

Prof. Roberto Capone

Nozioni di Logica Matematica (II parte)

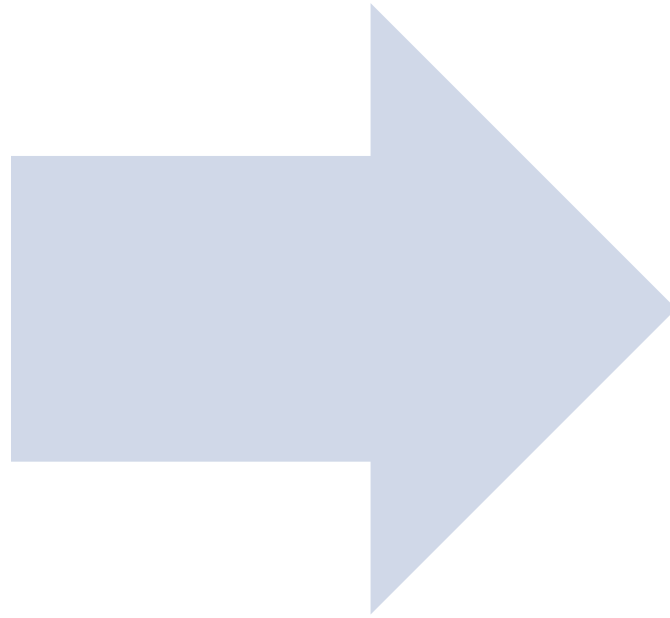
Corso di Didattica della Matematica
2015/2015
Corso di Laurea in Scienze della Formazione
Primaria





Negazioni

Tutti fanno
qualcosa;
Tutti sono
qualcosa



Qualcuno non
fa qualcosa;
Almeno uno
non è qualcosa

Tutti gli italiani sono intelligenti

Almeno un Italiano non è
intelligente.

Negazioni

Qualcuno non fa qualcosa Almeno uno non è qualcosa

QUALCHE cinese NON è intraprendente

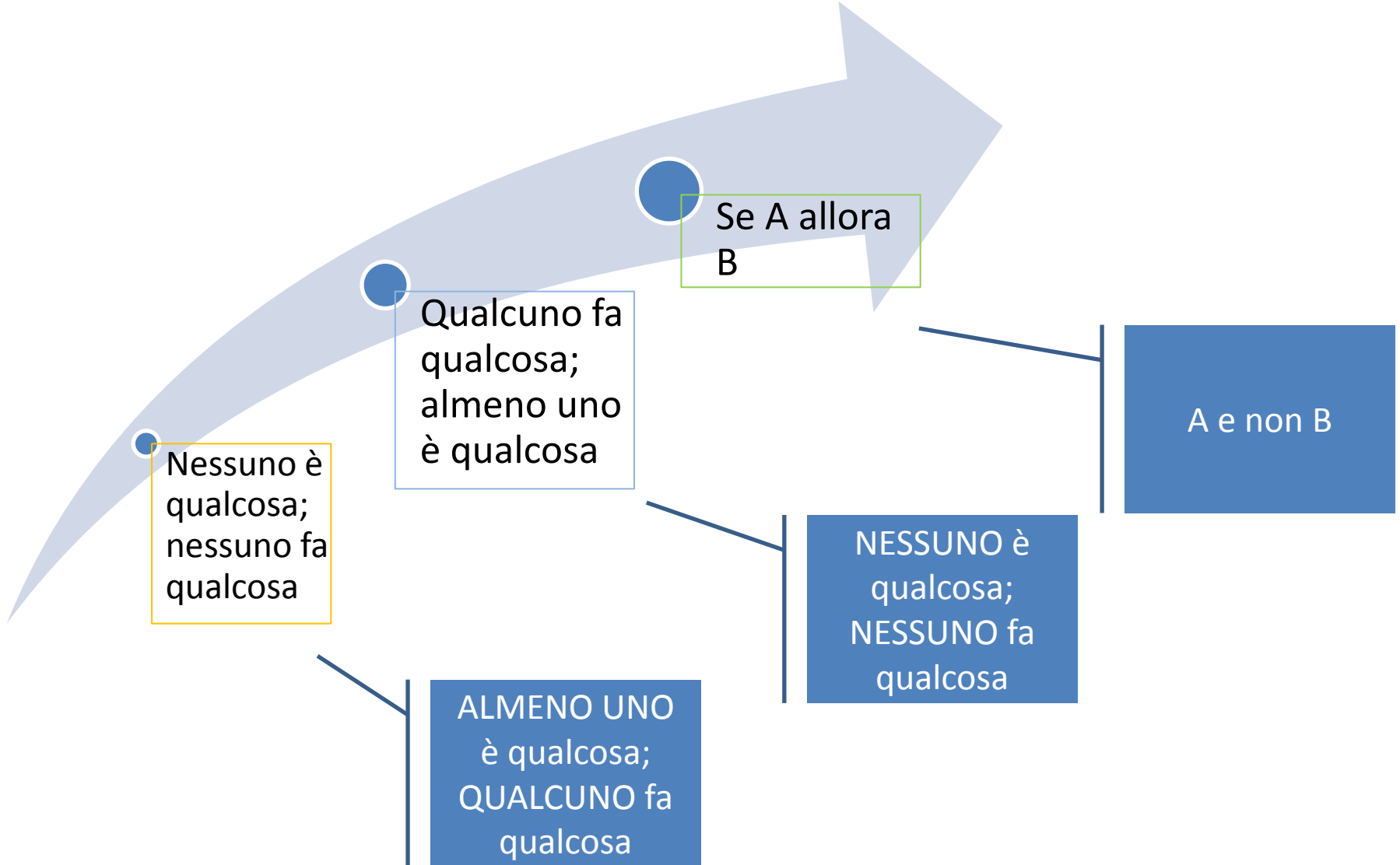
ALMENO UNO dei cani dell'allevamento
NON è intelligente

Tutti fanno qualcosa; tutti sono qualcosa

TUTTI i cinesi sono intraprendenti

I cani dell'allevamento sono TUTTI
Intelligenti

Negazioni



Negazioni

A e B

NON A oppure NON B

Titti lavora e canta

⇒ Titti non lavora oppure
non canta


Negazioni

SCHEMA RIASSUNTIVO SULLA NEGAZIONE

	Tipo di affermazione	Negazione			Tipo di affermazione	Negazione
1	Tutti fanno qualcosa	Qualcuno non fa qualcosa		6	A e B	Non A oppure non B
2	Qualcuno non fa qualcosa	Tutti fanno qualcosa		7	Non A oppure non B	A e B
3	Nessuno fa qualcosa	Qualcuno fa qualcosa		8	A o B	Né A, né B
4	Qualcuno fa qualcosa	Nessuno fa qualcosa		9	Né A, né B	A o B
5	Se A, allora B	A e non B		10	Non A	Non è vero che «non A» (ovvero A)

Negazioni

1. Se l'affermazione «tutti i cani randagi rischiano gravi malattie infettive» è falsa, quale delle seguenti proposizioni è necessariamente vera?
- A. Nessun cane randagio rischia gravi malattie infettive
 - B. Almeno un cane randagio non rischia gravi malattie infettive
 - C. Alcuni cani di razza rischiano gravi malattie infettive
 - D. Almeno un cane randagio rischia gravi malattie infettive
 - E. I cani domestici non rischiano gravi malattie infettive



Dire che l'affermazione assegnata è falsa è un modo alternativo per chiedere la negazione dell'affermazione. Il test propone una frase del tipo «TUTTI gli A fanno qualcosa» la cui negazione è QUALCUNO NON fa qualcosa

La negazione di **TUTTI i cani** è **ALMENO** un cane
NON

Negazioni

2. «Almeno uno dei cani dell'allevamento non è intelligente». Se la precedente affermazione è falsa, allora è vero che:

- A. Nessuno dei cani dell'allevamento è intelligente
- B. I cani dell'allevamento sono tutti intelligenti
- C. Tutti i cani domestici sono intelligenti
- D. Alcuni cani dell'allevamento non sono intelligenti
- E. Solo uno dei cani dell'allevamento è intelligente

3. «Ai miei nipoti piace il tennis o il nuoto». Se la precedente affermazione è falsa, allora significa che:

- A. Ad almeno uno dei miei nipoti piace solo il nuoto
- B. A nessuno dei miei nipoti piace la scherma
- C. Il nuoto e il tennis fanno bene alla salute
- D. Ad almeno uno dei miei nipoti non piace né il tennis né il nuoto
- E. Il numero dei miei nipoti a cui piace il calcio è più elevato rispetto al numero dei miei nipoti a cui piace il nuoto

Negazioni

2

Il test propone una frase del tipo «QUALCUNO NON fa qualcosa», la cui negazione è «TUTTI fanno qualcosa». Quindi la negazione di «ALMENO UNO dei cani dell'allevamento NON è intelligente» è «i cani dell'allevamento sono TUTTI intelligenti»

3

In questo test è necessario applicare due regole. La prima regola in merito a «Ai miei nipoti ... (che equivale a «tutti i miei nipoti») la cui negazione è «AD ALMENO UNO dei miei nipoti NON ...»; inoltre, la negazione di «A o B» è «né A, né B». Quindi la negazione di «ai miei nipoti piace il tennis o il nuoto» è «ad almeno uno dei miei nipoti non piace né il tennis né il nuoto»

Negazioni

4. «Non è dimostrabile che non bere vino può fare bene alla pressione». La precedente affermazione è equivalente a:

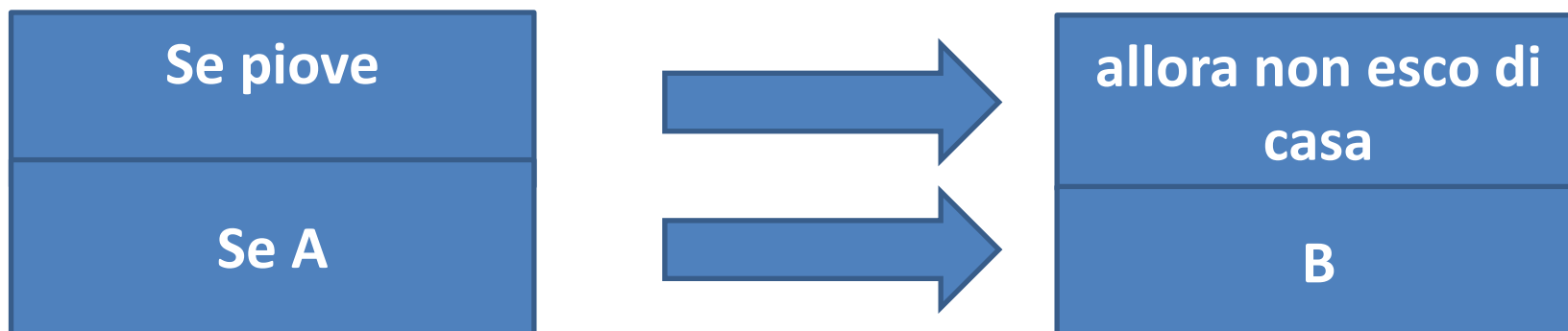
- A. Non bere vino non fa certamente bene alla pressione
- B. Non bere vino può fare bene alla pressione
- C. Bere vino è causa di malattie circolatorie
- D. Non bere vino fa sicuramente bene alla pressione
- E. Bere vino non fa bene alla pressione

In questo caso si tratta di svolgere una sorta di traduzione, considerando che una negazione si può esprimere non solamente con l'avverbio «non» ma può trattarsi anche di una negazione semantica ovvero di una negazione resa mediante l'uso di un termine che abbia significato opposto a quello di partenza. Non è dimostrabile equivale a indimostrabile. Possiamo riscrivere la frase: «è dimostrabile che non bere vino può fare bene alla pressione», quindi **non bere vino può fare bene alla pressione**

Deduzioni

La condizione sufficiente è la condizione che da sola è «sufficiente» a giustificare una conseguenza ma potrebbe non essere la sola condizione che giustifica la conseguenza considerata.

«Se piove allora non esco di casa»: la pioggia è sufficiente a giustificare la conseguenza proposta ovvero la mancata uscita ma potrei non uscire di casa anche se ho la febbre oppure se ho ospiti oppure se sto eseguendo lavori di ristrutturazione



Quando il test propone una condizione sufficiente, l'unica frase che si può dedurre da essa con certezza è

«se non B → non A»

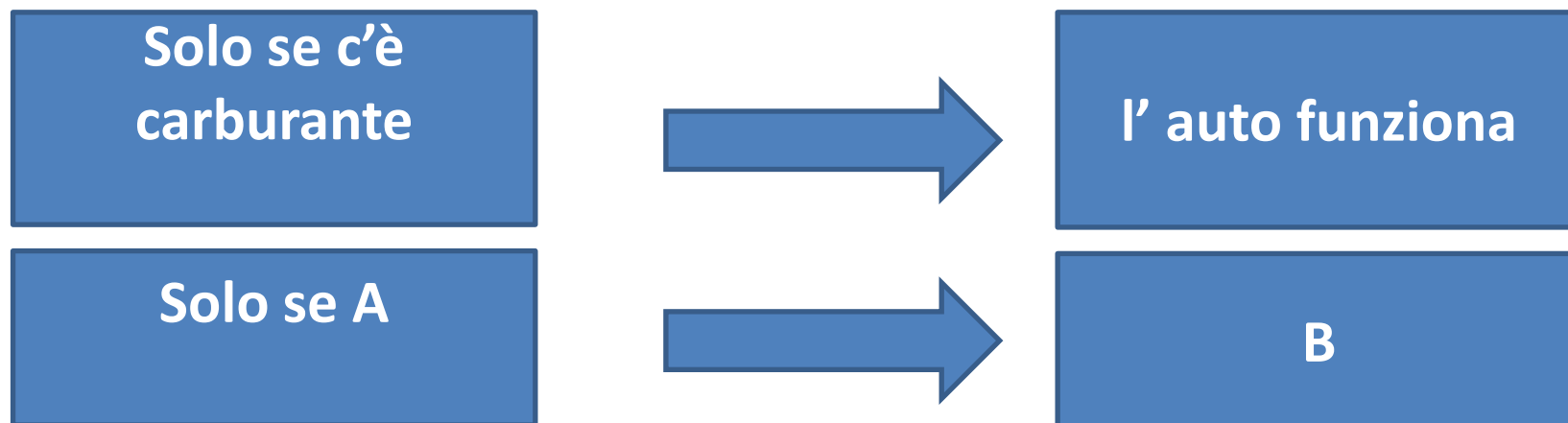
Dalla frase precedente, si può dedurre con certezza la frase

«se esco di casa allora non piove»

Deduzioni

La condizione necessaria è la condizione che è necessario sia presente per determinare una conseguenza ma da sola potrebbe non bastare a giustificare la conseguenza considerata.

«Solo se c'è carburante, l'auto funziona» (è necessaria la presenza del carburante per il funzionamento dell'auto); la presenza del carburante potrebbe non essere sufficiente a consentire il funzionamento dell'auto



Deduzioni

NB

Quando un test propone una condizione necessaria, le frasi che puoi dedurre da essa con certezza sono:

- Se **B** \rightarrow **A** (ovvero l'affermazione della conseguenza comporta l'affermazione della condizione necessaria);
- Se **NON A** \rightarrow **NON B** (ovvero la negazione della condizione necessaria comporta la negazione della conseguenza)

Dalla frase «Solo se c'è carburante l'auto funziona» puoi dedurre con certezza le frasi:

- Se l'auto funziona allora c'è carburante
- Se non c'è carburante l'auto non funziona

Condizione necessaria e sufficiente

La condizione necessaria e sufficiente può essere considerata una sintesi delle due precedenti: la condizione necessaria e sufficiente è la condizione che è necessaria per determinare una conseguenza ma, allo stesso tempo, è sufficiente a determinare la conseguenza stessa.

Se e solo se piove resto in casa

Il «se e solo se» ti fa capire che la condizione è necessaria e sufficiente ovvero la pioggia è condizione sia necessaria per farmi stare in casa (ovvero è fondamentale che piovano affinché io resti a casa) ma allo stesso tempo è sufficiente (ovvero è sufficiente che piovano affinché io resti a casa)

Se un test propone una condizione necessaria e sufficiente, le frasi che puoi dedurre da essa con certezza sono:

- **Se $B \rightarrow A$** (ovvero l'affermazione della conseguenza comporta l'affermazione della condizione necessaria e sufficiente)
- **Se $\text{NON } A \rightarrow \text{NON } B$** (ovvero la negazione della condizione necessaria e sufficiente comporta la negazione della conseguenza)
- **Se $\text{NON } B \rightarrow \text{NON } A$** (ovvero la negazione della conseguenza comporta la negazione della condizione necessaria e sufficiente).

Condizione necessaria e sufficiente

Se e solo se piove resto a casa

Da questa frase possiamo dedurre con certezza:

- Se resto in casa, allora piove;
- Se non piove, allora non resto in casa;
- Se non resto in casa, allora non piove.

Condizione necessaria e sufficiente

CONDIZIONE SUFFICIENTE	
Riconducibile alla forma	Puoi dedurre
$Se A \rightarrow B$	$Se non B \rightarrow non A$
CONDIZIONE NECESSARIA	
Riconducibile alla forma	Puoi dedurre
$Solo se A \rightarrow B$	$Se B \rightarrow A$ $Se non A \rightarrow non B$
CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE	
Riconducibile alla forma	Puoi dedurre
$Se e solo se A \rightarrow B$	$Se B \rightarrow A$ $Se non A \rightarrow non B$ $Se non B \rightarrow non A$

Condizione necessaria e sufficiente

Casi particolari

1. Leggete attentamente i seguenti dati: «Mio fratello è iscritto a Medicina; mia sorella è iscritta a ingegneria; nessuno della mia famiglia è iscritto a facoltà umanistiche». In base ai dati presenti quali delle seguenti affermazioni è vera?

- A. Io sono iscritto a lettere
- B. Mio fratello ha frequentato il liceo scientifico
- C. Mia sorella non è iscritta a medicina
- D. Io sono iscritto a fisica
- E. Nessuna delle precedenti

2. «Se il muratore sta riposando , allora il capocantiere è assente». Se la precedente affermazione è vera allora è anche vero che:

- A. Se il muratore non sta riposando, allora il capocantiere è presente
- B. Il muratore si sta riposando e il capocantiere non è assente
- C. Se il capocantiere è presente, allora il muratore non sta riposando
- D. Il capocantiere è assente solo quando il muratore si riposa
- E. Se il capocantiere è assente, allora il muratore si riposa

Condizione necessaria e sufficiente

1

La seconda affermazione riportata nella traccia è «mia sorella è iscritta a ingegneria». Se la sorella è iscritta a ingegneria, evidentemente non può essere iscritta a medicina (Opzione C)

2

La traccia propone una condizione sufficiente, ovvero sei in presenza di una espressione del tipo $Se A \rightarrow B$ da cui puoi dedurre con certezza $Se non B \rightarrow non A$

Se il muratore sta riposando, allora il capocantiere è assente
Se il capo cantiere NON è assente allora il muratore NON sta riposando
Dire «il capocantiere non è assente» è equivalente all'espressione «il capocantiere è presente» per questo motivo la risposta è C

Condizione necessaria e sufficiente

3. Se e solo se ho voglia di leggere, compro un romanzo di fantascienza. In base alla precedente informazione, quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

- A. Ogni tanto compro un romanzo di fantascienza
- B. Se compro un romanzo di fantascienza significa che ho voglia di leggere
- C. È possibile che compri un romanzo di fantascienza anche se non ho voglia di leggere
- D. A volte, anche se ho voglia di leggere, non compro un romanzo di fantascienza
- E. Compro un romanzo di fantascienza solo quando ho tempo di leggere

4. Antonio è laureato in medicina; alcuni laureati in medicina dormono poco; solo le persone che dormono molto sono tranquille. Se le precedenti affermazioni sono vere, allora è certamente vero che:

- A. Tutti i laureati in medicina non sono persone tranquille
- B. Se dorme molto, Antonio è sicuramente una persona tranquilla
- C. Antonio non è tranquillo
- D. Tutti i laureati in lettere sono persone serene
- E. Antonio potrebbe dormire molto ma non essere una persona tranquilla.

Condizione necessaria e sufficiente

3

La traccia propone una condizione necessaria e sufficiente ovvero sei in presenza di una espressione del tipo

se e solo se $A \rightarrow B$

da cui puoi dedurre con certezza *se* $B \rightarrow A$

Se e solo se ho voglia di leggere, compro un romanzo di fantascienza

Puoi dedurre:

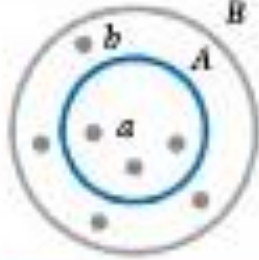

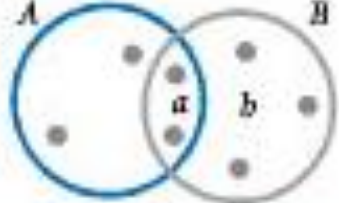
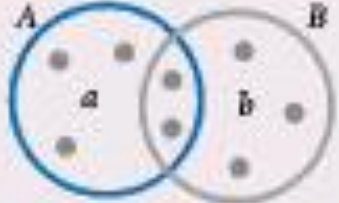
Se compro un romanzo di fantascienza, ho voglia di leggere

4

Poiché solamente alcuni laureati in medicina dormono poco, evidentemente esistono anche laureati in medicina che dormono molto e Antonio, essendo laureato in medicina, potrebbe appartenere all'insieme dei medici che dormono poco, oppure all'insieme dei medici che dormono molto. La frase «solo le persone che dormono molto sono tranquille» è un caso di condizione necessaria: da questa frase capisci che dormire molto è condizione necessaria per essere tranquilli nel senso che è indispensabile dormire molto per essere tranquilli ma potrebbe non bastare

Forme di sillogismi

Le forme dei sillogismi

Forma	Modello	Diagramma di Eulero-Ve.
universale affermativa	ogni a è b oppure tutti gli a sono b	
universale negativa	nessun a è b	
particolare affermativa	qualche a è b oppure almeno un a è b	
particolare negativa	qualche a non è b oppure almeno un a non è b	

Forme di sillogismi

ESEMPIO SVOLTO

Verifichiamo la validità del seguente sillogismo, utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn

«Nessun gatto è acquatico».

«Ogni gatto è un mammifero».

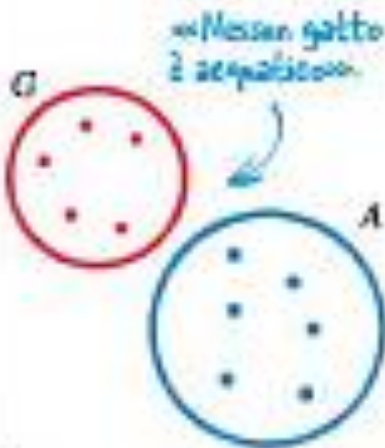
«Qualche mammifero non è acquatico».

Illustriamo le due premesse e la conclusione con tre diagrammi.

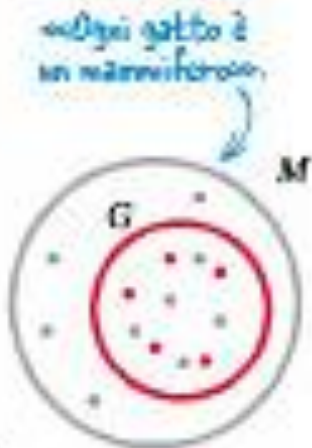
Indichiamo con M, G, A i seguenti insiemi:

• $M = \{\text{mammiferi}\}$; • $G = \{\text{gatti}\}$; • $A = \{\text{animali acquatici}\}$.

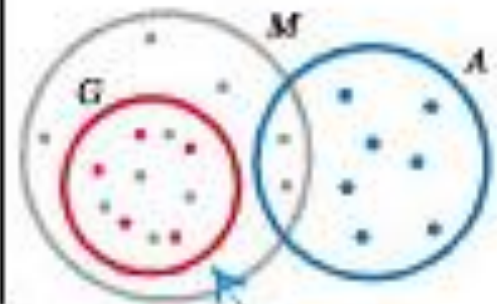
A L'insieme G è disgiunto da A .



B L'insieme G è sottoinsieme di M .



C I due insiemi M e A possono intersecarsi, ma senz'altro ci sono degli elementi di M (quelli che appartengono a G) che non sono di A .



Gli elementi di G sono anche di M , ma non sono di A ; quindi ci sono elementi di M che non sono di A . Il ragionamento è valido.

«Qualche mammifero non è acquatico»

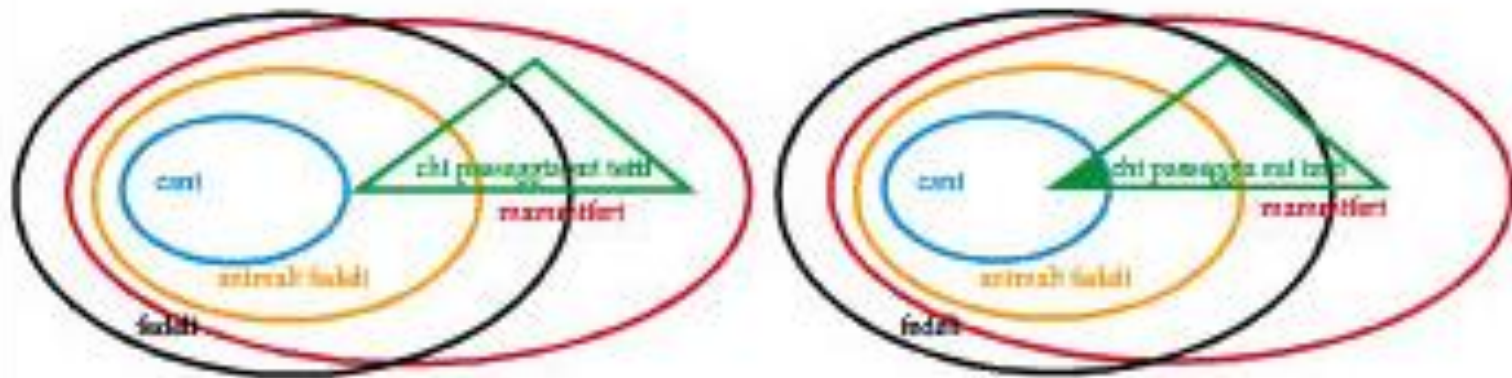
Forme di sillogismi

ESEMPIO SVOLTO

Tutti i cani sono fedeli e tutti gli animali fedeli sono mammiferi. Alcuni mammiferi possono passeggiare sui tetti. Dunque (UNA sola delle deduzioni qui elencate completa correttamente il sillogismo):

- A. è impossibile che alcuni cani non possano passeggiare sui tetti
- B. è impossibile che alcuni mammiferi non siano fedeli
- C. è impossibile che alcuni cani possano passeggiare sui tetti
- D. non è impossibile che alcuni cani possano passeggiare sui tetti
- E. gli animali che possono passeggiare sui tetti sono mammiferi

Per risolvere l'esercizio, disegniamo il diagramma di Eulero-Venn:



Il triangolo contenente chi «passeggia sui tetti» può essere spostato a piacimento (nota che «alcuni mammiferi possono passeggiare sui tetti»): se ha un'intersezione non nulla con l'insieme dei mammiferi, significa che alcuni mammiferi passeggiano sui tetti; se non ce l'ha, significa che nessun mammifero passeggia sui tetti. Quindi, in relazione ai diagrammi di Eulero-Venn disegnati, non si può escludere che alcuni cani possano passeggiare sui tetti.

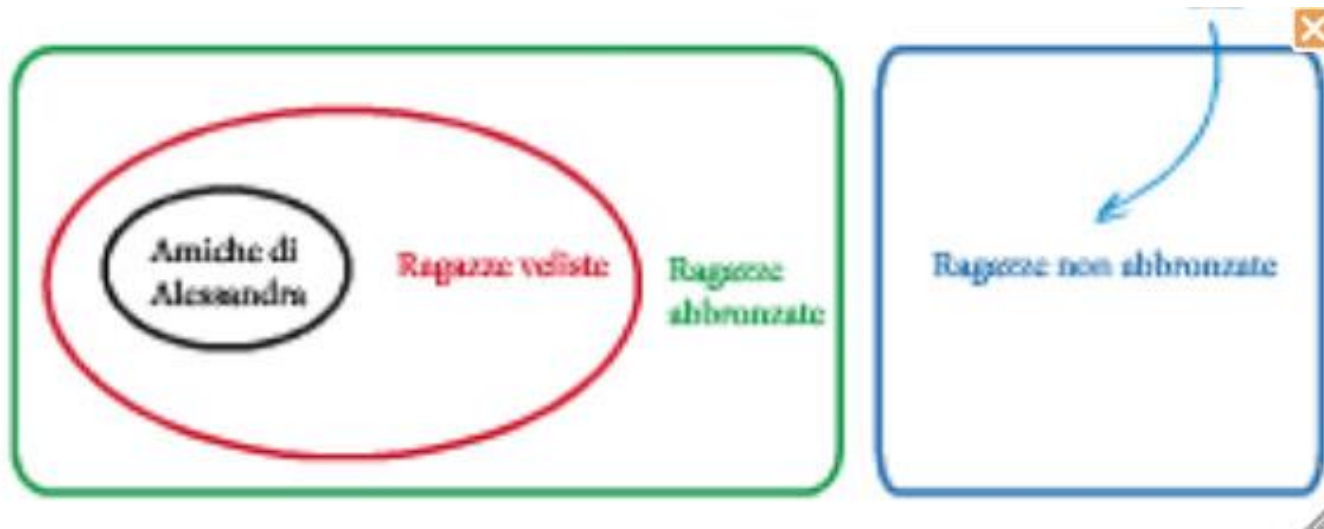
Nota che le presenti non sono le uniche rappresentazioni possibili, ma permettono di dare la risposta esatta.

Forme di sillogismi

Tutte le amiche di Alessandra sono veliste e tutte le veliste sono abbronzate.
Determinare, sulla base di queste sole affermazioni, quale delle seguenti deduzioni è corretta

- A. Lisa non è amica di Alessandra, quindi non è abbronzata
- B. Lisa non è velista quindi non è abbronzata
- C. Lisa non è abbronzata quindi non è una delle amiche di Alessandra
- D. Lisa è abbronzata quindi è un'amica di Alessandra
- E. Lisa è una velista abbronzata quindi è amica di Alessandra

Forme di sillogismi



Se Lisa non è abbronzata significa che non appartiene all'insieme verde e quindi non è amica di Alessandra (Risposta C)

La risposta A è errata: Lisa potrebbe essere abbronzata anche senza essere amica di Alessandra

La risposta B è errata: Lisa potrebbe essere abbronzata anche senza essere velista

La risposta D è errata: Lisa potrebbe essere amica di Alessandra anche se fosse abbronzata

La risposta E è errata: Lisa potrebbe non essere amica di Alessandra anche se fosse una velista

Forme di sillogismi

Un esempio particolare

Se gli studenti si applicano conseguiranno la promozione. Se questa affermazione è vera, quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera

- A. Verranno promossi solo gli studenti che si sono applicati
- B. Se uno studente è promosso allora si è applicato
- C. Verranno bocciati tutti gli studenti che non si sono applicati
- D. Se uno studente non si applica allora verrà bocciato
- E. Se uno studente è promosso non è detto che si sia applicato

Regole di deduzione

La proposizione in esame è equivalente alla seguente: « se gli studenti si applicano allora conseguiranno la promozione.

È una proposizione del tipo $A \rightarrow B$

A: gli studenti si applicano

B: conseguiranno la promozione

Se $A \rightarrow B$ è vera, è vera anche $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$ (contronominale)

Quindi è vera la seguente proposizione contronominale: « se uno studente non è stato promosso significa che non si è applicato»

Però è anche vero che: « se uno studente è promosso, non è detto che si sia applicato»



Attenzione alla risposta B: è errata. Se $A \rightarrow B$ è vera, è vera anche $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$, ma non è detto che sia vero il teorema inverso, cioè $B \rightarrow A$

Infatti il teorema diretto e il teorema inverso non sono equivalenti mentre il teorema diretto e il contronominale sono equivalenti

Il principio dei cassetti

Se abbiamo $N+1$ oggetti da disporre in N cassetti, allora possiamo avere la certezza che alla fine ci sarà almeno un cassetto che avrà almeno due oggetti al suo interno

Da questo principio consegue, per esempio, che:

- Se lanciamo tre monete, possiamo essere certi che almeno due di esse mostreranno la stessa faccia
- Se lanciamo 7 dadi, possiamo essere certi che in almeno due di essi uscirà lo stesso numero
- Se prendiamo 91 sacchetti della tombola e da ognuno estraiamo un numero possiamo essere certi che almeno due numeri tra quelli estratti saranno uguali
- Se in un teatro ci sono più di 366 persone possiamo essere certi che almeno due festeggino il proprio compleanno nello stesso giorno
- Se consideriamo una squadra di rugby (composta da 15 persone), siamo certi che almeno 2 fra gli atleti abbiano lo stesso segno zodiacale

Il principio dei cassetti



A una festa partecipano 8 studenti, i quali complessivamente possiedono 17 cellulari. Determinare quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera.

- A. c'è un unico ragazzo che possiede esattamente 3 cellulari
- B. Almeno un ragazzo possiede esattamente 3 cellulari
- C. C'è un ragazzo che possiede più di tre cellulari
- D. C'è un unico ragazzo che possiede almeno tre cellulari
- E. Almeno un ragazzo possiede almeno 3 cellulari