Complementi su curve e superfici

Corso di Matematica 2

2014/2015

Corso di studi in Ingegneria meccanica

Teorema della divergenza

Teorema
Siano D un dominio regolare del piano e $F = (F_1, F_2)$ una applicazione da D verso R^2 di classe $C^1(D)$. Allora:

$$\iint_D divF dxdy = \int_{\partial D} (F, N) ds$$

dove $divF$ è la divergenza del vettore, $F(x, y) = (F_1(x, y);\ F_2(x, y))$ definito da

$$divF = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

e (F, N) è il prodotto scalare tra il vettore F e il versore N normale a ∂D, rivolto verso l'esterno di D e s è l'ascissa curvilinea sulla frontiera di D

Dimostrazione
Se la frontiera di *D* è costituita da una curva regolare a tratti di equazioni parametriche $x = x(t)$ e $y = y(t)$, con $t \in [a;\ b]$, e se il verso indotto da tale rappresentazione coincide con quello positivo della frontiera ∂D, il versore normale esterno *N*, quindi per la definizione di integrale curvilineo

$$\int_{+\partial D} (F, N) ds = \int_a^b \left(\frac{F_1 y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \frac{F_2 x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_a^b (F_1 y' - F_2 x') dt$$

$$= \int_{+\partial D} F_1 dy - F_2 dx$$

Teorema della divergenza

Dimostrazione

Dimostriamo questo caso utilizzando la prima formula di Gauss-Green con F_1 al posto di *F* e la seconda formula con F_2 al posto di *F*, abbiamo

$$\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial x} dxdy = \int_{\partial D} F_1 dy$$

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial y} dxdy = -\int_{\partial D} F_2 dx$$

da cui, sommando membro a membro, si ha

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} -F_2 dx + F_1 dy = \iint_D divF dxdy$$

Ma essendo

$$\int_{+\partial D} (F, N) ds = \int_{+\partial D} F_1 dy - F_2 dx$$

si ha la tesi.

Se la frontiera *di D* è unione di un numero finito di curve regolari a tratti (come ad esempio in una corona circolare) si ragiona suddividendo *D* nell'unione di domini normali regolari privi di punti interni in comune.

Teorema della divergenza

Il teorema della divergenza, anche detto teorema di Ostrogradskij per il fatto che la prima dimostrazione è dovuta a Michail Ostrogradskij, è la generalizzazione a domini n-dimensionali del teorema fondamentale del calcolo integrale. A sua volta, esso è un caso speciale del più generale teorema di Stokes.

Da non confondere col teorema di Gauss-Green, che invece è un caso speciale (ristretto a 2 dimensioni) del teorema del rotore, o con il teorema del flusso.

Il teorema della divergenza nello spazio è simile a quello nel piano e trasforma un integrale triplo in un integrale superficiale

Teorema della divergenza nello spazio

Sia D un dominio regolare di R^3 e sia

$$F(x;\ y;\ z) = F_1\ (x;\ y;\ z)\boldsymbol{i} + F_2\ (x;\ y;\ z)\boldsymbol{j}\ + F_3\ (x;\ y;\ z)\boldsymbol{k}$$

un campo vettoriale di classe $\mathrm{C}^1(\mathrm{D})$. Allora, l'integrale su D della divergenza del campo F è pari al flusso del campo uscente da D si ha

$$\iiint_D divF(x,y,z)dxdydz = \int_{\partial D} \boldsymbol{F}(x,y,z)\,\boldsymbol{n}(x,y,z)d\sigma$$

dove n è il campo normale alla frontiera di D orientato verso l'esterno del dominio D

Teorema del rotore

Il teorema del rotore afferma che il flusso del rotore di determinati campi vettoriali attraverso superfici regolari dotate di bordo è uguale alla circuitazione del campo lungo la frontiera della superficie. Si tratta pertanto di un caso particolare del teorema di Stokes. Il teorema di Green è un caso speciale del teorema del rotore che considera superfici appartenenti a R^2

Teorema

Siano S una superficie regolare avente il contorno chiuso e regolare orientato γ^+ e $\mathrm{V} \subset \mathrm{R}^3$ un dominio contenente la superficie S: Sia

$$F(x;\ y;\ z) = F_1\,(x;\ y;\ z)\boldsymbol{i} + F_2\,(x;\ y;\ z)\boldsymbol{j}\ + F_3\,(x;\ y;\ z)\boldsymbol{k}$$

un campo vettoriale di classe $\mathrm{C}^1(\mathrm{V})$, allora sussiste la seguente formula

$$\oint_{\gamma^+} F \cdot dr = \iint_S rotF \cdot n d\sigma$$

o, equivalentemente,

$$\oint_{\gamma^+} F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial F_3}{dy} - \frac{\partial F_2}{dz}\right) cos\alpha + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) cos\beta + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) cos\gamma\right] d\sigma$$

dove la curva γ^+ è percorsa nel verso corrispondente alla superficie orientata S^+ cioè un osservatore che si muove sulla curva C deve avere sempre a sinistra la faccia positiva della superficie considerata

Superfici

Definizione

Le superfici sono funzioni continue definite su particolari sottoinsiemi di R^2, ossia sulle regioni piane; tali sottoinsiemi svolgono lo stesso ruolo degli intervalli *I* nella definizione delle curve.

Si definisce regione ogni sottoinsieme R di R^n formato dall'unione di un aperto connesso non vuoto A e di una parte della sua frontiera, ossia $R = A \cup Z$ con $\emptyset \subseteq Z \subseteq \partial A$

Definizione

Sia $R \subseteq R^2$ *una regione. Una funzione continua* $\boldsymbol{\sigma} : R \rightarrow R^3$ *dicesi* **superficie***. L'immagine* $\Sigma = \boldsymbol{\sigma}(R) \subseteq R^3$ *è detta* **sostegno** *della superficie.*

La rappresentazione cartesiana di una superficie può essere espressa come

$$\sigma(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k$$

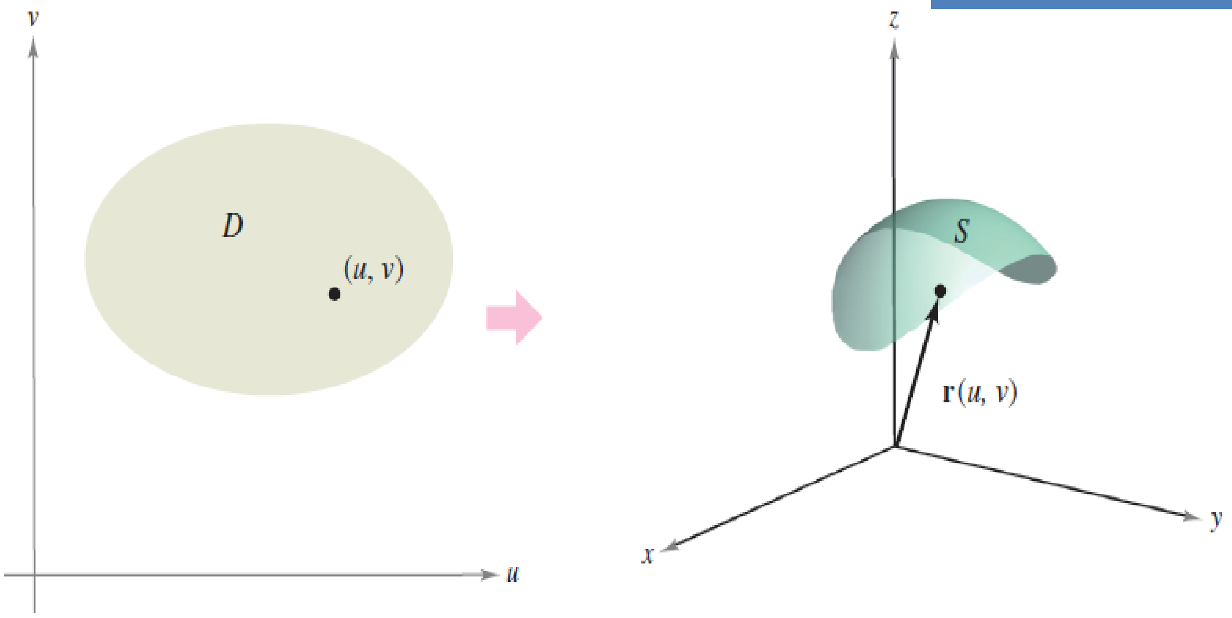
Superfici

Definizione

Una superficie si dice semplice se la restrizione di σ all'interno della regione R è iniettiva.

Una superficie è una calotta se è definita su una regione compatta R

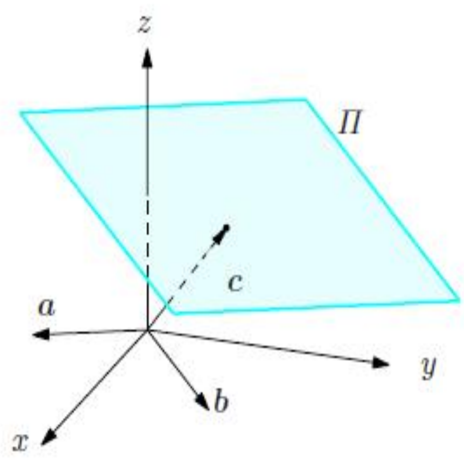
Il concetto di calotta è l'analogo per le superfici del concetto di arco per le curve.

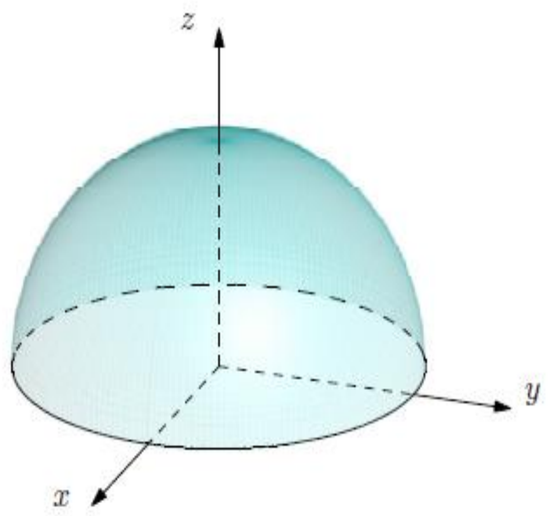


Esempio
Siano $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R^3$ due vettori tali che $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, e sia $\boldsymbol{c} \in R^3$ un terzo vettore.
La superficie $\boldsymbol{\sigma} : R^2 \to R^3$ data da

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(u, v) &= \boldsymbol{a}u + \boldsymbol{b}v + \boldsymbol{c} \\ &= (a_1 u + b_1 v + c_1)\boldsymbol{i} + (a_2 u + b_2 v + c_2)\boldsymbol{j} + (a_3 u + b_3 v + c_3)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

costituisce la parametrizzazione del piano *Π* passante per il punto ***c*** e parallelo ai vettori ***a*** e ***b***





Superfici

Per determinare l'equazione cartesiana di tale piano, poniamo $\boldsymbol{x} = (x, y, z) = \boldsymbol{\sigma}(u, v)$ ed osserviamo che si ha

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}u + \boldsymbol{b}v$$

ossia il vettore $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}$ è una combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.
Pertanto, si ha

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}\, u + (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b}\, v = 0$$

ossia

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

Ne segue che il piano in questione ha equazione

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

dove α, β e γ sono le componenti del vettore $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, mentre $\delta = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$

Ogni funzione scalare continua $\phi : R \to R$, definita su una regione del piano, definisce la superficie $\boldsymbol{\sigma} : R \to R^3$

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + \phi(u, v)\boldsymbol{k}$$

il cui sostegno è il grafico di ϕ. Una tale superficie si dice **superficie cartesiana** o **topografica** (rispetto all'asse *z*).

Superfici

Ad esempio, la superficie $\sigma: R = \{(u, v) \in R^2: u^2 + v^2 \leq 1\} \to R^3$

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + \sqrt{1 - u^2 - v^2}\boldsymbol{k}$$

ha come sostegno l'emisfero superiore della sfera di centro l'origine e raggio unitario

Superfici di rotazione

Se ho una curva piana $\gamma: I \subseteq R \rightarrow R^3$ tale che il suo sostegno Γ giaccia nel semipiano xz con $x \geq 0$, facendo ruotare Γ intorno all'asse z, si ottiene il sostegno Σ della superficie di rotazione $\sigma: I \times [0,2\pi] \rightarrow R^3$ data da

$$\sigma(u,v) = \gamma_1(u)cosv\boldsymbol{i} + y_2(u)sinv\boldsymbol{j} + \gamma_3(u)\boldsymbol{k}$$

L'arco della curva che genera la superficie si chiama meridiano.

Esempio:

La superficie dell'ellissoide centrato in $\boldsymbol{x}_0$ e avente semiassi $a, b, c > 0$, definita dall'equazione cartesiana

$$\frac{(x-x_0)^1}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

è parametrizzata da

$$\boldsymbol{\sigma}(u,v) = (x_0 + asinu\ cosv)\boldsymbol{i} + (y_0 + bsinu\ sinv)\boldsymbol{j} + (z_0 + \ ccosu)\boldsymbol{k}$$

Superfici di rotazione

Se ci limitiamo a considerare le possibilità consentite da $a \geq b \geq c > 0$, abbiamo la seguente casistica:

$a > b > c$ si ha un **ellissoide scaleno**;

$a > b = c$ si ha uno **sferoide prolato** (a forma di pallone da rugby);

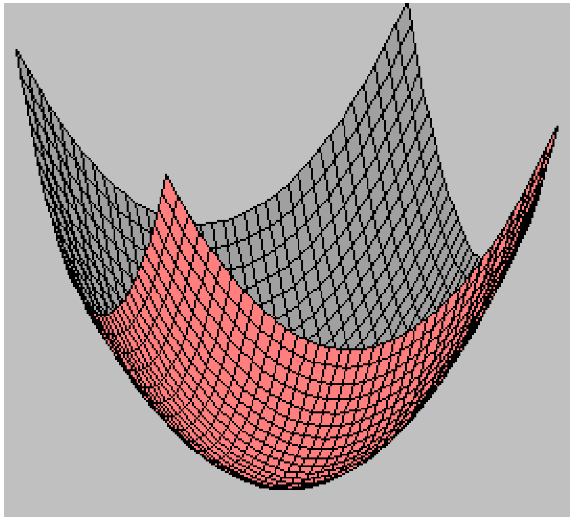
$a = b > c$ si ha uno **sferoide oblato** (a forma di lenticchia);

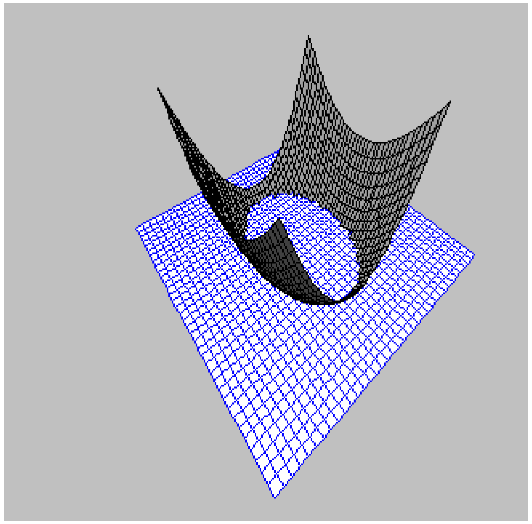
$a = b = c$ si ha una sfera, come già segnalato.

Superfici di rotazione

Paraboloide ellittico

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{z}{c}$$

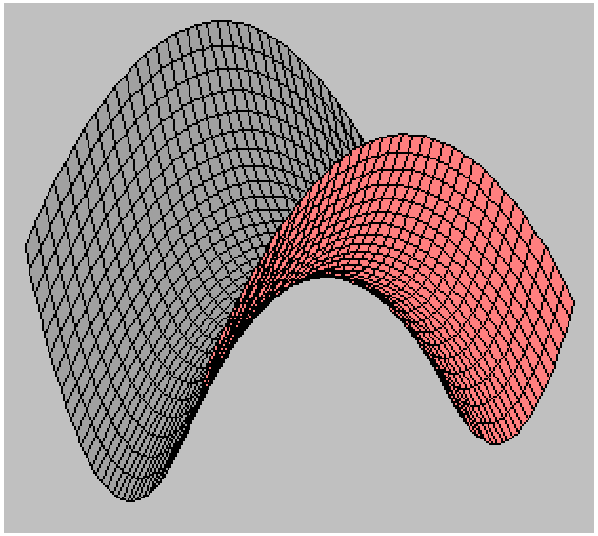


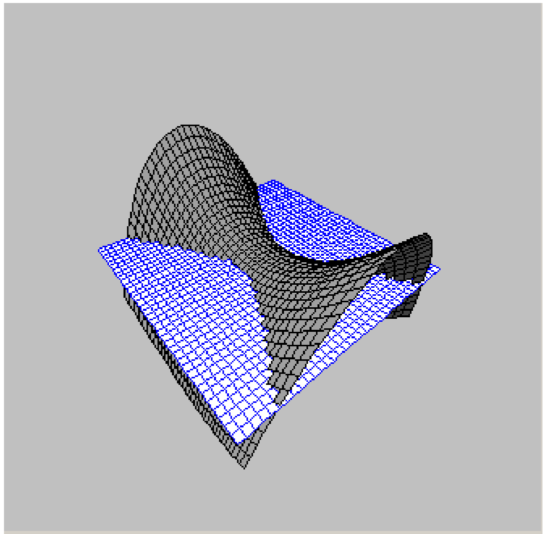


Superfici di rotazione

Paraboloide iperbolico

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{z}{c}$$



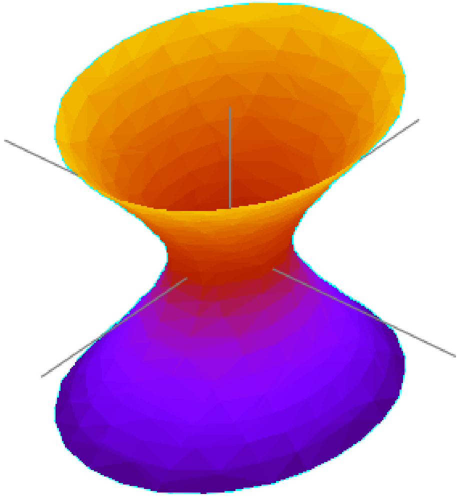


Dove **a** e **b** rappresentano il grado di curvatura nel piano $x - z$ e $y - z$, mentre c rappresenta la direzione di apertura del paraboloide, verso l'alto per $\boldsymbol{c} > 0$ (per il paraboloide ellittico) e verso il basso lungo l' asse x per **c**>0 (per il paraboloide iperbolico).

Superfici di rotazione

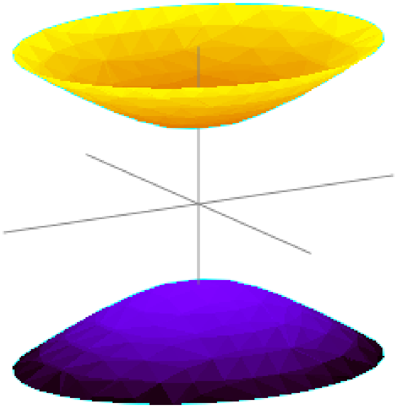
Iperboloide a una falda (iperbolico)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



Iperboloide a due falde (ellittico)

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



Superfici regolari

Definizione

Una **superficie** $\boldsymbol{\sigma} : R \to R^3$ *si dice* **regolare** *se* $\boldsymbol{\sigma}$ *è di classe* C^1 *su* $A = \dot{R}$ *e se la matrice jacobiana* $\boldsymbol{J_\sigma}$ *ha rango massimo* (= 2) *in ogni punto di A.*

Una **calotta** *(ossia una superficie definita su una regione R compatta) si dice* **regolare** *se è la restrizione a R di una superficie regolare definita su un aperto che contiene R.*

La condizione su ***Jσ*** equivale al fatto che i vettori $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_o, v_0)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_o, v_0)$ sono linearmente indipendenti per ogni $(u_o, v_0) \in A$

Definizione

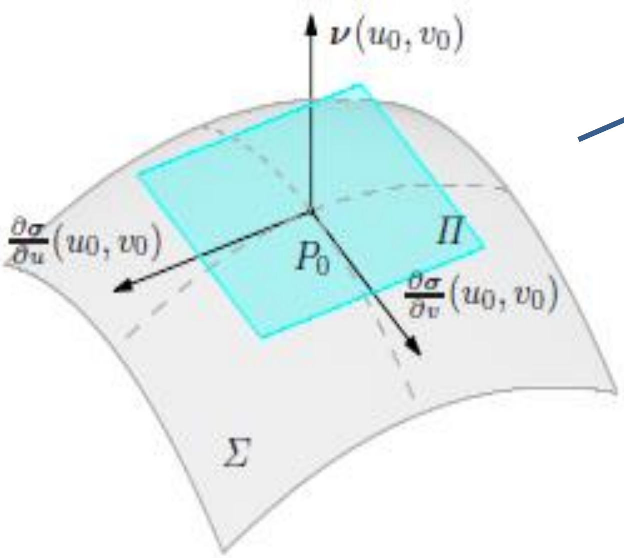
Un sottoinsieme Σ *di* R^3 *è una* **superficie regolare e semplice** *(oppure una* **calotta regolare e semplice***) se esiste una parametrizzazione* $\sigma : R \to \Sigma$ *di* Σ *avente tali proprietà.*

Piano tangente

Sia $\Sigma \subset R^3$ una superficie regolare e semplice parametrizzata da $\sigma : R \to \Sigma$ e sia $P_0 = \sigma(u_0, v_0)$ un punto su Σ, immagine di un punto $(u_0, v_0) \in A = \dot{R}$. Ricordando che i vettori $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u_o, v_0)$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_o, v_0)$ sono linearmente indipendenti per ogni $(u_o, v_0) \in A$ si può introdurre l'applicazione $\Pi: R^2 \to R^3$ data da:

$$\Pi(u,v) = \sigma(u_0, v_0) + \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u_o, v_0)(u - u_0) + \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_o, v_0)(v - v_0)$$

Che costituisce una parametrizzazione di un piano passante per P_0. Chiamiamo tale piano il piano tangente alla superficie in P_0.



I vettori tangenti a tali curve in P_0.sono rispettivamente i vettori $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u_o, v_0)$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_o, v_0)$; pertanto, le rette tangenti alle curve in P_0.giacciono sul piano tangente a Σ in P_0 e precisamente lo generano attraverso tutte le loro combinazioni lineari. Più in generale, si può dimostrare che il piano tangente contiene il vettore tangente ad una qualsiasi curva regolare passante per P_0 e giacente sulla superficie Σ.

Piano tangente

Definizione
Il vettore
$$\nu(u_0, v_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_o, v_0) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_o, v_0)$$
si dice vettore normale alla superficie Σ in P_0. Il versore normale ad esso associato sarà indicato con
$$n(u_0, v_0) = \frac{\nu(u_0, v_0)}{\|\nu(u_0, v_0)\|}$$

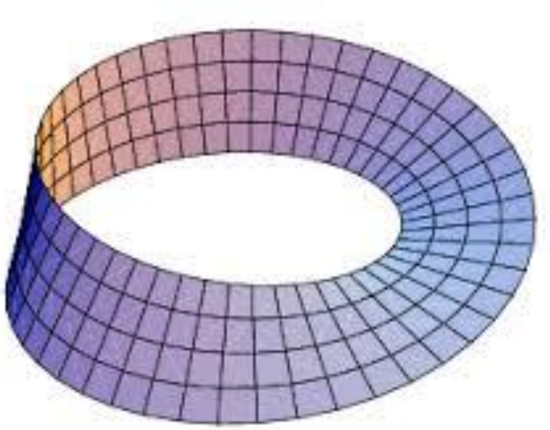
Si può dimostrare che, come la retta tangente per le curve, così il piano tangente è intrinseco al sostegno della superficie, vale a dire indipendente dalla sua parametrizzazione. Conseguentemente, la direzione del vettore normale è intrinseca, mentre modulo e verso dipendono dalla particolare parametrizzazione.

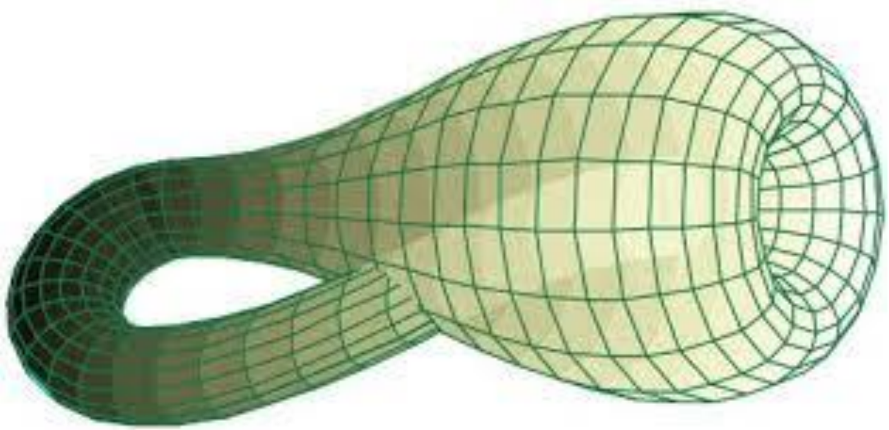
Il piano tangente alla superficie Σ è invariante per parametrizzazioni congruenti. Due diverse parametrizzazioni congruenti generano vettori normali aventi la stessa direzione, mentre il verso `e lo stesso se le parametrizzazioni sono equivalenti (cambiamento di variabili destrorso) ed è opposto altrimenti (cambiamento di variabile sinistrorso).

Superfici orientabili

Due diverse parametrizzazioni di una curva regolare e semplice Γ in R^n sono tra loro congruenti (e dunque possiamo definire due diverse orientazioni su di essa).
Un analogo risultato per le superfici non vale.
Alcuni controesempi sono il nastro di Mobius e la bottiglia di Klein.
Ha dunque senso dare la seguente definizione.

Definizione
Una superficie regolare e semplice $\Sigma \subset R^3$ *si dice* **orientabile** *se, prese due qualunque parametrizzazioni regolari e semplici, esse sono tra loro congruenti.*





Integrali superficiali di I specie

Sia *S* una *superficie regolare* definita nel dominio limitato e connesso *D* attraverso la rappresentazione parametrica $x = x(u; v)$ $y = y(u; v)$ $z = z(u;\ v)$
con $(u, v) \in D \subset R^2$.
Sia $\Delta = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ una suddivisione in superfici elementari, della superficie regolare *S* realizzata mediante le curve coordinate sulla superficie. Si denoti con ω_i l'area dell'elemento di superficie s_i e con d_i il diametro della più piccola sfera che contiene l'elemento di superficie S_i.
Siano

$$v(\Delta) = \max_{1 \le i \le n} d_i$$

e $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ un punto qualsiasi di S_i.
Sia *f* (*x; y; z*) una funzione continua in un assegnato dominio *D* dello spazio e sia *S* una superficie regolare la quale sia interamente contenuta in *D*. Il valore della somma

$$\sigma(f, \Delta, N) = \sum_{i=1}^{n} f\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\omega_i$$

dipende, in generale, sia dal modo in cui \`e suddivisa la superficie *S* e sia dai punti $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ $(i\ =\ 1; 2,3, \dots n)$ scelti ad arbitrio nelle singole superfici in cui \`e stata suddivisa la superficie Σ.
La sommatoria ha per limite il numero reale *I* per $v(\Delta)$ tendente a zero, e si scrive

$$\lim_{v(\Delta)\to 0} \sigma(f, \Delta, N) = \lim_{v(\Delta)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\,(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\omega_i = I$$

Integrali superficiali di I specie

La sommatoria ha per limite il numero reale *I* per $v(\Delta)$ tendente a zero, e si scrive

$$\lim_{v(\Delta)\to 0} \sigma(f,\Delta,N) = \lim_{v(\Delta)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\,(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\omega_i = I$$

quando $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tale che, per tutte le suddivisioni Δ di S in elementi di superficie s_i tali che $v(\Delta) < \delta$ e comunque si scelgano i punti $N_i \in s_i$ risulti

$$|\sigma(f,\Delta,N) - I| < \varepsilon$$

Quando esiste tale limite, *I* si denota con il simbolo

$$I = \iint_S f(x,y,z)d\sigma$$

e si chiama *integrale di superficie di prima specie* esteso alla superficie *S*.
Se *S* ha una rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

allora sussiste la seguente *formula di riduzione ad un integrale doppio:*

$$\iint_S f(x,y,z)d\sigma = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|r'_u \times r'_v|dudv$$
$$= \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG - F^2}dudv$$

Integrali superficiali di I specie

Proposizione

Per gli integrali superficiali valgono le proprietà di linearità, additività, monotonia

Proprietà di linearità

Qualunque siano le funzione continue f_1 e f_2 in V (dove V è un dominio di R^3 tale che $S \subset V$), allora

$$\int_S (c_1 f_1(x,y,z) + c_2 f_2(x,y,z))d\sigma = c_1 \int_S (f_1(x,y,z))d\sigma + c_2 \int_S f_2(x,y,z)d\sigma$$

Proprietà di additività

Per ogni funzione f continua in V e $S = S_1 \cup S_2$, allora

$$\int_S f(x,y,z)d\sigma = \int_{S_1} f(x,y,z)d\sigma + \int_{S_2} f(x,y,z)d\sigma$$

Proprietà di monotonia

Date due funzioni reali f e g continue in V e tali che $f(x,y,z) \leq g(x,y,z) \forall (x,y,z) \in V$ allora

$$\int_S f(x,y,z)d\sigma \leq \int_S g(x,y,z)d\sigma$$

Integrali superficiali di II specie

Definizione.
Sia S una superficie regolare. Se è possibile scegliere il versore normale in modo che, partendo da un punto $P_0 \in S$ *e seguendo una qualsiasi curva regolare e chiusa sulla superficie, il versore normale varii con continuità e ritorni nella posizione iniziale, allora si dice che la superficie S è orientabile.*

Il versore normale determina (localmente) l'orientamento della superficie.
Scelto un verso per la normale n a *S*, si definisce *faccia positiva* della superfice regolare orientabile quella volta verso la normale positiva; l'altra faccia è detta *negativa*. Viceversa, fissata la faccia positiva di *S*, resta definita l'orientamento della normale
La frontiera di *S* si orienta positivamente (e in tal caso si scrive ∂S^+) scegliendo il verso di percorrenza della curva ∂S in modo da lasciare i punti di *S* a sinistra.
Ora, sia fissato l'orientamento della superficie *S* e sia positiva la faccia superiore rispetto al piano *xy*, cioè la faccia per cui il versore $\boldsymbol{n}(= \cos\alpha \boldsymbol{i} + \cos\beta \boldsymbol{j} + \cos\gamma \boldsymbol{k})$ della normale alla superficie forma un angolo $\gamma \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ con l'asse *z:*

Integrali superficiali di II specie

Definizione.
L'integrale di superficie di seconda specie esteso alla superficie regolare e orientata S è definito da

$$\iint_{S^+} F_1(x,y,z)dydz + F_2(x,y,z)dzdx + F_3(x,y,z)dxdy$$
$$= \iint_{S^+} [F_1 cos\alpha + F_2(x,y,z)cos\beta + F_3(x,y,z)cos\gamma]d\sigma = \iint_{S^+} F \cdot n d\sigma$$

dove

$$F = F_1\,(x;\ y;\ z)\boldsymbol{i} + F_2\,(x;\ y;\ z)\boldsymbol{j}\ + F_3\,(x;\ y;\ z)\boldsymbol{k}$$

Il termine

$$\iint_{S^+} F \cdot n d\sigma$$

rappresenta il **flusso del campo vettoriale** F attraverso la superficie S.

Il flusso del campo vettoriale F cambia di segno se cambia l'orientamento di *S* (cioè il verso di n).

Integrali superficiali: applicazioni meccaniche

Sia

$$\rho: S \to [0, +\infty]$$

la densità di una distribuzione di massa sulla superficie S. La massa totale M è definita è definita da

$$M = \int_S \rho(x, y, z) d\sigma$$

mentre il centro di massa (baricentro) G di S è definito come il punto di coordinate

$$x_G = \frac{1}{M} \int_S x \cdot \rho(x, y, z) d\sigma$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_S y \cdot \rho(x, y, z) d\sigma$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_S z \cdot \rho(x, y, z) d\sigma$$

Nel caso di una distribuzione uniforme di massa, cioè ρ costante, allora il baricentro G della superficie è dato da

$$x_G = \frac{1}{A(S)} \int_S x \, d\sigma$$

$$y_G = \frac{1}{A(S)} \int_S y \, d\sigma$$

$$z_G = \frac{1}{A(S)} \int_S z \, d\sigma$$