Integrali tripli: esercizi svolti

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali tripli sugli insiemi specificati:

a) $\displaystyle\int_\Omega xyz\,dx\,dy\,dz, \quad \Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\right\}$

$\left[\frac{1}{8}\right]$

b) $\displaystyle\int_\Omega 2z\,dx\,dy\,dz, \quad \Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 2\sqrt{x^2+y^2} < z < x+2\right\}$

$\left[\frac{64}{27}\sqrt{3}\pi\right]$

c) $\displaystyle\int_\Omega \frac{x^2}{x^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$

$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 1 < x^2+y^2+z^2 < 2,\ x^2-y^2+z^2 < 0,\ y > 0\right\}$

$\left[\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{2}-6\right)\right]$

d) $\displaystyle\int_\Omega \left(x^2+y^2+z^2-1\right)\,dx\,dy\,dz,$

$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2 < 2,\ x^2+y^2 < z\right\}$ $\quad\left[\pi\left(\frac{4}{15}\sqrt{2}-\frac{19}{60}\right)\right]$

e) $\displaystyle\int_\Omega (x+z)\,dx\,dy\,dz, \quad \Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x>0,\ y>0,\ z>0,\ x+y+z<1\right\}$

$\left[\frac{1}{12}\right]$

f) $\displaystyle\int_\Omega x|z|\,dx\,dy\,dz, \quad \Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+z^2} < y < \frac{1}{2}x+3\right\}$

$\left[\frac{384}{5}\right]$

g) $\displaystyle\int_\Omega 2x\,dx\,dy\,dz, \quad \Omega = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x>0,\ 0<y<2z+1,\ x^2+y^2+4z^2<1\Big\}$

$\Big[\frac{\pi}{16}+\frac{1}{6}\Big]$

h) $\displaystyle\int_\Omega y\,dx\,dy\,dz,$

$\Omega = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+y^2-2x<0,\ 0<z<x,\ x^2+y^2<1,\ y>0\Big\}$ $\Big[\frac{5}{48}\Big]$

i) $\displaystyle\int_\Omega \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz, \quad \Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ 1<x^2+y^2<2x,\ 0<z<\frac{x^2+y^2}{x^2}\right\}$

$\Big[\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\Big]$

l) $\displaystyle\int_\Omega 2z\,dx\,dy\,dz,$

$\Omega = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ 0<y<x^2,\ x^2-2x+y^2<0,\ 0<z<\sqrt{xy}\Big\}$ $\Big[\frac{13}{24}\Big]$

m) $\displaystyle\int_\Omega \log\sqrt{x^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$

$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ 1<x^2+z^2<e^2,\ z<x,\ 0<y<\frac{1}{x^2+z^2}\right\}$ $\big[\frac{\pi}{2}\big]$

n) $\displaystyle\int_\Omega y^2|z|\,dx\,dy\,dz, \quad \Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ 1<x^2+y^2<2x,\ 0<z<\frac{2}{x}\right\}$

$\Big[2\pi-3\sqrt{3}\Big]$

o) $\displaystyle\int_\Omega |z|\,dx\,dy\,dz, \quad \Omega = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+y^2<z^2-1,\ 2x^2+y^2+z^2<2\Big\}$

$\Big[\frac{\sqrt{6}}{12}\pi\Big]$

p) $\displaystyle\int_\Omega x^2|y|\,dx\,dy\,dz, \quad \Omega = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+y^2+z^2<1,\ 0<z<x+1\Big\}$

$\Big[\frac{\pi}{48}+\frac{2}{45}\Big]$

Svolgimento

I grafici degli insiemi di integrazione di questi esercizi si trovano sulla pagina web
http://calvino.polito.it/~lancelot/didattica/analisi2/esercizi/grafici_integrali_tripli_esercizio_1.html
.

---

a) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega xyz\,dx\,dy\,dz$, dove

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\right\}.$$

L'insieme Ω è un cubo con spigoli paralleli agli assi coordinati. Poichè la funzione integranda $f(x, y, z) = xyz$ è il prodotto di una funzione di x, una di y e una di z, si ha che

$$\int_\Omega xyz\,dx\,dy\,dz = \left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 y\,dy\right)\left(\int_0^1 z\,dz\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

b) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega 2z\,dx\,dy\,dz$, dove

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2\sqrt{x^2 + y^2} < z < x + 2\right\}.$$

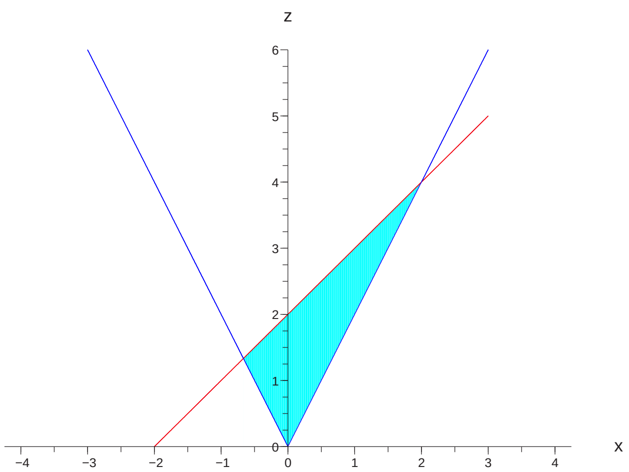

Fig. 1: Sezione dell'insieme Ω con il piano xz (in azzurro).

Osserviamo che Ω è l'insieme dei punti compresi fra il semicono di equazione $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ e il piano di equazione $z = x+2$. Integrando per fili paralleli all'asse z, si ha che

$$\int_\Omega 2z\,dx\,dy\,dz = 2\int_D \left[\int_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{x+2} z\,dz\right] dx\,dy =$$

$$= 2\int_D \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{x+2} dx\,dy = \int_D \left[(x+2)^2 - 4\left(x^2+y^2\right)\right] dx\,dy,$$

dove

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 2\sqrt{x^2+y^2} < x+2\right\}.$$

Osserviamo che

$$2\sqrt{x^2+y^2} < x+2 \quad\iff\quad \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} < 1.$$

Quindi D è l'insieme dei punti interni all'ellisse di equazione $\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$.

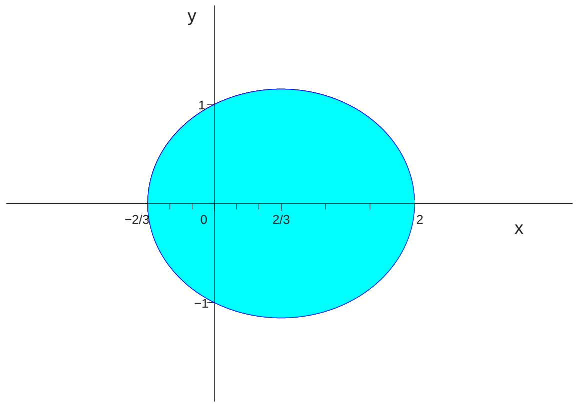

Fig. 2: L'insieme D (in azzurro).

Passiamo in coordinate ellittiche nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\rho\cos\vartheta \\ y = \frac{2}{3}\sqrt{3}\rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \ge 0,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \frac{8}{9}\sqrt{3}\rho.$$

Allora

$$(x,y)\in D \quad\iff\quad \begin{cases} 0 \le \rho < 1 \\ 0 \le \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $D = \Phi(D')$, dove

$$D' = \left\{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le \rho < 1, \ 0 \le \vartheta < 2\pi\right\}.$$

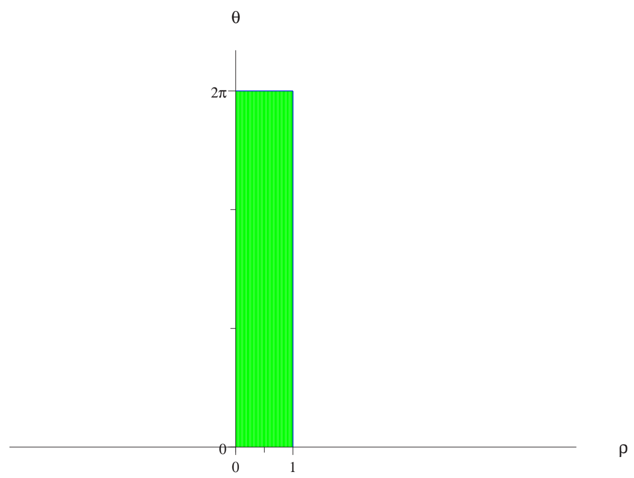

Fig. 3: L'insieme D' (in verde).

Quindi si ha

$$\int_\Omega 2z\, dx\, dy\, dz = \int_D \left[(x+2)^2 - 4\left(x^2+y^2\right)\right]\, dx\, dy =$$

$$= \int_D \left(4 + 4x - 3x^2 - 4y^2\right)\, dx\, dy = 3\int_D \left[\frac{16}{9} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}y^2\right]\, dx\, dy =$$

$$= \frac{128}{27}\sqrt{3}\int_{D'} \left(\rho - \rho^3\right)\, d\rho\, d\vartheta =$$

essendo D' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= \frac{128}{27}\sqrt{3}\left(\int_0^1 \left(\rho - \rho^3\right)\, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right) = \frac{256}{27}\sqrt{3}\pi\left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = \frac{64}{27}\sqrt{3}\pi.$$

c) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{x^2}{x^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$, dove

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2,\ x^2 - y^2 + z^2 < 0,\ y > 0\right\}.$$

L'insieme Ω è la parte dello spazio compresa fra le sfere di equazione $x^2+y^2+z^2 = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e il semicono $y = \sqrt{x^2 + z^2}$.

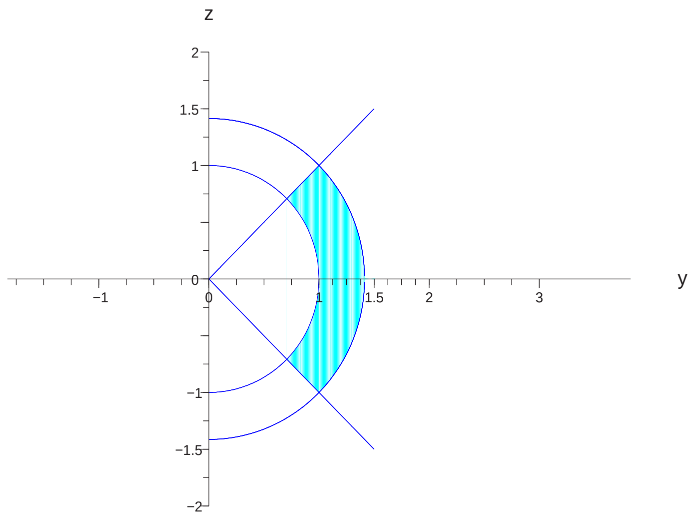

Fig. 4: Sezione dell'insieme Ω con il piano yz (in azzurro).

Passiamo in coordinate sferiche in cui la colatitudine è misurata rispetto all'asse y. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = \rho\cos\vartheta \\ z = \rho\sin\vartheta\sin\varphi, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta,\varphi)| = \rho^2 \sin\vartheta.$$

Si ha che

$$(x,y,z) \in \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 < \rho^2 < 2 \\ \sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta < 0 \\ \cos\vartheta > 0. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 < \rho < \sqrt{2},\ \sin^2\vartheta < \cos^2\vartheta,\ 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right\} =$$

$$= \left\{(\rho,\vartheta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 < \rho < \sqrt{2},\ 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{4},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right\}.$$

Allora si ha che

$$\int_\Omega \frac{x^2}{x^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \int_{\Omega'} \rho^2 \sin\vartheta \cos^2\varphi \, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

essendo Ω' un parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi coordinati e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ, di una di ϑ e di una di φ, si ottiene

$$= \left(\int_1^{\sqrt{2}} \rho^2\, d\rho\right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta\, d\vartheta\right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_1^{\sqrt{2}} \left[-\cos\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{2} - 6\right).$$

d) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega \left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)\, dx\, dy\, dz$, dove

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 < 2,\ x^2 + y^2 < z\right\}.$$

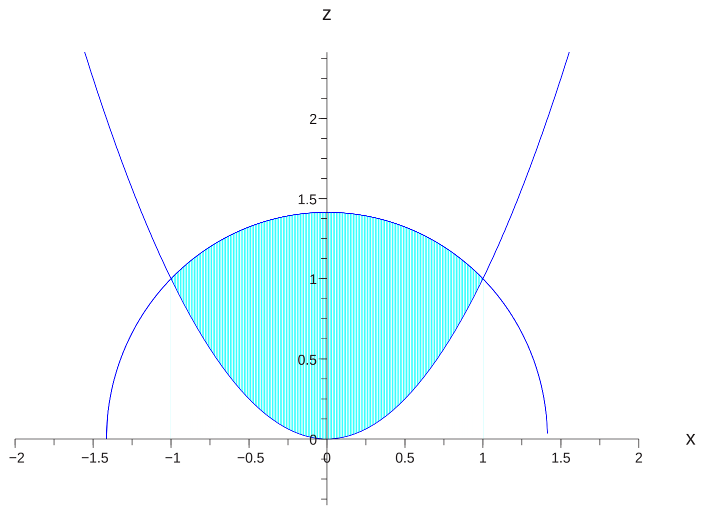

Fig. 5: Sezione dell'insieme Ω con il piano xz (in azzurro).

L'insieme Ω è la parte dello spazio compresa fra la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2 = 2$ e il paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = z, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho, y, \vartheta)| = \rho.$$

Si ha che

$$(x, y, z) \in \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^2 + z^2 < 2 \\ z > \rho^2 \\ 0 < \rho < 1. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{(\rho, \vartheta, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < \rho < 1,\ 0 \leq \vartheta < 2\pi,\ \rho^2 < z < \sqrt{2 - \rho^2}\right\}.$$

Allora si ha che

$$\int_{\Omega} \left(x^2+y^2+z^2-1\right)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \left(\rho^2+z^2-1\right)\rho\,d\rho\,d\vartheta\,dz =$$

integrando per fili paralleli all'asse z

$$= \int_D \left[\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} \left(\rho^2+z^2-1\right)\rho\,dz\right] d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_D \rho \left[\left(\rho^2-1\right)z + \frac{1}{3}z^3\right]_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_D \rho \left[\left(\rho^2-1\right)\sqrt{2-\rho^2} + \frac{1}{3}\left(2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\rho^2-1\right)\rho^2 - \frac{1}{3}\rho^6\right] d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_D \left[\rho^3\sqrt{2-\rho^2} - \rho\sqrt{2-\rho^2} + \frac{1}{3}\rho\left(2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}} - \rho^5 + \rho^3 - \frac{1}{3}\rho^7\right] d\rho\,d\vartheta,$$

dove $D = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < \rho < 1,\ 0 \le \vartheta < 2\pi\right\}$.

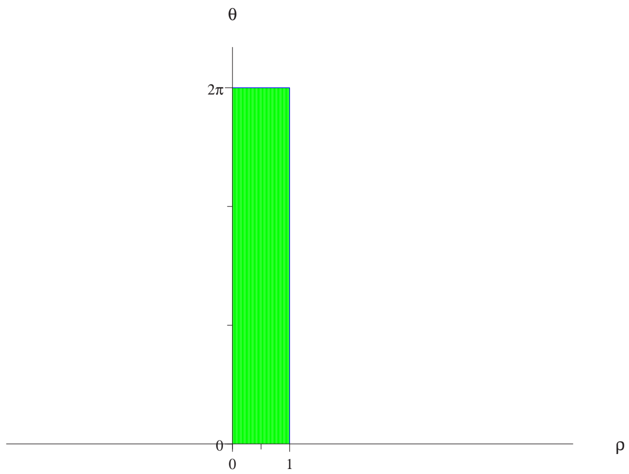

Fig. 6: L'insieme D (in verde).

Essendo D un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$\int_{\Omega} \left(x^2+y^2+z^2-1\right)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right) \int_0^1 \left[\rho^3\sqrt{2-\rho^2} - \rho\sqrt{2-\rho^2} + \frac{1}{3}\rho\left(2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}} - \rho^5 + \rho^3 - \frac{1}{3}\rho^7\right] d\rho =$$

integrando per parti il primo addendo

$$= 2\pi \left(\left[-\frac{1}{3}\rho^2\left(2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 \rho\left(2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\,d\rho +\right.$$

$$-\left[-\frac{1}{3}\left(2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{5}\left(2-\rho^2\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1+\left[-\frac{1}{6}\rho^6+\frac{1}{4}\rho^4-\frac{1}{24}\rho^8\right]_0^1\right)=$$

$$=2\pi\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{5}\left(2-\rho^2\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{15}+\frac{4}{15}\sqrt{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{24}\right)=$$

$$=2\pi\left(-\frac{2}{15}+\frac{8}{15}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{15}+\frac{4}{15}\sqrt{2}+\frac{1}{24}\right)=\pi\left(\frac{4}{15}\sqrt{2}-\frac{19}{60}\right).$$

e) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega (x+z)\,dx\,dy\,dz$, dove

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x>0,\ y>0,\ z>0,\ x+y+z<1\right\}.$$

L'insieme Ω è un tetraedro. Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$\int_\Omega (x+z)\,dx\,dy\,dz=\int_D\left(\int_0^{1-x-y}(x+z)\,dz\right)dx\,dy=\int_D\left[xz+\frac{1}{2}z^2\right]_0^{1-x-y}dx\,dy=$$

$$=\int_D\left[x(1-x-y)+\frac{1}{2}(1-x-y)^2\right]dx\,dy,$$

dove $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<1,\ 0<y<1-x\right\}$.

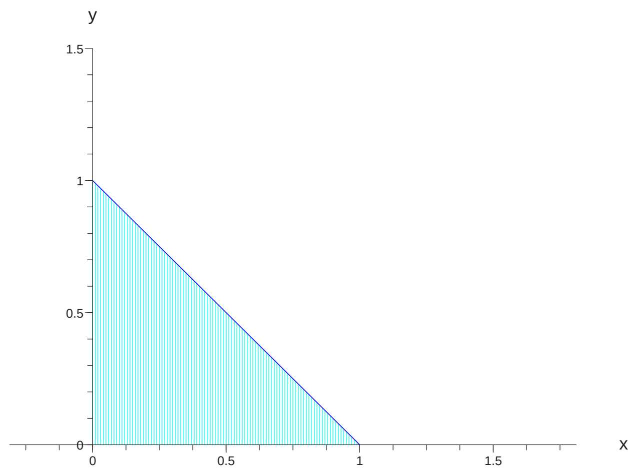

Fig. 7: L'insieme D (in azzurro).

Essendo D y-semplice, si ottiene

$$\int_\Omega (x+z)\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left[x(1-x-y)+\frac{1}{2}(1-x-y)^2\right]dy\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left[-\frac{1}{2}(1-x-y)^2-\frac{1}{6}(1-x-y)^3\right]_0^{1-x}dx=$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x(1-x)^2 + \frac{1}{6}(1-x)^3\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}(1-x)^3\right] dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{24}(1-x)^4\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

f) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega x|z|\,dx\,dy\,dz$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x^2+z^2} < y < \frac{1}{2}x + 3\right\}.$$

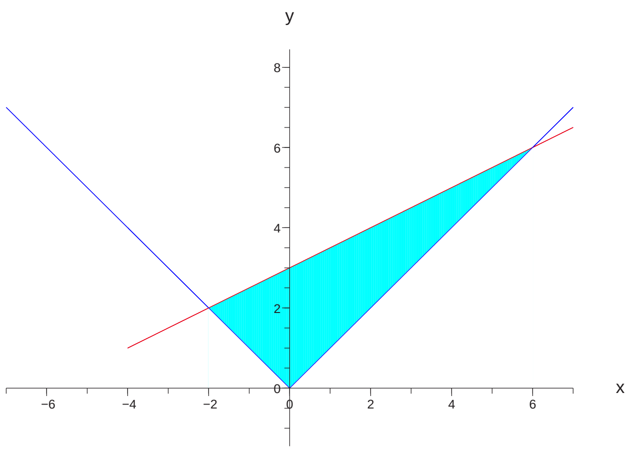

Fig. 8: Sezione dell'insieme Ω con il piano xy (in azzurro).

Osserviamo che Ω è l'insieme dei punti compresi fra il semicono di equazione $y = \sqrt{x^2+z^2}$ e il piano di equazione $y = \frac{1}{2}x + 3$. Osserviamo che sia la funzione integranda $f(x,y,z) = x|z|$ che l'insieme Ω presentano una simmetria rispetto al piano xy. Infatti, se $(x,y,z) \in \Omega$, allora anche $(x,y,-z) \in \Omega$ e $f(x,y,-z) = f(x,y,z)$. Ne segue che

$$\int_\Omega x|z|\,dx\,dy\,dz = 2\int_A xz\,dx\,dy\,dz,$$

dove

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x^2+z^2} < y < \frac{1}{2}x + 3, \ z > 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < z < \sqrt{y^2-x^2}, \ |x| < y < \frac{1}{2}x + 3\right\}. \end{aligned}$$

Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$\int_{\Omega} x|z|\,dx\,dy\,dz = 2\int_{A} xz\,dx\,dy\,dz = 2\int_{D}\left(\int_{0}^{\sqrt{y^2-x^2}} xz\,dz\right)dx\,dy =$$

$$= 2\int_{D}\left[\frac{1}{2}xz^2\right]_{0}^{\sqrt{y^2-x^2}}dx\,dy = \int_{D} x\left(y^2-x^2\right)dx\,dy,$$

dove

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ |x|<y<\frac{1}{2}x+3\right\} = D_1\cup D_2,$$

con

$$D_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ -2<x<0,\ -x<y<\frac{1}{2}x+3\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ 0\le x<6,\ x<y<\frac{1}{2}x+3\right\}.$$

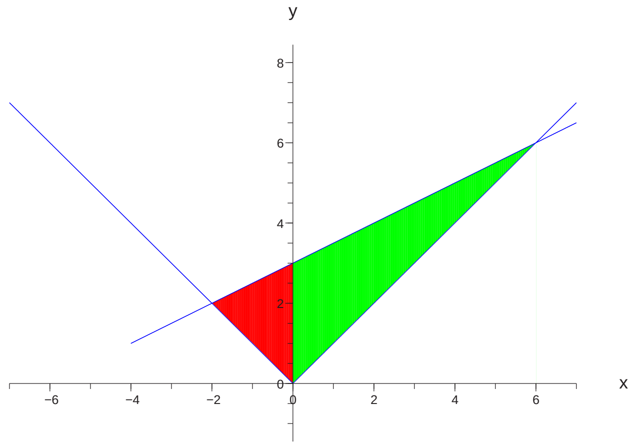

Fig. 9: L'insieme $D = D_1\cup D_2$, con D_1 in rosso e D_2 in verde.

Essendo D_1 e D_2 y-semplici, si ottiene

$$\int_{\Omega} x|z|\,dx\,dy\,dz = \int_{D} x\left(y^2-x^2\right)dx\,dy =$$

$$= \int_{D_1} x\left(y^2-x^2\right)dx\,dy + \int_{D_2} x\left(y^2-x^2\right)dx\,dy =$$

$$= \int_{-2}^{0}\left(\int_{-x}^{\frac{1}{2}x+3}\left(xy^2-x^3\right)dy\right)dx + \int_{0}^{6}\left(\int_{x}^{\frac{1}{2}x+3}\left(xy^2-x^3\right)dy\right)dx =$$

$$= \int_{-2}^{0}\left[\frac{1}{3}xy^3-x^3y\right]_{-x}^{\frac{1}{2}x+3}dx + \int_{0}^{6}\left[\frac{1}{3}xy^3-x^3y\right]_{x}^{\frac{1}{2}x+3}dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} \left[\frac{1}{3}x\left(\frac{1}{2}x+3\right)^3 - x^3\left(\frac{1}{2}x+3\right) + \frac{1}{3}x^4 - x^4 \right] dx +$$

$$+ \int_{0}^{6} \left[\frac{1}{3}x\left(\frac{1}{2}x+3\right)^3 - x^3\left(\frac{1}{2}x+3\right) - \frac{1}{3}x^4 + x^4 \right] dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} \left(-\frac{9}{8}x^4 - \frac{9}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 9x \right) dx + \int_{0}^{6} \left(\frac{5}{24}x^4 - \frac{9}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 9x \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{9}{40}x^5 - \frac{9}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 \right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{24}x^5 - \frac{9}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 \right]_{0}^{6} = \frac{384}{5}.$$

g) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega 2x\,dx\,dy\,dz$, dove

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x > 0,\ 0 < y < 2z+1,\ x^2 + y^2 + 4z^2 < 1 \right\}.$$

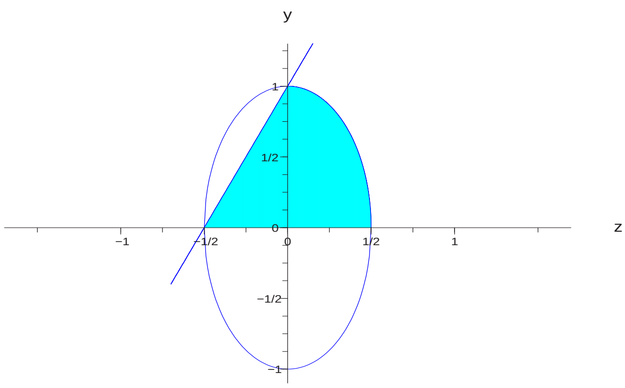

Fig. 10: Sezione dell'insieme Ω con il piano zy (in azzurro).

Osserviamo che Ω è l'insieme dei punti compresi fra l'ellissoide di equazione $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ e i piani di equazione $x = 0$, $y = 0$ e $y = 2z + 1$.

Integrando per fili paralleli all'asse x si ottiene

$$\int_\Omega 2x\,dx\,dy\,dz = 2\int_D \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2-4z^2}} x\,dx \right) dy\,dz =$$

$$= 2\int_D \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{1-y^2-4z^2}} dy\,dz = \int_D \left(1 - y^2 - 4z^2\right) dy\,dz,$$

dove

$$D = \left\{ (z,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < y < 2z+1,\ y^2 + 4z^2 < 1 \right\} = D_1 \cup D_2,$$

con

$$D_1 = \left\{(z,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\frac{1}{2} < z \le 0, \ 0 < y < 2z+1\right\},$$
$$D_2 = \left\{(z,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 + 4z^2 < 1, \ y,z > 0\right\}.$$

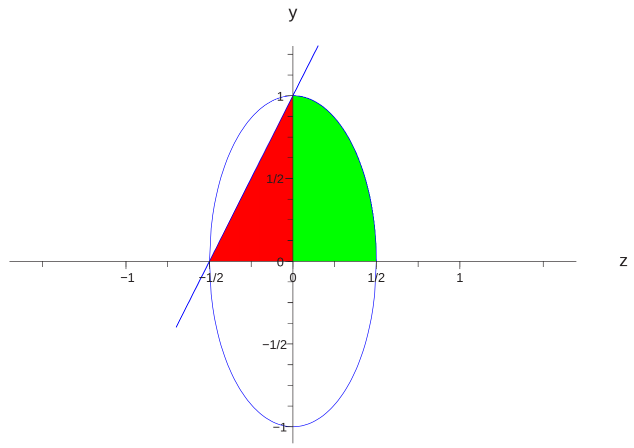

Fig. 11: L'insieme $D = D_1 \cup D_2$, con D_1 in rosso e D_2 in verde.

Quindi si ha che

$$\int_\Omega 2x\,dx\,dy\,dz = \int_D \left(1 - y^2 - 4z^2\right) dy\,dz =$$
$$= \int_{D_1} \left(1 - y^2 - 4z^2\right) dy\,dz + \int_{D_2} \left(1 - y^2 - 4z^2\right) dy\,dz.$$

Calcoliamo separatamente i due integrali. Essendo D_1 y-semplice, si ha che

$$\int_{D_1} \left(1 - y^2 - 4z^2\right) dy\,dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left[\int_0^{2z+1} \left(1 - y^2 - 4z^2\right) dy\right] dz =$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left[\left(1 - 4z^2\right) y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^{2z+1} dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(-\frac{32}{3}z^3 - 8z^2 + \frac{2}{3}\right) dz =$$
$$= \left[-\frac{8}{3}z^4 - \frac{8}{3}z^3 + \frac{2}{3}z\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{1}{6}.$$

Essendo D_2 la parte del I quadrante compresa nell'ellisse di equazione $y^2 + \frac{z^2}{\frac{1}{4}} = 1$, passiamo in coordinate ellittiche nel piano zy. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} z = \frac{1}{2}\rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \ge 0, \ 0 \le \vartheta \le 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \frac{1}{2}\rho.$$

Allora

$$(z,y) \in D_2 \quad \iff \quad \begin{cases} 0 < \rho < 1 \\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $D_2 = \Phi(D_2')$, dove

$$D_2' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < \rho < 1, \ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Quindi si ha che

$$\int_{D_2} \left(1 - y^2 - 4z^2\right) dy\, dz = \int_{D_2'} \frac{1}{2}\rho \left(1 - \rho^2\right) d\rho\, d\vartheta =$$

ed essendo D_2' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\right) \left[\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\rho - \rho^3\right) d\rho\right] = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

In conclusione si ha che

$$\int_\Omega 2x\, dx\, dy\, dz = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{6}.$$

h) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega y\, dx\, dy\, dz$, dove

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - 2x < 0, \ 0 < z < x, \ x^2 + y^2 < 1, \ y > 0 \right\}.$$

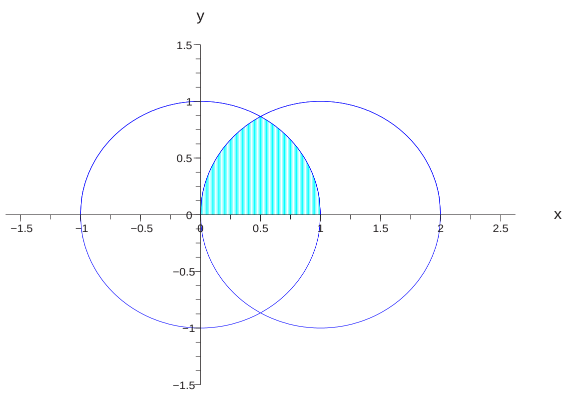

Fig. 12: Proiezione dell'insieme Ω sul piano xy (in azzurro).

L'insieme Ω è la parte dello spazio compresa fra i cilindri di equazione $(x-1)^2+y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$ e i piani $y = 0$, $z = 0$ e $z = x$.

Passiamo in coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse z. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = z, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta,z)| = \rho.$$

Si ha che

$$(x,y,z) \in \Omega \quad \iff \quad \begin{cases} 0 < \rho < 1 \\ \rho < 2\cos\vartheta \\ 0 < z < \rho\cos\vartheta \\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{ (\rho,\vartheta,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2},\ 0 < \rho < 1,\ \rho < 2\cos\vartheta,\ 0 < z < \rho\cos\vartheta \right\}.$$

Allora si ha che

$$\int_\Omega y\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \rho^2 \sin\vartheta\,d\rho\,dy\,d\vartheta =$$

integrando per fili paralleli all'asse z

$$= \int_D \left(\int_0^{\rho\cos\vartheta} \rho^2 \sin\vartheta\,dz \right) d\rho\,d\vartheta = \int_D \rho^2 \sin\vartheta \big[z \big]_0^{\rho\cos\vartheta} d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_D \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta,$$

dove $D = D_1 \cup D_2$, con

$$D_1 = \left\{ (\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < \rho < 1,\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{3} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{\pi}{3} \leq \vartheta < \frac{\pi}{2},\ 0 < \rho < 2\cos\vartheta \right\}.$$

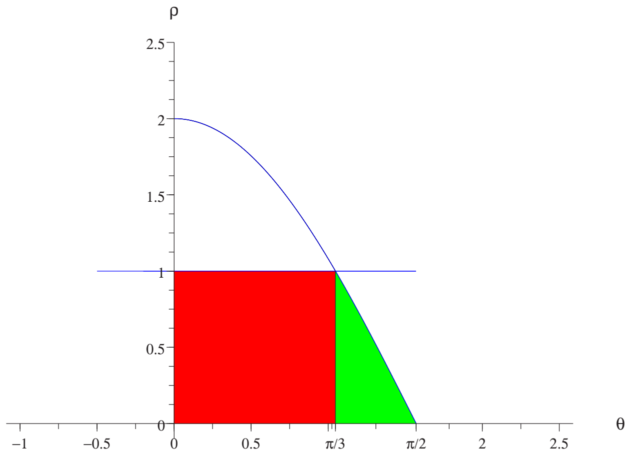

Fig. 13: L'insieme $D = D_1 \cup D_2$, con D_1 in rosso e D_2 in verde.

Ne segue che

$$\int_\Omega y\,dx\,dy\,dz = \int_D \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_{D_1} \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta + \int_{D_2} \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta\,d\rho\,d\vartheta =$$

essendo sia D_1 che D_2 ρ-semplici e la funzione integranda prodotto di una funzione in ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= \left(\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\vartheta \sin\vartheta\,d\vartheta\right) + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin\vartheta \left[\int_0^{2\cos\vartheta} \rho^3\,d\rho\right] d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 \left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \sin\vartheta \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^{2\cos\vartheta} d\vartheta =$$

$$= \frac{3}{32} + 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\vartheta \sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{3}{32} + 4\left[-\frac{1}{6}\cos^6\vartheta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{48}.$$

i) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 < x^2+y^2 < 2x,\ 0 < z < \frac{x^2+y^2}{x^2}\right\}.$$

L'insieme Ω è la parte dello spazio esterna al cilindro di equazione $x^2+y^2=1$, interna al cilindro di equazione $(x-1)^2+y^2=1$ e delimitata dal piano $z=0$ e dal grafico della funzione $g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2}$.

Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$\int_\Omega \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_0^{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dz\right) dx\,dy = \int_D \frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy,$$

dove $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; 1 < x^2+y^2 < 2x\right\}$.

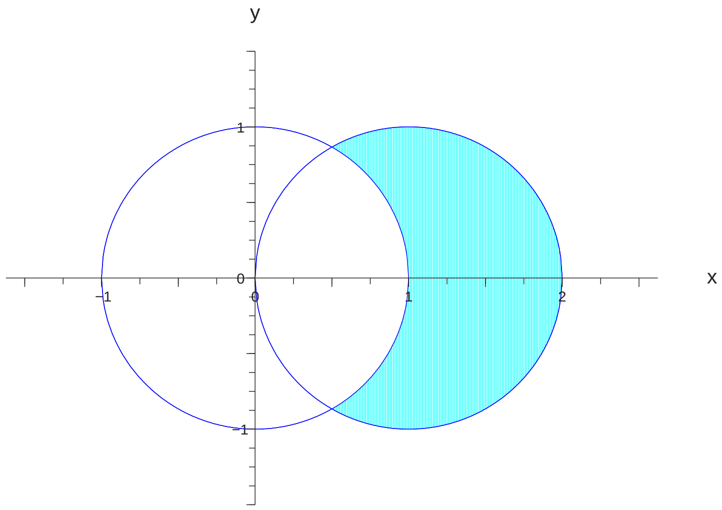

Fig. 14: L'insieme D (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano xy. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \;\; -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho.$$

Si ha che

$$(x,y) \in D \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 1 < \rho < 2\cos\vartheta \\ -\frac{\pi}{3} < \vartheta < \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $D = \Phi(D')$, dove

$$D' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \;\; -\frac{\pi}{3} < \vartheta < \frac{\pi}{3}, \;\; 1 < \rho < 2\cos\vartheta\right\}.$$

Allora si ha che

$$\int_\Omega \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_D \frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy = \int_{D'} \frac{\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}\rho\,d\rho\,d\vartheta =$$

essendo D' ρ-semplice si ottiene

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} \frac{\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}\rho\,d\rho\right) d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}\left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^{2\cos\vartheta} d\vartheta =$$

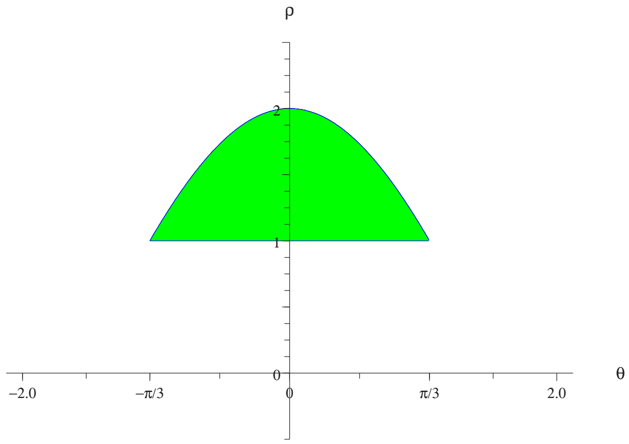

Fig. 15: L'insieme D' (in verde).

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}\left(4\cos^2\vartheta - 1\right) d\vartheta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(4\sin^2\vartheta - \tan^2\vartheta\right) d\vartheta =$$

essendo $\int \sin^2\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta) + c$ e $\int \tan^2\vartheta\, d\vartheta = \tan\vartheta - \vartheta + c$, si ottiene

$$= \frac{1}{2}\Big[2(\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta) - \tan\vartheta + \vartheta\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

l) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega 2z\, dx\, dy\, dz$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < y < x^2,\ x^2 - 2x + y^2 < 0,\ 0 < z < \sqrt{xy}\right\}.$$

L'insieme Ω è la parte dello spazio interna al cilindro di equazione $(x-1)^2+y^2 = 1$ delimitata dai piani $y = 0$ e $z = 0$ e dai grafici delle funzioni $g(x,y) = \sqrt{xy}$ e $h(x,z) = x^2$.

Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$\int_\Omega 2z\, dx\, dy\, dz = \int_D \left(\int_0^{\sqrt{xy}} 2z\, dz\right) dx\, dy = \int_D \left[z^2\right]_0^{\sqrt{xy}} dx\, dy = \int_D xy\, dx\, dy,$$

dove $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < y < x^2,\ x^2 - 2x + y^2 < 0,\ x > 0\right\}$.

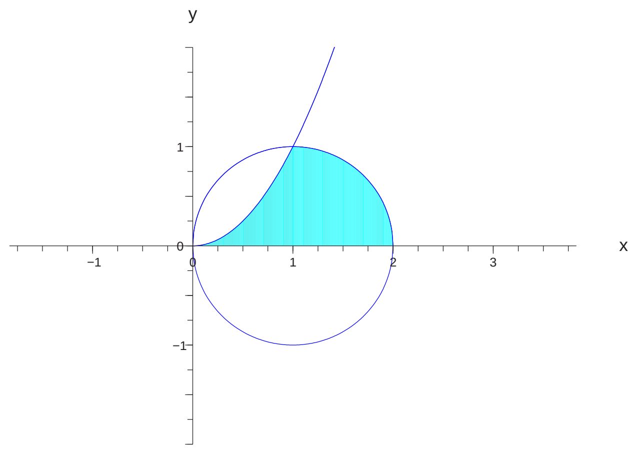

Fig. 16: L'insieme D (in azzurro).

Osserviamo che $D = D_1 \cup D_2$, dove

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; 0 < x \leq 1, \; 0 < y < x^2\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; 1 < x < 2, \; 0 < y < \sqrt{2x - x^2}\right\}.$$

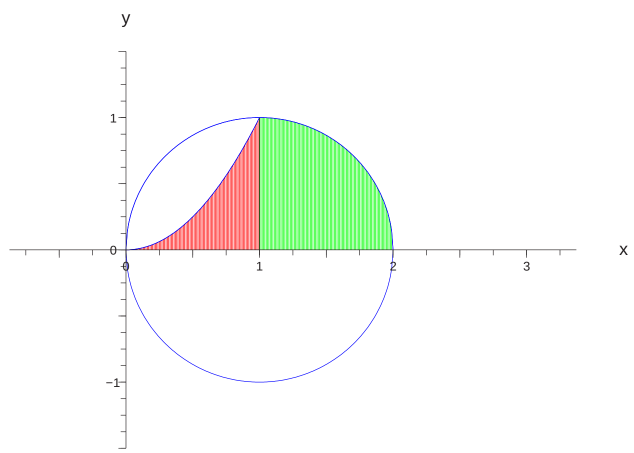

Fig. 17: L'insieme $D = D_1 \cup D_2$, con D_1 in rosso e D_2 in verde.

Quindi si ha che

$$\int_\Omega 2z\,dx\,dy\,dz = \int_D xy\,dx\,dy = \int_{D_1} xy\,dx\,dy + \int_{D_2} xy\,dx\,dy =$$

essendo sia D_1 che D_2 y-semplici, si ottiene

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} xy\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2 \right]_0^{x^2} dx + \int_1^2 \left[\frac{1}{2}xy^2 \right]_0^{\sqrt{2x-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^5\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 \left(2x^2 - x^3\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}x^6\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{13}{24}.$$

m) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega \log\sqrt{x^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, dove

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 < x^2 + z^2 < e^2,\ z < x,\ 0 < y < \frac{1}{x^2+z^2} \right\}.$$

L'insieme Ω è la parte dello spazio esterna al cilindro di equazione $x^2 + z^2 = 1$, interna al cilindro di equazione $x^2 + z^2 = e^2$ e delimitata dai piani $y = 0$ e $x = z$ e dal grafico della funzione $g(x,z) = \frac{1}{x^2+z^2}$.

Integrando per fili paralleli all'asse y si ottiene

$$\int_\Omega \log\sqrt{x^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_0^{\frac{1}{x^2+z^2}} \log\sqrt{x^2+z^2}\,dy \right) dx\,dz =$$

$$= \int_D \frac{\log\sqrt{x^2+z^2}}{x^2+z^2}\,dx\,dz,$$

dove $D = \left\{ (x,z) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x^2 + z^2 < e^2,\ z < x \right\}$.

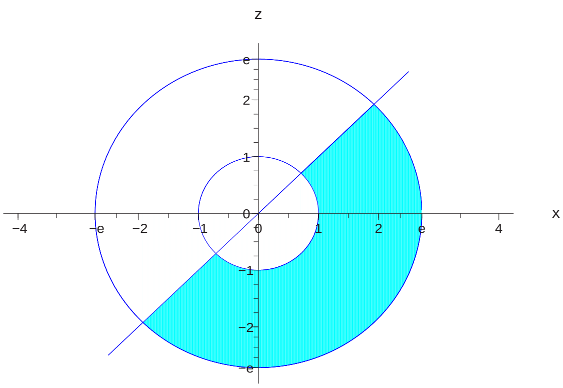

Fig. 18: L'insieme D (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano xz. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ z = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \ -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho.$$

Si ha che

$$(x,z) \in D \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 1 < \rho < e \\ -\frac{3}{4}\pi < \vartheta < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $D = \Phi(D')$, dove

$$D' = \left\{ (\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < \rho < e, \ -\frac{3}{4}\pi < \vartheta < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

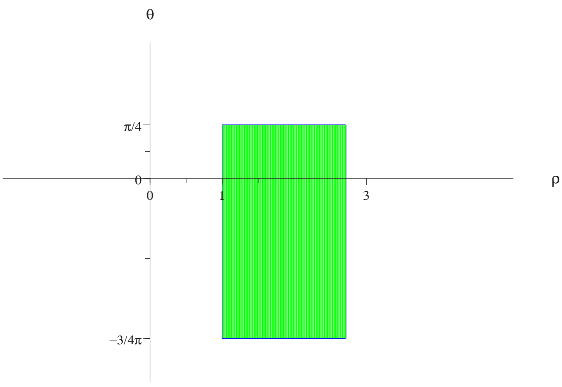

Fig. 19: L'insieme D' (in verde).

Allora si ha che

$$\int_\Omega \log\sqrt{x^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_D \frac{\log\sqrt{x^2+z^2}}{x^2+z^2}\,dx\,dz = \int_{D'} \frac{\log\rho}{\rho}\,d\rho\,d\vartheta =$$

essendo D' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= \left(\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta\right)\left(\int_1^e \frac{\log\rho}{\rho}\,d\rho\right) = \pi\left[\frac{1}{2}\log^2\rho\right]_1^e = \frac{\pi}{2}.$$

$n)$ Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega y^2|z|\,dx\,dy\,dz$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 1 < x^2+y^2 < 2x,\ 0 < z < \frac{2}{x}\right\}.$$

L'insieme Ω è la parte dello spazio esterna al cilindro di equazione $x^2+y^2=1$, interna al cilindro di equazione $(x-1)^2+y^2=1$ e delimitata dal piano $z=0$ e dal grafico della funzione $g(x,y)=\frac{2}{x}$.

Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$\int_\Omega y^2|z|\,dx\,dy\,dz = \int_\Omega y^2 z\,dx\,dy\,dz = \int_D\left(\int_0^{\frac{2}{x}} y^2 z\,dz\right)dx\,dy =$$

$$= \int_D y^2\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\frac{2}{x}} dx\,dy = 2\int_D \frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy,$$

dove $D = \left\{(x,z)\in\mathbb{R}^2:\ 1 < x^2+y^2 < 2x,\ x>0\right\}$.

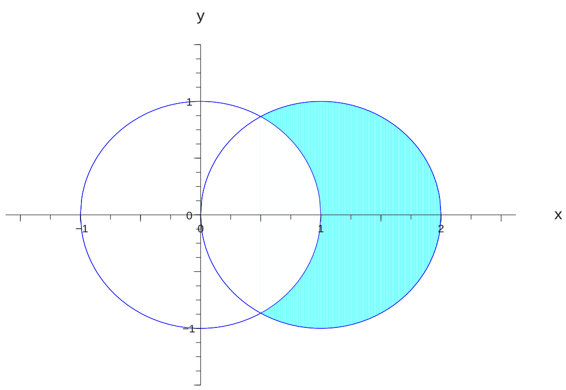

Fig. 20: L'insieme D (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano xy. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho.$$

Si ha che

$$(x,y) \in D \qquad \iff \qquad \begin{cases} 1 < \rho < 2\cos\vartheta \\ -\frac{\pi}{3} < \vartheta < \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $D = \Phi(D')$, dove

$$D' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ -\frac{\pi}{3} < \vartheta < \frac{\pi}{3},\ 1 < \rho < 2\cos\vartheta\right\}.$$

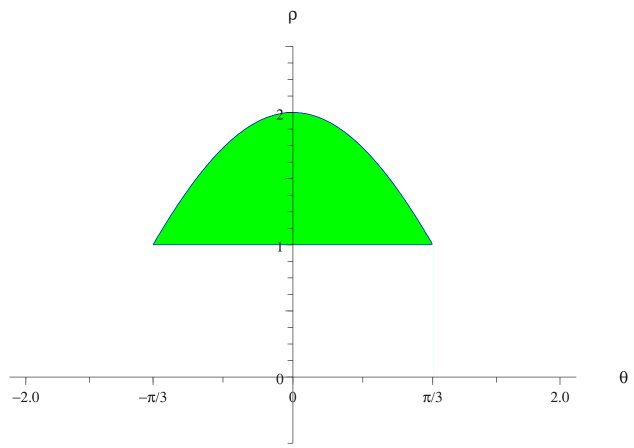

Fig. 21: L'insieme D' (in verde).

Allora si ha che

$$\int_\Omega y^2|z|\,dx\,dy\,dz = 2\int_D \frac{y^2}{x^2}\,dx\,dy = 2\int_{D'} \rho\tan^2\vartheta\,d\rho\,d\vartheta =$$

essendo D' ρ-semplice si ottiene

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^{2\cos\vartheta} \rho\tan^2\vartheta\,d\rho\right) d\vartheta = 2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2\vartheta \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_1^{2\cos\vartheta} d\vartheta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(4\sin^2\vartheta - \tan^2\vartheta\right) d\vartheta =$$

essendo $\displaystyle\int \sin^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta) + c$ e $\displaystyle\int \tan^2\vartheta\,d\vartheta = \tan\vartheta - \vartheta + c$, si ottiene

$$= \Big[2(\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta) - \tan\vartheta + \vartheta\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\pi - 3\sqrt{3}.$$

o) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega |z|\,dx\,dy\,dz$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 < z^2 - 1,\; 2x^2 + y^2 + z^2 < 2\right\}.$$

L'insieme Ω è la parte dello spazio compresa fra l'ellissoide di equazione $2x^2+y^2+z^2 = 2$ e l'iperboloide a due falde di equazione $x^2 + y^2 = z^2 - 1$.

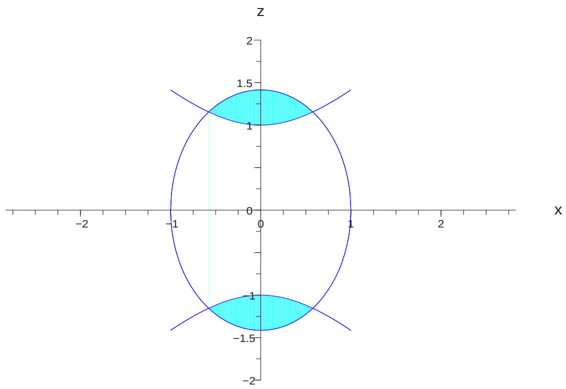

Fig. 22: Sezione dell'insieme Ω con il piano xz (in azzurro).

Osserviamo che sia la funzione integranda $f(x,y,z) = |z|$ che l'insieme Ω presentano una simmetria rispetto al piano xy. Infatti, se $(x,y,z) \in \Omega$, allora anche $(x,y,-z) \in \Omega$ e $f(x,y,-z) = f(x,y,z)$. Ne segue che

$$\int_\Omega |z|\,dx\,dy\,dz = 2\int_A z\,dx\,dy\,dz,$$

dove

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 < z^2 - 1,\; 2x^2 + y^2 + z^2 < 2,\; z > 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; \sqrt{x^2+y^2+1} < z < \sqrt{2 - 2x^2 - y^2}\right\}. \end{aligned}$$

Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$\int_\Omega |z|\,dx\,dy\,dz = 2\int_A z\,dx\,dy\,dz = 2\int_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2+1}}^{\sqrt{2-2x^2-y^2}} z\,dz\right) dx\,dy =$$

$$= 2\int_D \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{\sqrt{x^2+y^2+1}}^{\sqrt{2-2x^2-y^2}} dx\,dy = \int_D \left(1 - 3x^2 - 2y^2\right) dx\,dy,$$

dove

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; \sqrt{x^2+y^2+1} < \sqrt{2 - 2x^2 - y^2}\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 3x^2 + 2y^2 < 1\right\}. \end{aligned}$$

Essendo D la parte del piano xy compresa nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$, passiamo in coordinate ellittiche nel piano xy. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}\rho\cos\vartheta \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \frac{\sqrt{6}}{6}\rho.$$

Si ha che

$$(x,y) \in D \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $D = \Phi(D')$, dove

$$D' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq \rho < 1,\ 0 \leq \vartheta < 2\pi\right\}.$$

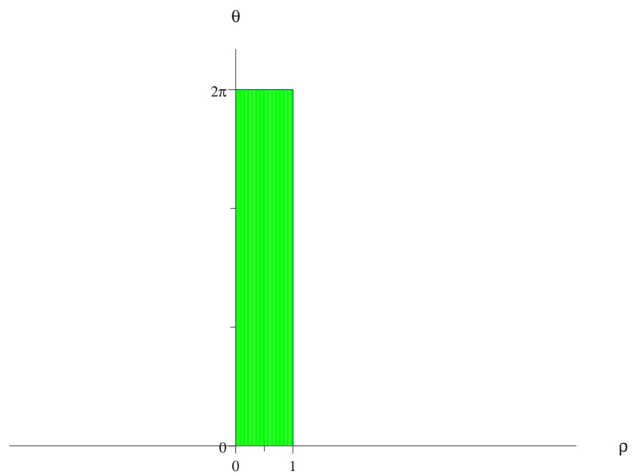

Fig. 23: L'insieme D' (in verde).

Allora si ha che

$$\int_\Omega |z|\,dx\,dy\,dz = \int_D \left(1 - 3x^2 - 2y^2\right)\,dx\,dy = \frac{\sqrt{6}}{6}\int_{D'} \rho\left(1-\rho^2\right)\,d\rho\,d\vartheta =$$

essendo D' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= \frac{\sqrt{6}}{3}\pi\int_0^1 \left(\rho - \rho^3\right)\,d\rho = \frac{\sqrt{6}}{3}\pi\left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = \frac{\sqrt{6}}{12}\pi.$$

p) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega x^2|y|\,dx\,dy\,dz$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2<1, \ 0<z<x+1\right\}.$$

L'insieme Ω è costituito dai punti interni alla sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=1$ compresi fra i piani di equazione $z=0$ e $z=x+1$.

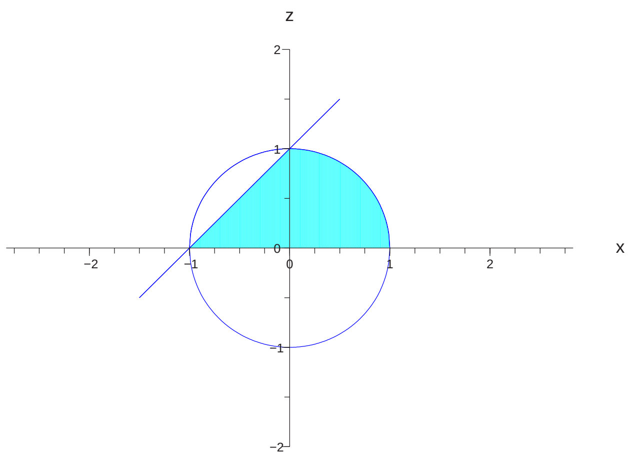

Fig. 24: Sezione dell'insieme Ω con il piano xz (in azzurro).

Osserviamo che sia la funzione integranda $f(x,y,z)=x^2|y|$ che l'insieme Ω presentano una simmetria rispetto al piano xz. Infatti, se $(x,y,z)\in\Omega$, allora anche $(x,-y,z)\in\Omega$ e $f(x,-y,z)=f(x,y,z)$. Ne segue che

$$\int_\Omega x^2|y|\,dx\,dy\,dz = 2\int_A x^2y\,dx\,dy\,dz,$$

dove

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2<1, \ 0<z<x+1, \ y>0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \ 0<y<\sqrt{1-x^2-z^2}, \ 0<z<x+1\right\}. \end{aligned}$$

Integrando per fili paralleli all'asse y si ottiene

$$\int_\Omega x^2|y|\,dx\,dy\,dz = 2\int_A x^2y\,dx\,dy\,dz = 2\int_D\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-z^2}} x^2y\,dy\right)dx\,dz =$$

$$= 2\int_D x^2\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2-z^2}} dx\,dz = \int_D x^2\left(1-x^2-z^2\right)dx\,dz,$$

dove

$$D = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + z^2 < 1, \ 0 < z < x + 1\right\} = D_1 \cup D_2,$$

con

$$D_1 = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 < x \leq 0, \ 0 < z < x + 1\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + z^2 < 1, \ x, z > 0\right\}.$$

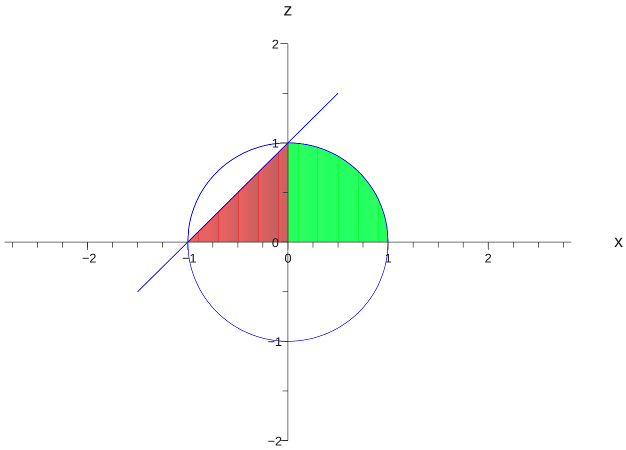

Fig. 25: L'insieme $D = D_1 \cup D_2$, con D_1 in rosso e D_2 in verde.

Quindi si ha che

$$\int_{\Omega} x^2|y| \, dx \, dy \, dz = \int_D x^2 \left(1 - x^2 - z^2\right) dx \, dz =$$

$$= \int_{D_1} x^2 \left(1 - x^2 - z^2\right) dx \, dz + \int_{D_2} x^2 \left(1 - x^2 - z^2\right) dx \, dz.$$

Calcoliamo separatamente i due integrali. Essendo D_1 z-semplice, si ha che

$$\int_{D_1} x^2 \left(1 - x^2 - z^2\right) dx \, dz = \int_{-1}^{0} \left[\int_0^{x+1} x^2 \left(1 - x^2 - z^2\right) dz\right] dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x^2 \left[\left(1 - x^2\right) z - \frac{1}{3} z^3\right]_0^{x+1} dx = \int_{-1}^{0} x^2 \left[\left(1 - x^2\right)(x+1) - \frac{1}{3}(x+1)^3\right] dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(-\frac{4}{3}x^5 - 2x^4 + \frac{2}{3}x^2\right) dx = \left[-\frac{2}{9}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{9}x^3\right]_{-1}^{0} = \frac{2}{45}.$$

Essendo D_2 la parte del I quadrante compresa nella circonferenza di equazione $x^2 + z^2 = 1$, passiamo in coordinate polari nel piano xz. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ z = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x,z) \in D_2 \quad \iff \quad \begin{cases} 0 < \rho < 1 \\ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $D_2 = \Phi(D_2')$, dove

$$D_2' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < \rho < 1, \ 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Quindi si ha che

$$\int_{D_2} x^2 \left(1 - x^2 - z^2\right) dx\, dz = \int_{D_2'} \rho^3 \cos^2 \vartheta \left(1 - \rho^2\right) d\rho\, d\vartheta =$$

ed essendo D_2' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta\, d\vartheta \right) \left[\int_0^1 \left(\rho^3 - \rho^5\right) d\rho \right] = \left[\frac{1}{2} (\vartheta + \sin \vartheta \cos \vartheta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4} \rho^4 - \frac{1}{6} \rho^6 \right]_0^1 = \frac{\pi}{48}.$$

In conclusione si ha che

$$\int_\Omega x^2 |y|\, dx\, dy\, dz = \frac{\pi}{48} + \frac{2}{45}.$$

Esercizio 2. Calcolare il volume dei seguenti insiemi:

a) $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x > 0, \; y > 0, \; z > 0, \; x + y + z < 1\right\}$

$\left[\frac{1}{6}\right]$

b) $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + 4y^2 < \pi^2, \; x^2 + y^2 > \dfrac{\pi^2}{4}, \; x > 0, \; 0 < z < x \cos y\right\}$

$[6]$

c) $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 < z < 3x^2 + 5y^2, \; z < 8 - x^2 - 3y^2\right\}$

$\left[4\pi\sqrt{2}\right]$

d) $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 < y < 3|z|, \; x^2 + z^2 > 1, \; z^2 - 2 < x < 1 + \dfrac{1}{2}|z|\right\}$

$[16]$

e) $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 < 4, \; x^2 + y^2 - 2x < 0\right\}$

$\left[\frac{16}{3}\pi - \frac{64}{9}\right]$

f) $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; \sqrt{x^2 + y^2} < z < \sqrt{3x^2 + 3y^2}, \; x^2 + y^2 + z^2 < 2\right\}$

$\left[\frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{6} - 2\right)\right]$

g) $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 < z < 1 - x^2 - y^2\right\}$

$\left[\frac{\pi}{2}\right]$

h) $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 2y^2 + z^2 < x < 1 + \dfrac{7}{4}y^2 + \dfrac{8}{9}z^2\right\}$

$[3\pi]$

Svolgimento

I grafici degli insiemi di integrazione di questi esercizi si trovano sulla pagina web
http://calvino.polito.it/~lancelot/didattica/analisi2/esercizi/grafici_integrali_tripli_esercizio_2.html
.

---

a) Consideriamo l'insieme $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x+y+z < 1\right\}$.

L'insieme E è un tetraedro. Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$m(E) = \int_E dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_0^{1-x-y} dz\right) dx\,dy = \int_D (1-x-y)\,dx\,dy,$$

dove $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1-x\right\}$.

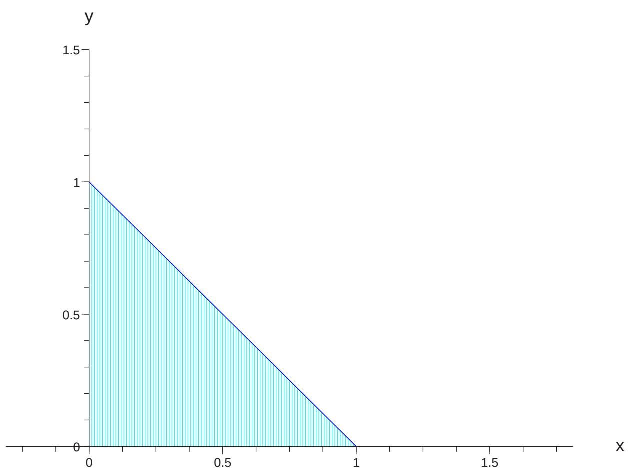

Fig. 26: L'insieme D (in azzurro).

Essendo D y-semplice, si ottiene

$$m(E) = \int_D (1-x-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]_0^1 dx = \frac{1}{6}.$$

b) Consideriamo l'insieme

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 4y^2 < \pi^2,\ x^2 + y^2 > \frac{\pi^2}{4},\ x > 0,\ 0 < z < x\cos y\right\}.$$

L'insieme E è la parte dello spazio esterna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4}$, interna al cilindro di equazione $x^2 + 4y^2 = \pi^2$ e delimitata dai piani $x = 0$ e $z = 0$ e dal grafico della funzione $g(x, y) = x \cos y$.

Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$m(E) = \int_E dx\, dy\, dz = \int_D \left(\int_0^{x \cos y} dz \right) dx\, dy = \int_D x \cos y\, dx\, dy,$$

dove

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 4y^2 < \pi^2,\ x^2 + y^2 > \frac{\pi^2}{4},\ x > 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},\ \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - y^2} < x < \sqrt{\pi^2 - 4y^2} \right\}. \end{aligned}$$

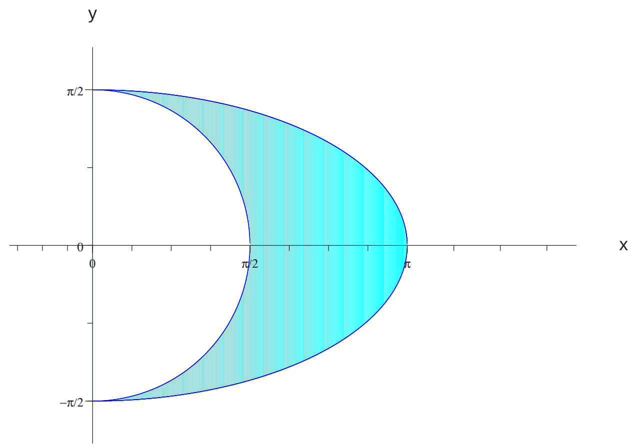

Fig. 27: L'insieme D (in azzurro).

Essendo D x-semplice, si ottiene

$$m(E) = \int_D x \cos y\, dx\, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - y^2}}^{\sqrt{\pi^2 - 4y^2}} x \cos y\, dx \right) dy =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - y^2}}^{\sqrt{\pi^2 - 4y^2}} dy = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{4}\pi^2 - 3y^2 \right) \cos y\, dy =$$

$$= \frac{3}{8}\pi^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y\, dy - \frac{3}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2 \cos y\, dy =$$

integrando per parti il secondo integrale

$$= \frac{3}{8}\pi^2\Big[\sin y\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{2}\left(\Big[y^2 \sin y\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y \sin y\, dy\right) =$$

procedendo ancora con l'integrazione per parti

$$= \frac{3}{4}\pi^2 - \frac{3}{4}\pi^2 + 3\left(\Big[-y\cos y\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y\, dy\right) = 3\Big[\sin y\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 6.$$

c) Consideriamo l'insieme

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2 + y^2 < z < 3x^2 + 5y^2, \;\; z < 8 - x^2 - 3y^2\right\}.$$

L'insieme E è la parte dello spazio compresa fra i tre paraboloidi di equazione $z = x^2 + y^2$, $z = 3x^2 + 5y^2$ e $z = 8 - x^2 - 3y^2$.

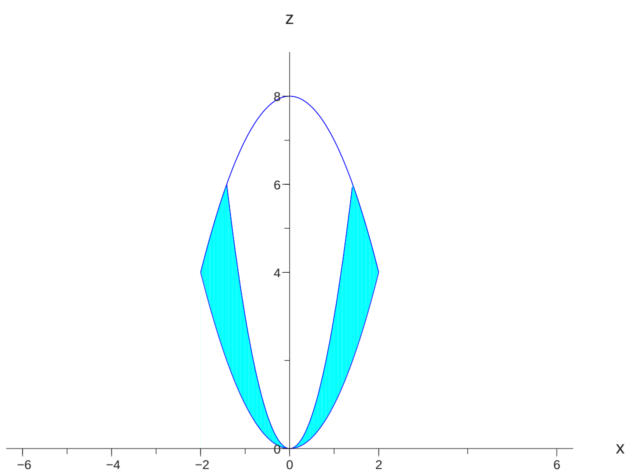

Fig. 28: Sezione dell'insieme E con il piano xz (in azzurro).

Osserviamo che $E = E_1 \setminus E_2$, dove

$$E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x^2 + y^2 < z < 8 - x^2 - 3y^2\right\},$$

$$E_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; 3x^2 + 5y^2 \leq z < 8 - x^2 - 3y^2\right\}.$$

Ne segue che $m(E) = m(E_1) - m(E_2)$. Calcoliamo separatamente i volumi di E_1 ed E_2. Consideriamo inizialmente E_1.

Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$m(E_1) = \int_{D_1} dx\,dy\,dz = \int_{D_1} \left(\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-3y^2} dz \right) dx\,dy = 2 \int_{D_1} \left(4 - x^2 - 2y^2\right) dx\,dy,$$

dove $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 2y^2 < 4\right\}$. Essedo D_1 l'insieme dei punti del piano xy compresi nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, passiamo in coordinate ellittiche nel piano xy. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = 2\rho\cos\vartheta \\ y = \sqrt{2}\rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = 2\sqrt{2}\rho.$$

Allora

$$(x,y) \in D_1 \quad \iff \quad \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $D_1 = \Phi(D_1')$, dove

$$D_1' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq \rho < 1, \ 0 \leq \vartheta < 2\pi\right\}.$$

Ne segue che

$$m(E_1) = 2\int_{D_1} \left(4 - x^2 - 2y^2\right) dx\,dy = 16\sqrt{2} \int_{D_1'} \rho\left(1 - \rho^2\right) d\rho\,d\vartheta =$$

essendo D_1' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= 16\sqrt{2}\left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right)\left[\int_0^1 \left(\rho - \rho^3\right) d\rho\right] = 32\pi\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = 8\pi\sqrt{2}.$$

Consideriamo ora E_2. Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$m(E_2) = \int_{D_2} dx\,dy\,dz = \int_{D_2} \left(\int_{3x^2+5y^2}^{8-x^2-3y^2} dz \right) dx\,dy = 4 \int_{D_2} \left(2 - x^2 - 2y^2\right) dx\,dy,$$

dove $D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 2y^2 < 2\right\}$. Essedo D_2 l'insieme dei punti del piano xy compresi nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, passiamo in coordinate ellittiche nel piano xy. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \sqrt{2}\rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \sqrt{2}\rho.$$

Allora

$$(x,y) \in D_2 \quad \iff \quad \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $D_2 = \Phi(D_2')$, dove

$$D_2' = \left\{(\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \;\; 0 \leq \rho < 1,\; 0 \leq \vartheta < 2\pi\right\}.$$

Ne segue che

$$m(E_2) = 4\int_{D_2} \left(2 - x^2 - 2y^2\right) dx\, dy = 8\sqrt{2}\int_{D_2'} \rho\left(1 - \rho^2\right) d\rho\, d\vartheta =$$

essendo D_2' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= 8\sqrt{2}\left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right)\left[\int_0^1 \left(\rho - \rho^3\right) d\rho\right] = 16\pi\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = 4\pi\sqrt{2}.$$

In conclusione si ha che $m(E) = m(E_1) - m(E_2) = 4\pi\sqrt{2}$.

d) Consideriamo l'insieme

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; 0 < y < 3|z|,\; x^2 + z^2 > 1,\; z^2 - 2 < x < 1 + \frac{1}{2}|z|\right\}.$$

Osserviamo che l'insieme E è simmetrico rispetto al piano xy. Infatti, se $(x, y, z) \in E$, allora anche $(x, y, -z) \in E$. Quindi $m(E) = 2m(E_1)$, dove

$$E_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; 0 < y < 3z,\; x^2 + z^2 > 1,\; z^2 - 2 < x < 1 + \frac{1}{2}z\right\}.$$

Integrando per fili paralleli all'asse y si ottiene

$$m(E) = 2m(E_1) = 2\int_{E_1} dx\, dy\, dz = 2\int_D \left(\int_0^{3z} dy\right) dx\, dz = 6\int_D z\, dx\, dz,$$

dove $D = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2 + z^2 > 1,\; z^2 - 2 < x < 1 + \frac{1}{2}z,\; z > 0\right\}$. Osserviamo che $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, dove

$$D_1 = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : \;\; -2 < x \leq -1\,,\, 0 < z < \sqrt{x + 2}\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : \;\; -1 < x < 1,\; \sqrt{1 - x^2} < z < \sqrt{x + 2}\right\},$$

$$D_3 = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : \;\; 1 \leq x < 2,\; 2x - 2 < z < \sqrt{x + 2}\right\}.$$

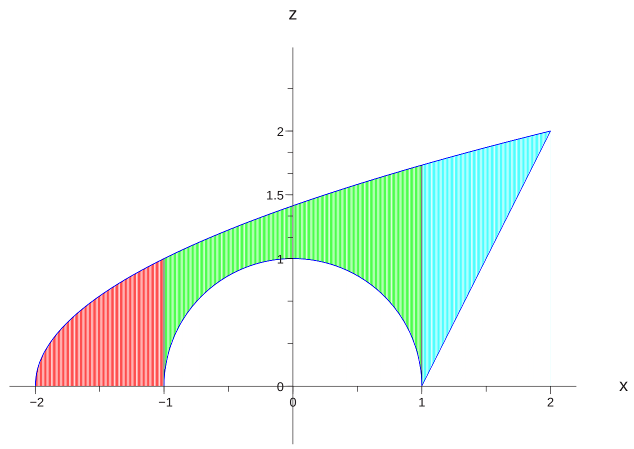

Fig. 29: L'insieme $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, con D_1 in rosso, D_2 in verde e D_3 in azzurro.

Quindi

$$m(E) = 6\int_D z\,dx\,dz = 6\left(\int_{D_1} z\,dx\,dz + \int_{D_2} z\,dx\,dz + \int_{D_3} z\,dx\,dz\right) =$$

essendo D_1, D_2, D_3 z-semplici, si ottiene

$$= 6\left[\int_{-2}^{-1}\left(\int_0^{\sqrt{x+2}} z\,dz\right)dx + \int_{-1}^{1}\left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{x+2}} z\,dz\right)dx + \int_1^2\left(\int_{2x-2}^{\sqrt{x+2}} z\,dz\right)dx\right] =$$

$$= 6\left(\int_{-2}^{-1}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{x+2}} dx + \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{x+2}} dx + \int_1^2\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{2x-2}^{\sqrt{x+2}} dx\right) =$$

$$= 3\left[\int_{-2}^{-1}(x+2)\,dx + \int_{-1}^{1}\left(x^2+x+1\right)dx + \int_1^2\left(-4x^2+9x-2\right)dx\right] =$$

$$= 3\left(\left[\frac{1}{2}(x+2)^2\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{4}{3}x^3+\frac{9}{2}x^2-2x\right]_1^2\right) = 16.$$

e) Consideriamo l'insieme

$$E = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2<4,\ x^2+y^2-2x<0\right\}.$$

L'insieme E è la parte dello spazio interna al cilindro di equazione $(x-1)^2+y^2=1$ e alla sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=4$. Osserviamo che l'insieme E è simmetrico rispetto al piano xy. Infatti, se $(x,y,z)\in E$, allora anche $(x,y,-z)\in E$. Quindi $m(E)=2m(E_1)$, dove

$$E_1 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<z<\sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2-2x<0\right\}.$$

Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$m(E) = 2m(E_1) = 2\int_{E_1} dx\,dy\,dz = 2\int_D \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\right) dx\,dy =$$

$$= 2\int_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

dove $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2-2x < 0\right\}$.

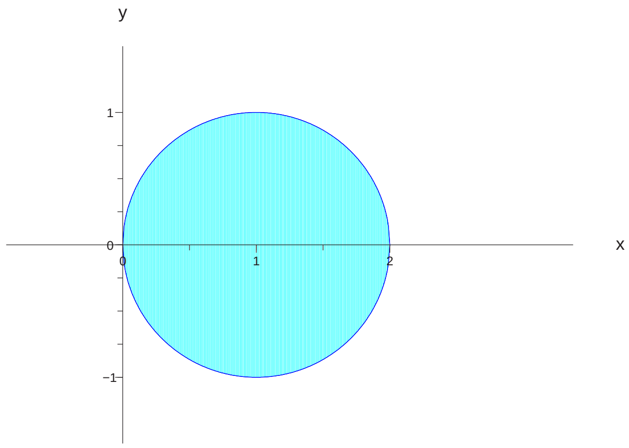

Fig. 30: L'insieme D (in azzurro).

Passiamo in coordinate polari nel piano xy. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0,\ -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x,y) \in D \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < \rho < 2\cos\vartheta \\ -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $D = \Phi(D')$, dove

$$D' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2},\ 0 < \rho < 2\cos\vartheta\right\}.$$

Ne segue che

$$m(E) = 2\int_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy = 2\int_{D'} \rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho\,d\vartheta =$$

essendo D' ρ-semplice si ottiene

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\vartheta} \rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho\right) d\vartheta = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3}\left(4-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\cos\vartheta} d\vartheta =$$

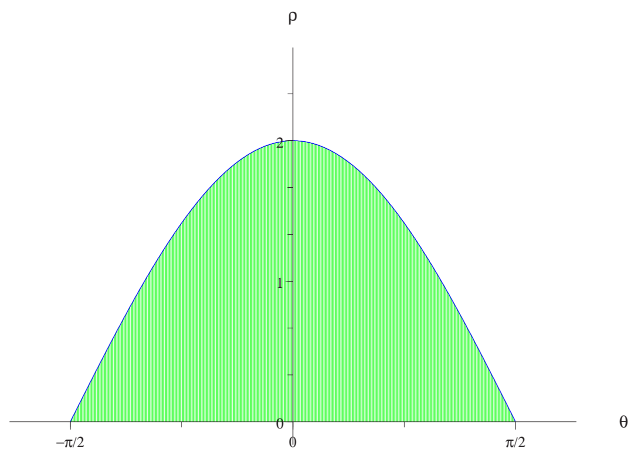

Fig. 31: L'insieme D' (in verde).

$$= -\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(4-4\cos^2\vartheta\right)^{\frac{3}{2}} - 8\right] d\vartheta = -\frac{16}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left|\sin^3\vartheta\right| - 1\right) d\vartheta =$$

$$= -\frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3\vartheta - 1\right) d\vartheta = \frac{16}{3}\pi - \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\vartheta - \sin\vartheta\cos^2\vartheta\right) d\vartheta =$$

$$= \frac{16}{3}\pi - \frac{32}{3}\left[-\cos\vartheta + \frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}\pi - \frac{64}{9}.$$

f) Consideriamo l'insieme

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x^2+y^2} < z < \sqrt{3x^2+3y^2},\ x^2+y^2+z^2 < 2\right\}.$$

L'insieme E è la parte dello spazio interna alla sfera di equazione $x^2+y^2+z^2 = 2$ e compresa fra i semiconi di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$.

Osserviamo che $E = E_1 \setminus E_2$, dove

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x^2+y^2} < z < \sqrt{2-x^2-y^2}\right\},$$

$$E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2} \le z < \sqrt{2-x^2-y^2}\right\}.$$

Ne segue che $m(E) = m(E_1) - m(E_2)$. Calcoliamo separatamente i volumi di E_1 ed E_2. Consideriamo inizialmente E_1.

Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$m(E_1) = \int_{D_1} dx\,dy\,dz = \int_{D_1}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz\right) dx\,dy =$$

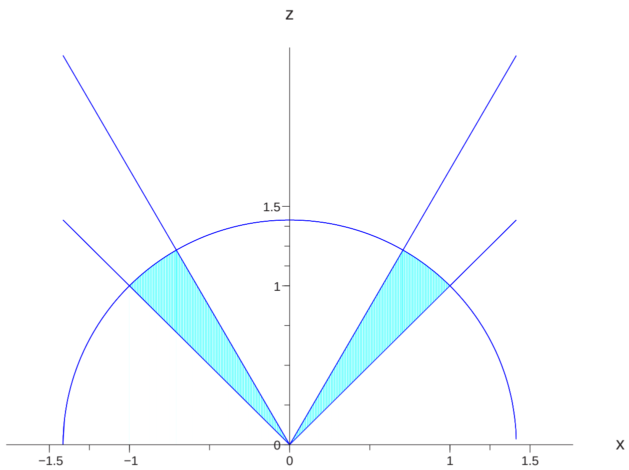

Fig. 32: Sezione dell'insieme E con il piano xz (in azzurro).

$$= \int_{D_1} \left(\sqrt{2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx\, dy,$$

dove $D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < 1 \right\}$. Passiamo in coordinate polari nel piano xy. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \; 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x, y) \in D_1 \quad \iff \quad \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $D_1 = \Phi(D_1')$, dove

$$D_1' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq \rho < 1, \; 0 \leq \vartheta < 2\pi \right\}.$$

Ne segue che

$$m(E_1) = \int_{D_1} \left(\sqrt{2 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx\, dy = \int_{D_1'} \rho \left(\sqrt{2 - \rho^2} - \rho \right) d\rho\, d\vartheta =$$

essendo D_1' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \left[\int_0^1 \left(\rho \sqrt{2 - \rho^2} - \rho^2 \right) d\rho \right] = 2\pi \left[-\frac{1}{3} \left(2 - \rho^2 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3} \pi \left(\sqrt{2} - 1 \right).$$

Consideriamo ora E_2. Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$m(E_2) = \int_{D_2} dx\,dy\,dz = \int_{D_2} \left(\int_{\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz \right) dx\,dy =$$

$$= \int_{D_2} \left(\sqrt{2 - x^2 - y^2} - \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2} \right) dx\,dy,$$

dove $D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < \frac{1}{2} \right\}$. Passiamo in coordinate polari nel piano xy. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \ge 0,\; 0 \le \vartheta \le 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x, y) \in D_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \le \rho < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \le \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $D_2 = \Phi(D_2')$, dove

$$D_1' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le \rho < \frac{\sqrt{2}}{2},\; 0 \le \vartheta < 2\pi \right\}.$$

Ne segue che

$$m(E_2) = \int_{D_2} \left(\sqrt{2 - x^2 - y^2} - \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2} \right) dx\,dy =$$

$$= \int_{D_2'} \rho \left(\sqrt{2 - \rho^2} - \sqrt{3}\rho \right) d\rho\,d\vartheta =$$

essendo D_2' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \left[\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\rho\sqrt{2 - \rho^2} - \sqrt{3}\rho^2 \right) d\rho \right] = 2\pi \left[-\frac{1}{3} \left(2 - \rho^2 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\rho^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\sqrt{2} \left(2 - \sqrt{3} \right).$$

In conclusione si ha che $m(E) = m(E_1) - m(E_2) = \frac{2}{3}\pi \left(\sqrt{6} - 2 \right)$.

$g)$ Consideriamo l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 < z < 1 - x^2 - y^2 \right\}.$$

L'insieme E è la parte dello spazio compresa fra il piano $z = 0$ e il paraboloide di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$.

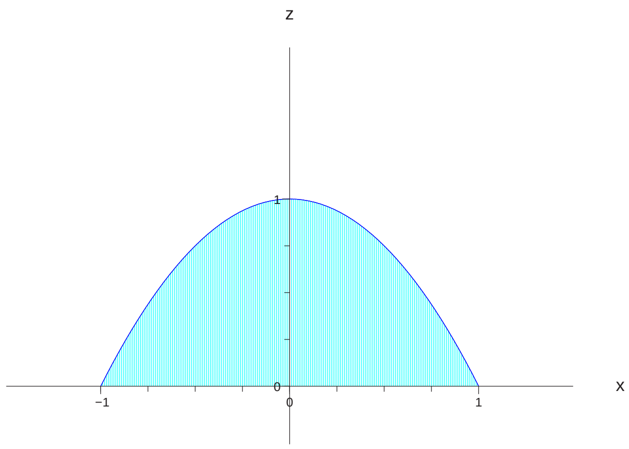

Fig. 33: Sezione dell'insieme E con il piano xz (in azzurro).

Integrando per fili paralleli all'asse z si ottiene

$$m(E) = \int_E dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_0^{1-x^2-y^2} dz \right) dx\,dy = \int_D \left(1 - x^2 - y^2\right) dx\,dy,$$

dove $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < 1 \right\}$. Passiamo in coordinate polari nel piano xy. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \; 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho, \vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x, y) \in D \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $D = \Phi(D')$, dove

$$D' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq \rho < 1, \; 0 \leq \vartheta < 2\pi \right\}.$$

Ne segue che

$$m(E) = \int_D \left(1 - x^2 - y^2\right) dx\,dy = \int_{D'} \rho \left(1 - \rho^2\right) d\rho\,d\vartheta =$$

essendo D' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \left[\int_0^1 \left(\rho - \rho^3\right) d\rho \right] = 2\pi \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

h) Consideriamo l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2y^2 + z^2 < x < 1 + \frac{7}{4}y^2 + \frac{8}{9}z^2 \right\}.$$

L'insieme E è la parte dello spazio compresa fra i paraboloidi di equazione $x = 2y^2 + z^2$ e $x = 1 + \frac{7}{4}y^2 + \frac{8}{9}z^2$.

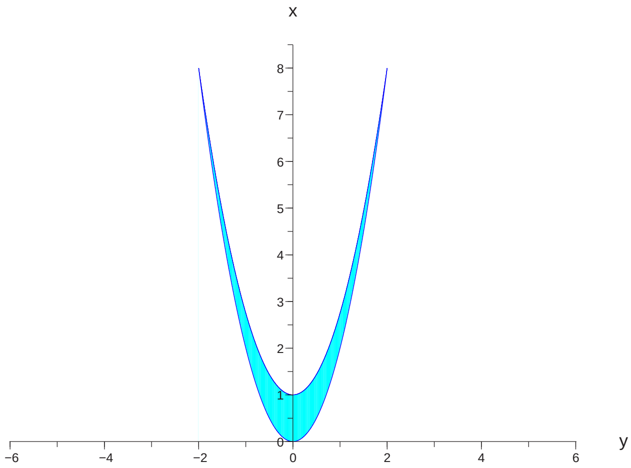

Fig. 34: Sezione dell'insieme E con il piano yx (in azzurro).

Integrando per fili paralleli all'asse x si ottiene

$$m(E) = \int_E dx\, dy\, dz = \int_D \left(\int_{2y^2+z^2}^{1+\frac{7}{4}y^2+\frac{8}{9}z^2} dx \right) dy\, dz = \int_D \left(1 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{9}z^2 \right) dy\, dz,$$

dove $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} < 1 \right\}$. Essendo D l'insieme dei punti interni all'ellisse di equazione $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$, passiamo in coordinate ellittiche nel piano yz. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} y = 2\rho \cos \vartheta \\ z = 3\rho \sin \vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho, \vartheta)| = 6\rho.$$

Allora

$$(y, z) \in D \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 0 \leq \rho < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Quindi si ha che $D = \Phi(D')$, dove

$$D' = \left\{ (\rho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq \rho < 1, \ 0 \leq \vartheta < 2\pi \right\}.$$

Ne segue che

$$m(E) = \int_D \left(1 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{9}z^2 \right) dy\, dz = 6 \int_{D'} \rho \left(1 - \rho^2 \right) d\rho\, d\vartheta =$$

essendo D' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una di ϑ, si ottiene

$$= 6 \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \left[\int_0^1 \left(\rho - \rho^3 \right) d\rho \right] = 12\pi \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 = 3\pi.$$