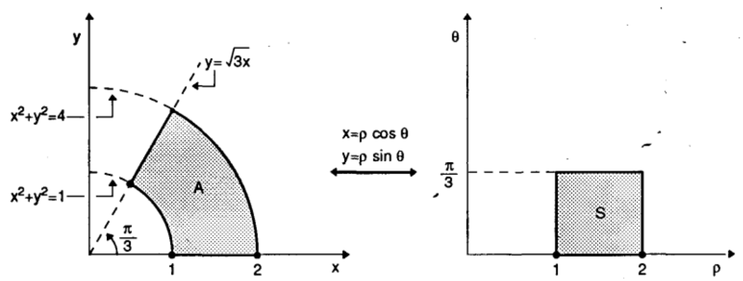
Lo jacobiano è dunque una funzione limitata sui limitati del piano $\rho\theta$ ed è diverso da zero *tranne nei punti con* $\rho = 0$. La trasformazione è biunivoca, tranne nei punti del piano $\rho\theta$ con $\rho = 0$, che vengono tutti mandati nell'origine del piano *xy*. Dunque sono soddisfatte le ipotesi del Teorema relativo al cambiamento di variabili nell'integrale.



Teorema

Sia $T(\rho,\theta) = (\rho cos\theta,\ \rho sin\theta)$. Sia $S \subset (0,\ +\infty) \times (0,\ 2\pi)$ un aperto misurabile del piano $\rho\theta$ e sia $T = T(S)$. Allora $\forall F: T \to R$ integrabile su T, vale la relazione

$$\iint_T f(x,y)dxdy = \iint_S f(\rho cos\theta, \rho sin\theta)\rho d\rho d\theta$$



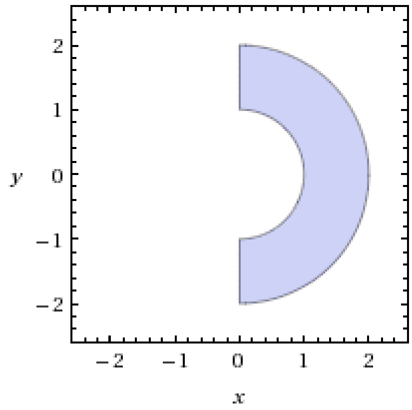
Esercizio n°6

Si risolva il seguente integrale:

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2} dxdy$$

dove $D = \{(x,y) \in R^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x > 0\}$

Il dominio D può essere rappresentato come segue:



Si può procedere ad un cambiamento di variabili in coordinate polari:

$$x = \rho cos\theta; \;\; y = \rho sin\theta$$

Lo Jacobiano vale:

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} cos\theta & -\rho sin\theta \\ sin\theta & \rho cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

Il dominio, rispetto alle nuove variabili sarà un rettangolo polare:

$$T = \left\{(\rho,\theta) \in R^2 : 1 \leq \rho \leq 2;\; -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy = \iint_T \frac{\rho cos\theta}{\rho^2 cos^2\theta + \rho^2 sin^2\theta}\rho d\rho d\theta = \iint_T cos\theta d\rho d\theta = \int_0^1 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\theta d\theta = 2$$

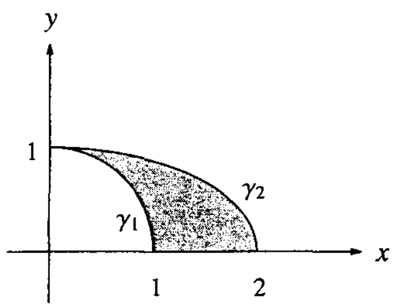
Esercizio n°7

Si risolva il seguente integrale:

$$\iint_D \boldsymbol{xydxdy}$$

dove $\boldsymbol{D = \left\{(x,y) \in R^2 : 1 - x^2 \leq y^2 \leq 1 - \frac{x^2}{4};\; x \geq 0; y \geq 0\right\}}$

Il dominio è rappresentato in figura;



esso può essere suddiviso in due domini: la parte di piano del primo quadrante racchiusa dalla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, sia esso D_1 e l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, sia esso D_2

$$\iint_D xydxdy = \iint_{D_2} xydxdy - \iint_{D_1} xydxdy$$

Il dominio D_1 può essere trasformato in coordinate polari nel dominio T_1

$$x = \rho cos\theta; \ \ y = \rho sin\theta$$

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} cos\theta & -\rho sin\theta \\ sin\theta & \rho cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

Così $T_1 = \left\{(\rho,\theta) \in R^2 : 0 \le \rho \le 1; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$
Il dominio D_2 può essere trasformato in coordinate polari nel dominio T_2

$$x = 2\rho cos\theta; \ \ y = \rho sin\theta$$

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} 2cos\theta & -\rho sin\theta \\ sin\theta & \rho cos\theta \end{vmatrix} = 2\rho$$

Quindi:

$$\iint_D xydxdy = \iint_{T_2} 2\rho cos\theta \rho sin\theta 2\rho d\rho d\theta - \iint_{T_1} \rho cos\theta \rho sin\theta \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\rho^3 sin\theta cos\theta d\rho d\theta - \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 sin\theta cos\theta d\rho d\theta = 3\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 sin\theta cos\theta d\rho d\theta$$

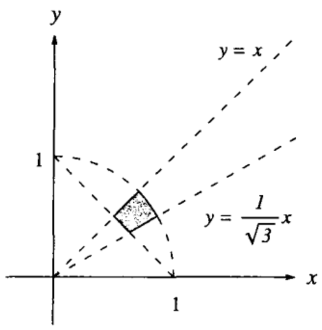
$$= \frac{3}{2}\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2\theta = \frac{3}{2}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \left[-\frac{1}{2}cos2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}$$

Esercizio n°8

Si risolva il seguente integrale:

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2}{xy} dxdy$$

dove D è il dominio in figura



Il dominio è compreso tra la retta di equazione $y = -x + 1$ e la circonferenza di raggio 1 e centro l'origine degli assi, di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

Passando a coordinate polari si ha che la retta assume equazione polare:

$$\rho = \frac{1}{sin\theta + cos\theta}$$

mentre la circonferenza ha equazione polare $\rho = 1$.

Il nuovo dominio in coordinate polari sarà T:

$$T = \left\{(x, y) \in R^2 \colon \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{4}; \frac{1}{sin\theta + cos\theta} \le \rho \le 1\right\}$$

Applicando la formula del cambiamento di variabili si ha:

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2}{xy} dxdy = \iint_T \frac{\rho^2 cos^2\theta + \rho^2 sin^2\theta}{\rho cos\theta sin\theta} d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{sin\theta cos\theta} d\theta \int_{\frac{1}{sin\theta + cos\theta}}^{1} \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{sin\theta cos\theta} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{1}{sin\theta + cos\theta}}^{1} d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{sin\theta cos\theta} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(sin\theta + cos\theta)^2}\right] d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{sin\theta cos\theta} \frac{(sin\theta + cos\theta)^2 - 1}{2(sin\theta + cos\theta)^2} d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{sin\theta cos\theta} \frac{2 sin\theta cos\theta}{2(sin\theta + cos\theta)^2} d\theta$$

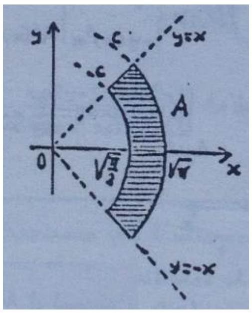
$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(sin\theta + cos\theta)^2} d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{1 + 2 sin\theta cos\theta} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{1 + sin2\theta}$$

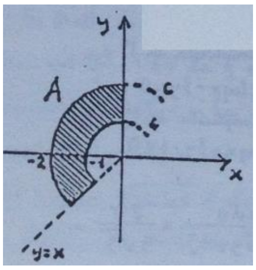
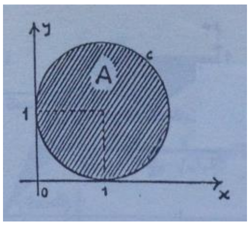
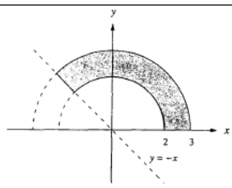
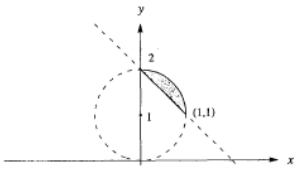
L'ultimo integrale può essere risolto per sostituzione, ponendo $tg\theta = t; d\theta = \frac{dt}{1+t^2}$

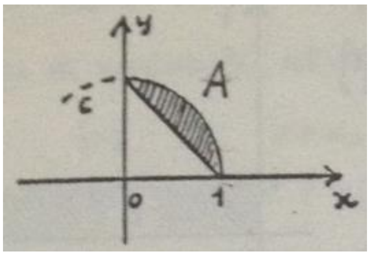
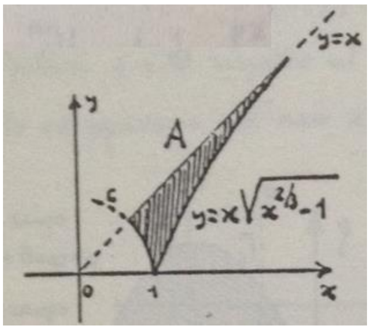
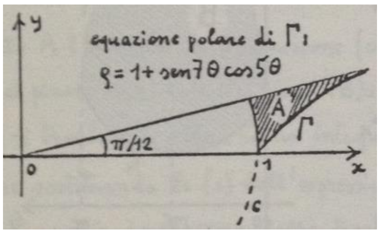
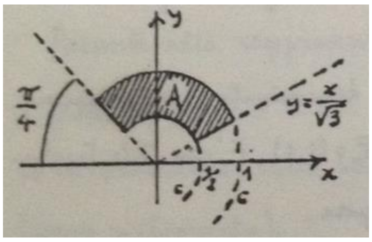
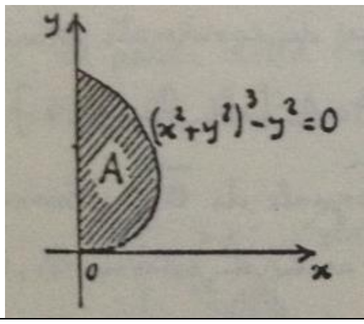
In definitiva, si ottiene:

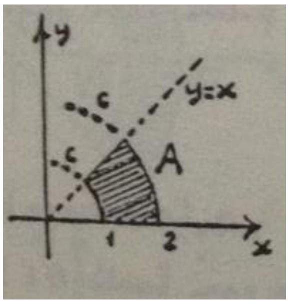
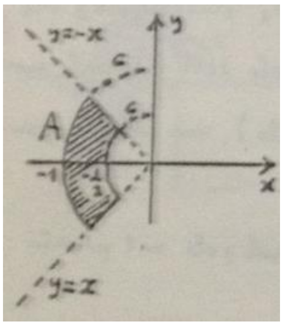
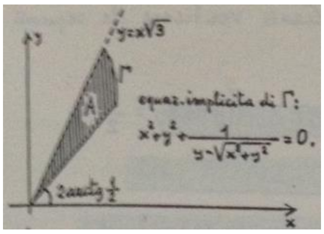
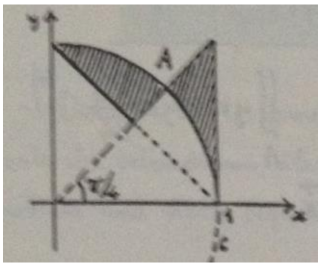
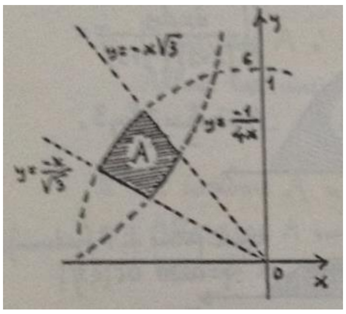
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{1 + sin2\theta} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dt}{(1+t)^2} = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

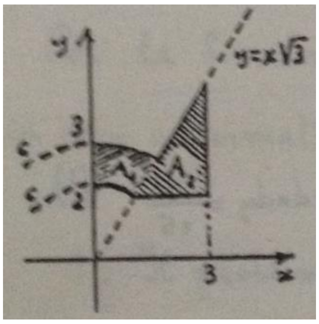
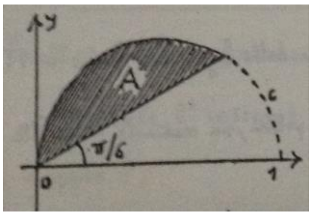
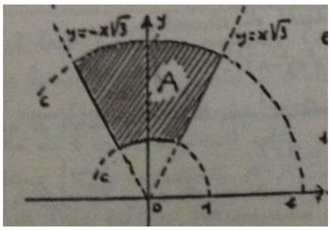
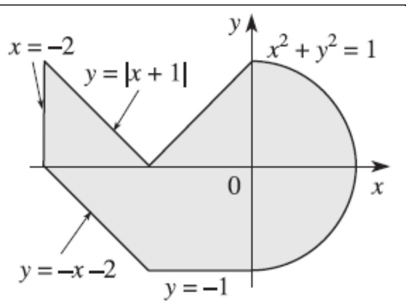
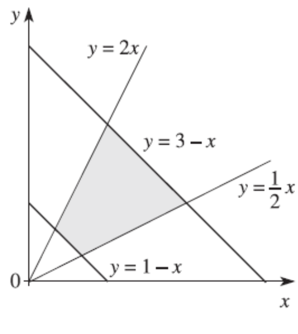
Calcola i seguenti integrali doppi

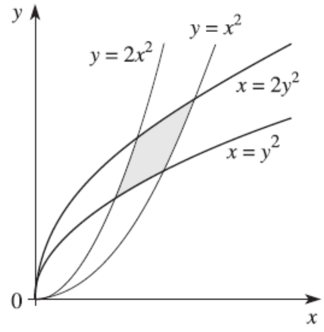
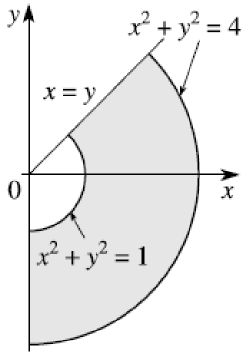
1	$\iint sin^3(x^2 + y^2) dxdy$		$\frac{\pi}{6}$

2	$\iint \frac{xy(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy$		$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{10}+\frac{\pi}{4}-arctg2\right)$
3	$\iint \frac{x(x^2-y^2)}{1+[(x-1)^2+(y-1)^2]^2}dxdy$		$\frac{\pi}{2}log2$
4	$\iint \frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}dxdy$		$\sqrt{2}$
5	$\iint xylog(x^2+y^2)dxdy$		$-log4+\frac{1}{32}(-65+81log81)$
6	$\iint \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$		$\sqrt{2}(1-arcsinh1)$
7	$\iint \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy$	$D=\{(x,y)\in R^2: 1\le x^2+y^2\le 4, 0\le y\le x, 0\le x\le \sqrt{3}y\}$	
8	$\iint \frac{y}{(1+x)^2}dxdy$	$D=\left\{(x,y)\in R^2: \frac{1}{9}\le x^2+y^2\le \frac{1}{4}, \sqrt{3}x\le y\le 0, x\le 0\right\}$	
9	$\iint \frac{\lvert y\rvert}{(x^2+y^2)^2}dxdy$	$D=\{(x,y)\in R^2: 1\le x^2+y^2\le 4x, \lvert y\rvert\le \sqrt{3}x\}$	$\frac{1}{2}(2-log2)$
10	$\iint \frac{\lvert x\rvert+y}{(x^2+y^2)^2}$	$D=\{(x,y)\in R^2: 1\le x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$	2
11	$\iint x\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}}dxdy$	$D=\left\{(x,y)\in R^2: \frac{1}{4}\le x^2+y^2\le 1, \quad 0\le x\le y\right\}$	$-\frac{\sqrt{3}}{16}(\sqrt{2}-2)$
12	$\iint \frac{3+x+y}{x^2+y^2}dxdy$	$D=\left\{(x,y)\in R^2: 4\le x^2+y^2\le 9, \frac{\sqrt{3}}{3}\le \frac{y}{x}\le 1\right\}$	$\frac{\pi}{2}log\frac{3}{2}$
13	$\iint 2xydxdy$	$D=\left\{(x,y)\in R^2: x^2+y^2\ge 1, \frac{x^2}{4}+y^2\le 1\right\}$	3

14	$\iint \frac{y^2}{1+x^2+y^2}dxdy$	$D=\{(x,y)\in R^2: x^2+y^2\le 4, 0\le\ y\le\sqrt{3}x\}$	$\frac{1}{48}(3\sqrt{3}-4\pi)(-4+log5)$
15	$\iint \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$		$\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}log(3+2\sqrt{2})$
16	$\iint (x^2+y^2)^{-3/2}dxdy$		$\frac{1}{4}\left(\frac{5}{8}\pi-1\right)$
17	$\iint \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$		$\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\sqrt{3}$
18	$\iint \frac{arcsin^2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$		$\frac{7}{72}\pi(\pi^2-\pi\sqrt{3}-6)$
19	$\iint y^2dxdy$		$\frac{3}{64}\pi$

20	$\iint y \cdot arctg^3 \dfrac{y}{x} dxdy$		
21	$\iint \left(\dfrac{y}{x}\right)^4 dxdy$		$\frac{3}{16}\pi - \frac{1}{2}$
22	$\iint ydxdy$		
23	$\iint \dfrac{x}{x^2+y^2} dxdy$		
24	$\iint \dfrac{xy}{y^2-4x^2} dxdy$		

25	$\iint_{A_1 \cup A_2} \frac{1}{y} dxdy$		
26	$\iint \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$		
27	$\iint \frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2} dxdy$		
28	$\iint x^2 y \, dxdy$		$\frac{1}{10}$
29	$\iint (x^2 + ydxdy)$	Il dominio è la parte di corona circolare delimitata da $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ compresa fra le rette $y = x$ $y = -x$	$\frac{15}{16}\pi + \frac{15}{8}$
30	$\iint dxdy$		$\frac{4}{3}$

31	$\iint \frac{e^{\frac{y}{x^2}}}{x^2y^2}dxdy$		$\frac{1}{3}(e^2-e)$
32	$\iint \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$		
33	$\iint \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$