

# LA LOGICA

## ESERCIZI

### 1. Le proposizioni logiche

Indica quali, fra le seguenti frasi, sono proposizioni logiche e attribuisce a queste ultime il relativo valore di verità.

- 1 A** « $1+1$  è uguale a  $5$ »;  
«Non si può fumare in classe»;  
«W le vacanze!»;  
« $3$  è un divisore di  $6$ »;  
« $6$  è multiplo di  $1$ ».

- 1 B** « $2+1$  è uguale a  $3$ »;  
«Non si possono attraversare i binari»;  
«Silenzio, prego!»;  
« $3$  è il doppio di  $6$ »;  
« $4$  è multiplo di  $1$ ».

---

### 2. I connettivi logici e le espressioni

In ciascuna frase è contenuta più di una proposizione logica. Traduci ogni frase in una proposizione composta, usando una variabile logica per ogni proposizione semplice e i connettivi «e», «o», «se ..., allora».

- 2 A** «Maria studia al liceo e suona al conservatorio»;  
«Il gatto mangia o fa le fusa»;  
«Un quadrilatero con quattro angoli retti è un quadrato oppure un rettangolo».

- 2 B** «Un leone corre nella savana o va a caccia»;  
«Gigi lavora in un bar e alla sera studia»;  
«Un quadrilatero con le diagonali uguali è un quadrato oppure un rettangolo».

#### La negazione: non

Scrivi la negazione delle seguenti proposizioni.

- 3 A** «Il semaforo verde fa scorrere il traffico»;  
«In città non uso mai il motorino»;  
«Non ti regalerò nulla»;  
«Non è vero che Luigi non si sposa fra un mese».

- 3 B** «Il mese prossimo mi compro una bicicletta»;  
 «Non voglio stancarmi a camminare a piedi»;  
 «Non farai nulla di ciò che ti ho chiesto»;  
 «Non è vero che non mi piace la montagna».

Indica quali coppie di proposizioni sono formate da un enunciato e dalla sua negazione.

- 4 A** a) «Vedo un gatto nero», «Vedo un gatto bianco»;  
 b) «Esco di casa», «Resto in casa»;  
 c) «Salgo le scale», «Scendo le scale»;  
 d) «Vinco la partita»; «Perdo la partita».
- 4 B** a) «La scatola è piena», «La scatola è vuota»;  
 b) «La mia casa è più alta della tua», «La tua casa è alta almeno quanto la mia»;  
 c) «Il sole sorge alle 7», «Il sole sorge dopo le 7»;  
 d) « $n$  è un numero negativo», « $n$  è un numero positivo o nullo».

**La congiunzione: e**

Date le proposizioni:

$A$ : «14 è divisore di 7»,       $B$ : «14 è un numero pari»,       $C$ : «14 è minore di 9»,

traduci in parole ognuna delle seguenti proposizioni composte. Assegna infine i rispettivi valori di verità, compilando la tavola di verità relativa.

**5 A**

$A$	$B$	$C$	$A \wedge B$	$\bar{A} \wedge B$	$A \wedge \bar{C}$

**5 B**

$A$	$B$	$C$	$B \wedge C$	$\bar{B} \wedge C$	$C \wedge \bar{A}$

Costruisci la tavola di verità di ciascuna delle seguenti proposizioni composte.

**6 A**  $\bar{A} \wedge \bar{B}$ ;       $A \wedge (B \wedge \bar{A})$ ;       $(\bar{A} \wedge B)$ .

**6 B**  $\overline{A \wedge B}$ ;       $B \wedge (\bar{\bar{B}} \wedge A)$ ;       $(\overline{A \wedge \bar{B}})$ .

**La disgiunzione**

Costruisci la tavola di verità delle seguenti proposizioni composte.

**7 A**  $\bar{B} \vee A$ ,       $(A \wedge B) \vee \bar{A}$ ,       $\overline{A \vee B}$ ,       $\overline{A \vee \bar{B}} \wedge \bar{A}$ ;  
 $\bar{A} \vee B$ ,       $B \wedge (A \vee \bar{B})$ ,       $\overline{A \vee B}$ ,       $\overline{A \wedge \bar{B}} \vee \bar{A}$ .

$$\begin{array}{llll}
 \mathbf{7 B} & \overline{B} \vee \overline{A}, & B \vee (A \wedge \overline{B}), & \overline{\overline{A} \wedge B}, & (\overline{B} \vee \overline{A}) \wedge A; \\
 & \overline{B} \dot{\vee} A, & (B \dot{\vee} \overline{A}) \vee A, & \overline{A} \dot{\vee} \overline{B}, & \overline{A} \dot{\vee} \overline{\overline{B} \wedge A}.
 \end{array}$$

Completa la seguente tavola di verità.

**8 A**

$A$	$B$	$C$	$A \wedge B$	$B \vee C$	$\overline{C} \vee A$
			F	V	V

**8 B**

$A$	$B$	$C$	$A \dot{\vee} B$	$B \vee \overline{C}$	$\overline{A} \wedge C$
			V	V	F

### L'implicazione

Costruisci la tavola di verità delle seguenti proposizioni composte.

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{9 A} & B \rightarrow \overline{A}; & A \rightarrow \overline{B \vee A}; & (\overline{B} \vee B) \rightarrow A; \\
 & B \leftrightarrow \overline{A}; & (A \vee \overline{B}) \leftrightarrow (\overline{A} \dot{\vee} B); & \overline{\overline{A} \wedge B} \leftrightarrow B.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{9 B} & \overline{B} \rightarrow A; & (A \wedge \overline{A}) \rightarrow B; & B \rightarrow \overline{A \wedge B}; \\
 & \overline{B} \leftrightarrow A; & (\overline{A} \vee B) \leftrightarrow (A \dot{\vee} \overline{B}); & \overline{\overline{A} \vee B} \leftrightarrow A.
 \end{array}$$

Date le proposizioni  $A$  e  $B$ , traduci in simboli le seguenti proposizioni composte.

**10 A**  $A$ : «Ho fame»,  $B$ : «Vado al bar».

- «Ho fame, ma non vado al bar»;
- «O non ho fame, o vado al bar»;
- «Ho fame e vado al bar»;
- «Se ho fame, vado al bar».

$$[A \wedge \overline{B}; \overline{A} \vee B; A \wedge B; A \rightarrow B]$$

**10 B**  $A$ : «Devo studiare»,  $B$ : «Vado al cinema».

- «Devo studiare, ma vado al cinema»;
- «O devo studiare o non vado al cinema»;
- «Se non devo studiare, vado al cinema»;
- «Non devo studiare, ma non vado al cinema».

$$[A \wedge B; A \vee \overline{B}; \overline{A} \rightarrow B; \overline{A} \wedge \overline{B}]$$

Trasforma le seguenti espressioni in altrettante espressioni contenenti soltanto la congiunzione o la disgiunzione di proposizioni semplici o delle loro negazioni.

**11 A**  $(\bar{A} \rightarrow \bar{C}) \rightarrow B; \quad (A \vee \bar{C}) \leftrightarrow \bar{B}.$

$$\left[ (\bar{A} \wedge C) \vee B; \left( (\bar{A} \wedge C) \vee \bar{B} \right) \wedge (A \vee B \vee \bar{C}) \right]$$

**11 B**  $(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow \bar{C}; \quad (B \wedge \bar{A}) \leftrightarrow \bar{C}.$

$$\left[ (\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee \bar{C}; (A \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (C \vee (B \wedge \bar{A})) \right]$$

### Le tautologie e le contraddizioni

Utilizzando le tavole di verità, per ognuna delle seguenti espressioni indica se è una tautologia o una contraddizione.

**12 A**  $A \wedge (B \wedge \bar{A});$

$$(A \vee B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B});$$

$$\left[ (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B}) \right] \vee B.$$

[C; T; T]

**12 B**  $\overline{A \wedge B} \vee A;$

$$(A \wedge B) \vee (\bar{A} \vee \bar{B});$$

$$\bar{A} \vee \left[ (A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) \right].$$

[T; T; T]

### 3. L'equivalenza di espressioni logiche

Completando le tavole di verità, stabilisci se le seguenti coppie di espressioni logiche sono equivalenti.

**13 A**  $A \dot{\vee} (B \wedge C), \quad (A \dot{\vee} B) \wedge (A \dot{\vee} C);$

$$\overline{A \vee \bar{B}},$$

$$\bar{A} \wedge B;$$

$$\overline{A \wedge B} \vee \bar{A},$$

$$\bar{A} \vee \bar{B}.$$

[no; sì; sì]

**13 B**  $A \vee (B \dot{\vee} C), \quad (A \vee B) \dot{\vee} (A \vee C);$

$$\overline{A \wedge B},$$

$$A \vee \bar{B};$$

$$A \wedge \overline{B \vee A},$$

$$\bar{B} \wedge \bar{A}.$$

[no; sì; no]

Associa le espressioni equivalenti senza scrivere le tavole di verità.

- 14 A** 1.  $(\bar{A} \vee B) \wedge (\overline{A \wedge C})$                       A.  $A \wedge (\overline{B \wedge C})$   
2.  $\overline{(A \wedge \bar{C}) \vee (B \wedge \bar{C})}$                       B.  $\bar{A} \vee (B \wedge \bar{C})$   
3.  $(A \wedge B) \vee (\overline{A \vee C})$                       C.  $(\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge C$

[1-B; 2-C; 3-A]

- 14 B** 1.  $(\overline{A \wedge \bar{B}}) \wedge (\overline{A \wedge C})$                       A.  $A \vee (\bar{B} \wedge C)$   
2.  $(\overline{A \wedge B}) \wedge (A \vee C)$                       B.  $\bar{A} \vee (B \wedge \bar{C})$   
3.  $(A \wedge \bar{C}) \vee (B \wedge \bar{C})$                       C.  $(\overline{A \wedge B}) \wedge \bar{C}$

[1-B; 2-A; 3-C]

---

#### 4. Forme di ragionamento valide

Per ognuna delle seguenti forme di ragionamento, indica se è valida o no. In caso affermativo, scrivi se è stato applicato lo schema del *modus ponens* o quello del *modus tollens*.

- 15 A** a) «Se leggi, ti informi»,  
«Ti informi»,  
«Leggi»;
- b) «Se miagola, è un gatto»,  
«Non è un gatto»,  
«Non miagola»;
- c) «Se c'è il verde, passi»,  
«C'è il verde»,  
«Passi».

[a) non valida; b) *modus tollens*; c) *modus ponens*]

- 15 B** a) «Se hai fame, mangi»,  
«Non mangi»,  
«Non hai fame»;
- b) «Se parli, ti ascolto»,  
«Ti ascolto»,  
«Parli»;
- c) «Se vai in discoteca, fai tardi»,  
«Vai in discoteca»,  
«Fai tardi».

[a) *modus tollens*; b) non valida; c) *modus ponens*]

Fornisci, se possibile, le conclusioni alle seguenti coppie di premesse, indicando lo schema di ragionamento seguito (*modus ponens* o *modus tollens*).

- 16 A** a) «Ogni cittadino ha diritto di voto», «Sei un cittadino»;  
b) «Se il triangolo  $ABC$  ha i lati  $AB$  e  $BC$  congruenti, è isoscele», « $AB \neq BC$ »;  
c) «Tutti i politici sono onesti», «Il Sig. Rossi non è onesto».  
[a) *modus ponens*; b) nessun modo; c) *modus tollens*]

- 16 B** a) «Can che abbaia non morde», «Il cane mi morde»;  
b) «Se non parli, mai mentirai», «Hai parlato»;  
c) «Se ti piace la musica jazz, devi assolutamente comprare questo CD», «Ti piace la musica jazz».  
[a) *modus tollens*; b) nessun modo; c) *modus ponens*]
- 

## 5. La logica e gli insiemi

Considera i tre enunciati aperti:

$A(x)$ : « $x$  è un'automobile con cilindrata superiore ai 2000 cc»;  
 $B(x)$ : « $x$  è un'automobile di marca straniera»;  
 $C(x)$ : « $x$  è un'automobile con motore a benzina».

Scegli un opportuno insieme universo  $U$  e disegna l'insieme di verità dei tre enunciati  $A(x)$ ,  $B(x)$  e  $C(x)$ . Rappresenta, infine, con i diagrammi di Eulero-Venn l'insieme di verità dei seguenti enunciati composti.

**17 A**  $\bar{C}$ ,  $\bar{B} \wedge \bar{A}$ ,  $\overline{A \vee C}$ ,  $\bar{A} \vee B$ ,  $(C \wedge B) \vee A$ .

**17 B**  $\bar{B}$ ,  $C \vee A$ ,  $\overline{B \wedge C}$ ,  $\bar{B} \vee A$ ,  $(A \wedge B) \vee C$ .

---

## 6. I quantificatori

Trasforma i seguenti enunciati aperti in proposizioni utilizzando i due quantificatori « $\forall$ » e « $\exists$ ». Tenendo presente l'insieme universo  $U$  assegnato, scrivi di fianco a ogni proposizione il suo valore di verità.

- 18 A** a)  $U = \square$ ,  $A(x)$ : « $x$  è minore di 0»;  
b)  $U = \{\text{triangoli isosceli}\}$ ,  $B(x)$ : « $x$  è un triangolo equilatero».

- 18 B** a)  $U = \{\text{rettangoli}\}$ ,  $B(x)$ : « $x$  è un quadrato»;  
b)  $U = \square$ ,  $C(x)$ : « $x$  è il reciproco di 10».

Dato l'insieme universo  $U$  e gli enunciati semplici aperti  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$ , trasforma gli enunciati composti seguenti in proposizioni utilizzando i quantificatori  $\exists$  e  $\forall$ , e scrivi per ognuna il valore di verità.

**19 A**  $U = \square$ ,  $A(x)$ : « $x$  è divisibile per 4»,  
 $B(x)$ : « $x$  è pari»,  
 $C(x)$ : « $x$  è multiplo di 3»,  
 $A(x) \vee B(x)$ ;  $A(x) \rightarrow B(x)$ ;  $C(x) \wedge B(x)$ ;  $B(x) \wedge \bar{C}(x)$ .

**19 B**  $U = \{x \mid x \in \square, 0 \leq x \leq 9\}$ ,  $A(x)$ : « $3 < x < 7$ »,  
 $B(x)$ : « $0 \leq x \leq 3$ »,  
 $C(x)$ : « $3 \leq x \leq 9$ »,  
 $A(x) \wedge B(x)$ ;  $C(x) \rightarrow B(x)$ ;  $B(x) \rightarrow \bar{A}(x)$ ;  $[A(x) \vee B(x)] \wedge \bar{C}(x)$ .

### I sillogismi

Stabilisci se i seguenti sillogismi sono validi, utilizzando i diagrammi di Venn.

#### 20 A

- a) «Nessun gatto è un cetaceo».  
«Ogni gatto è un mammifero».  


---

«Qualche mammifero non è un cetaceo».
- b) «Ogni rombo è un parallelogramma».  
«Ogni parallelogramma è un quadrilatero».  


---

«Qualche quadrilatero è un rombo».
- c) «Qualche persona ha gli occhi azzurri».  
«Ogni persona ha i capelli biondi».  


---

«Qualche persona coi capelli biondi ha gli occhi azzurri».

#### 20 B

- a) «Nessun roditore è un pesce».  
«Ogni roditore è un mammifero».  


---

«Tutti i mammiferi sono pesci».
- b) «Ogni quadrato è un rettangolo».  
«Ogni rettangolo è un quadrilatero».  


---

«Qualche quadrilatero è un quadrato».
- c) «Alcuni quadrupedi sono cavalli».  
«Tutti i cavalli hanno gli zoccoli».  


---

«Qualche quadrupede ha gli zoccoli».