2 Numeri interi relativi

2.1 I numeri che precedono lo zero

Con i numeri naturali non sempre è possibile eseguire l'operazione di sottrazione. In particolare, non è possibile sottrarre un numero più grande da un numero più piccolo, per esempio $5 - 12$. Tuttavia ci sono situazioni in cui una sottrazione di questo tipo deve essere eseguita.

Per esempio, è possibile acquistare un'auto di € 12 000 pur avendo soltanto risparmi in banca di soli € 5 000. In questo caso si tratta di togliere dai € 5 000 i € 12 000 che servono per acquistare l'auto: materialmente non è possibile e si ricorre a un prestito.

Pensiamo ad una comunicazione dei meteorologi relativa alle previsioni del tempo: «domani la temperatura, a causa di una perturbazione proveniente dai paesi nordici, potrebbe subire un drastico calo e scendere anche di 10 gradi». Riflettiamo: se oggi la temperatura è di 9 gradi, come possiamo esprimere numericamente la temperatura prevista per domani? Alcuni diranno: «il liquido contenuto nel termometro si posizionerà al di sotto dello zero», altri «domani la temperatura sarà di un grado sotto lo zero» e altri ancora «la temperatura sarà di -1 grado».

Leggiamo nel testo di geografia: «Il punto più profondo della Terra si trova nella fossa delle Marianne; esso supera di 2 061 metri l'altezza del monte Everest e si trova a 10 916 metri sotto il livello del mare». Se attribuiamo al livello del mare l'altitudine 0, allora potremmo esprimere la profondità della Fossa con il numero $-10\,916$ e l'altezza del monte Everest con il numero $+8\,855$ (figura 2.1).

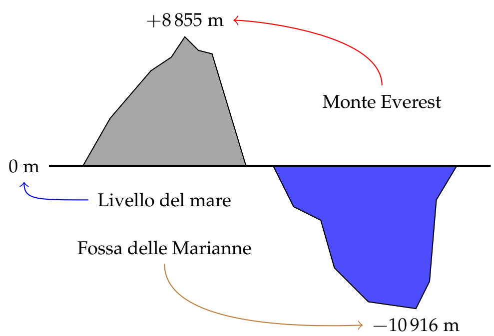


Figura 2.1: Il monte Everest e la fossa delle Marianne.

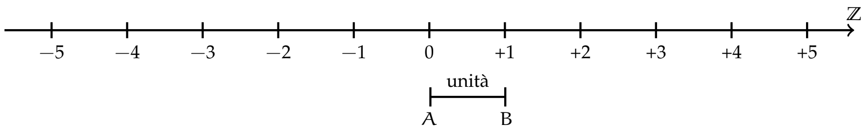
Per rappresentare le grandezze che hanno due sensi, come temperature, crediti e i debiti, latitudine nord e sud, altezze sopra il livello del mare e profondità marine i numeri naturali non bastano. I matematici in queste situazioni usano i *numeri interi relativi* che si scrivono utilizzando gli stessi numeri naturali ma preceduti dal segno "+" se sono numeri maggiori di 0 e dal segno "−" se sono numeri minori di 0. L'insieme di questi numeri si costruisce raddoppiando i numeri naturali $\mathbb{N}$ e facendo precedere ciascun numero dal segno "+" o "−", ad eccezione dello 0, al quale non si attribuisce segno.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$$

L'insieme dei numeri relativi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}$. In particolare, l'insieme dei soli numeri interi relativi maggiori o uguali a 0 si indica con il simbolo $\mathbb{Z}^+$, mentre l'insieme dei numeri interi minori o uguali a 0 si indica con il simbolo $\mathbb{Z}^-$.

2.2 I numeri relativi e la retta

I numeri relativi possono essere rappresentati su una retta. Disegniamo una retta, su di essa prendiamo un punto di riferimento al quale associamo il numero zero, il verso di percorrenza da sinistra verso destra, un segmento $\overline{AB}$ come unità di misura. Riportiamo questa unità di misura più volte partendo da zero e procedendo nel verso stabilito aggiungiamo ogni volta uno: ai punti trovati associamo gli interi positivi. Ripetiamo l'operazione partendo dallo zero, ma con il verso di percorrenza a sinistra: ai punti trovati associamo gli interi negativi.



Possiamo interpretare questi numeri come il numero di passi da fare sulla retta, partendo dallo zero verso destra se il segno è positivo, verso sinistra se il segno è negativo.

Definizione 2.1. Due numeri relativi si dicono *concordi*, se hanno lo stesso segno; si dicono *discordi* se hanno segni opposti.

Esempio 2.1. Concordi-discordi.

- $+3$ e $+5$ sono concordi;
- $+3$ e -5 sono discordi;
- -5 e -2 sono concordi;
- -3 e $+2$ sono discordi.

Definizione 2.2. Il *valore assoluto* di un numero relativo è il numero senza il segno; quindi un numero naturale.

Il valore assoluto si indica inserendo il numero relativo tra due barre verticali $|*|$. In linguaggio matematico:

$$\boxed{|a| = a \quad \text{se } a \geqslant 0, \qquad |a| = -a \quad \text{se } a < 0.}$$

Esempio 2.2. Valore assoluto.

- $|+2| = 2$;
- $|-5| = 5$;
- $|-73| = 73$;
- $|+13| = 13$.

Definizione 2.3. Due numeri interi relativi sono *uguali* se hanno lo stesso segno e lo stesso valore assoluto; si dicono *opposti* se hanno lo stesso valore assoluto ma segni diversi.

Sono numeri opposti $+3$ e -3; $+5$ e -5; $+19$ e -19.

❑ **Osservazione** Per indicare un numero positivo è possibile scrivere il numero senza il segno "+". Per esempio si può scrivere indifferentemente $+1$ o 1, $+12$ o semplicemente 12.

2.3 Confronto di numeri relativi

Dati due numeri interi relativi quello più grande è quello che sulla retta è rappresentato più a destra. In particolare:

a) ogni numero intero positivo è maggiore di 0 e di ogni numero negativo;
b) tra due numeri positivi il più grande è quello che ha valore assoluto maggiore;
c) ogni numero negativo è minore di 0 e di ogni numero positivo;
d) tra due numeri negativi il più grande è quello che ha valore assoluto minore;
e) 0 è minore di ogni numero positivo e maggiore di ogni numero negativo.

In maniera analoga a quanto visto per i numeri naturali $\mathbb{N}$, anche per i numeri relativi $\mathbb{Z}$ si possono usare i simboli di disuguaglianza: per indicare, ad esempio, che un numero è maggiore di un altro si usa separare i due numeri con il simbolo "$>$"; per indicare che il primo è minore del secondo si usa mettere tra i due numeri il simbolo "$<$".

Esempio 2.3. Confronto di numeri relativi.

- ➡ $+4 > +2$: i numeri sono positivi, il maggiore è $+4$ perché ha valore assoluto maggiore;
- ➡ $-1 > -3$: i due numeri sono negativi, il maggiore è -1 perché ha valore assoluto minore;
- ➡ $-2 < +4$: il numero negativo è minore del numero positivo;
- ➡ $+4 > 0$: ogni numero positivo è maggiore di 0;
- ➡ $-2 < 0$: ogni numero negativo è minore di 0.

Usando la rappresentazione dei numeri sulla retta l'ordinamento risulta più facile da verificare: il verso di percorrenza della retta (la freccia) indica la direzione nella quale i numeri crescono.

✍ *Esercizi proposti:* 2.1, 2.2, 2.3, 2.4

2.4 Le operazioni con i numeri relativi

Con i numeri relativi è sempre possibile eseguire le addizioni, le moltiplicazioni e le sottrazioni. Questo significa che se si addizionano, si sottraggono o si moltiplicano due numeri relativi il risultato si trova sempre nella retta dei numeri relativi.

2.4.1 Addizione

Osserviamo prima di tutto che il simbolo di addizione $(+)$ è lo stesso che si usa per indicare il segno dei numeri positivi, pertanto occorre prestare attenzione quando si incontra il segno "+" al significato che esso ha. Almeno all'inizio è bene usare una scrittura del tipo $(+2) + (+5)$ per indicare la somma tra i numeri $+2$ e $+5$.

L'addizione di due numeri relativi si esegue in due modi diversi a seconda che gli addendi siano concordi o discordi.

La *somma di due numeri relativi concordi* è il numero che ha per valore assoluto la somma dei singoli valori assoluti e come segno lo stesso segno degli addendi.

Esempio 2.4. Somma di numeri relativi concordi.

- $(+3) + (+5) = \ldots$: i due numeri da sommare sono concordi, il loro segno è "+", i loro valori assoluti sono 3 e 5, la loro somma è 8. Pertanto
$$(+3) + (+5) = +8;$$
- $(-2) + (-5) = \ldots$: i due numeri sono entrambi negativi, quindi sono concordi, i loro valori assoluti sono 2 e 5, la somma ha valore assoluto 7, il segno è "−". Pertanto
$$(-2) + (-5) = -7.$$

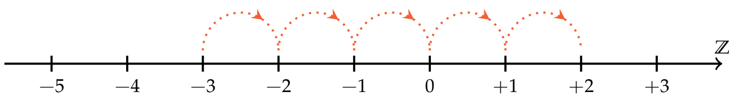
La *somma di due numeri relativi discordi* è il numero che ha per valore assoluto la differenza dei valori assoluti e come segno il segno del numero che ha valore assoluto maggiore.

Esempio 2.5. Somma di numeri relativi discordi.

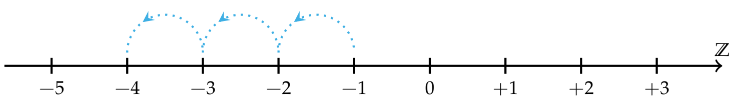
- $(-5) + (+2) = \ldots$: i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è -5, pertanto il risultato ha lo stesso segno di -5, cioè è negativo. In definitiva
$$(-5) + (+2) = -3;$$
- $(+5) + (-2) = \ldots$: i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 5 e 2, la loro differenza è 3, il numero che ha valore assoluto maggiore è $+5$, pertanto il risultato ha lo stesso segno di $+5$, cioè è positivo. In definitiva
$$(+5) + (-2) = +3;$$
- $(+3) + (-7) = \ldots$: i due numeri da sommare sono discordi, i loro valori assoluti sono 3 e 7, la loro differenza è 4, il numero che ha valore assoluto maggiore è -7, quindi il risultato ha segno negativo. In definitiva
$$(+3) + (-7) = -4.$$

L'addizione si può rappresentare sulla retta dei numeri come l'azione di muoversi nel verso indicato dal segno del secondo addendo: se è positivo si va verso destra, se è negativo si va verso sinistra, iniziando dal punto che rappresenta il primo addendo.

$$(-3) + (+5) = 2$$



$$(-1) + (-3) = -4$$



✍ *Esercizi proposti:* 2.6, 2.7, 2.8

2.4.2 Sottrazione

La sottrazione tra due numeri relativi si esegue facendo la somma del primo numero con l'opposto del secondo.

Esempio 2.6. Sottrazione di numeri relativi.

- $(+2) - (+3) = (+2) + (-3) = -1$;
- $(+1) - (+3) = (+1) + (-3) = -2$;
- $(+7) - (-2) = (+7) + (+2) = +9$;
- $(-2) - (-1) = (-2) + (+1) = -1$;
- $(+3) - (-7) = (+3) + (+7) = +10$;
- $(-5) - (+5) = (-5) + (-5) = -10$.

Cambio la sottrazione in addizione

$$(+2) \; - \; (+3) \; = \; (+2) \; + \; (-3)$$

Cambio il numero +3 con il suo opposto −3

Figura 2.2

✍ *Esercizi proposti:* 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13

2.4.3 Somma algebrica

Poiché la sottrazione può essere trasformata in addizione, si può semplificare la scrittura di addizione e sottrazione di numeri relativi utilizzando soltanto l'operazione di addizione e omettendo di scrivere il segno "+" dell'addizione. Questo tipo di addizione tra numeri relativi si chiama *somma algebrica*.

Esempio 2.7. Somma algebrica.

- $(+1) + (-2)$: se omettiamo il segno di addizione $(+)$ e le parentesi otteniamo $1 - 2 = -1$;
- $(+1) - (+3)$: si trasforma la sottrazione in addizione con l'opposto $(+1) + (-3)$ omettendo il segno di addizione $(+)$ ed eliminando le parentesi si ottiene $1 - 3 = -2$;
- $(-1) + (+2) + (-3) + (+2) + (-7) + (-5)$: si scrive in modo sintetico

$$-1 + 2 - 3 + 2 - 7 - 5 = -12.$$

La somma algebrica gode delle proprietà associativa e commutativa, pertanto per sommare più numeri relativi si può procedere senza rispettare l'ordine in cui sono scritti.

Per esempio per calcolare il risultato di $-1 + 2 - 3 + 2 - 7 - 5$ si possono prima sommare tra di loro i numeri positivi e $+2 + 2 = +4$ e poi tra di loro i numeri negativi $-1 - 3 - 7 - 5 = -16$. Quindi $+4 - 16 = -12$.

✍ *Esercizi proposti:* 2.14, 2.15

2.4.4 Moltiplicazione

Dati due interi relativi da moltiplicare si chiamano *fattori* i due numeri e *prodotto* il risultato dell'operazione.

Il *prodotto di due numeri interi relativi* è il numero intero avente come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti dei fattori e come segno il segno "$+$" se i fattori sono concordi, il segno "$-$" se i fattori sono discordi.

Esempio 2.8. Prodotto di numeri relativi.

- $(+3) \cdot (-2) = -6$: il numero 6 si ottiene da $3 \cdot 2$, il segno è negativo perché i fattori sono discordi;
- $(-2) \cdot (-3) = +6$: il numero 6 si ottiene da $3 \cdot 2$, il segno è positivo perché i fattori sono concordi;
- $(+5) \cdot (+3) = +15$: il numero 15 si ottiene da $5 \cdot 3$, il segno è positivo perché i fattori sono concordi;
- $(-1) \cdot (+2) = -2$: il numero 2 si ottiene da $1 \cdot 2$, il segno è negativo perché i fattori sono discordi.

Per determinare il segno di un prodotto si può ricorrere alla seguente regola dei segni: nella prima riga e nella prima colonna sono collocati i segni dei fattori, all'incrocio tra la riga e la colonna c'è il segno del risultato.

$\cdot$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

Nel caso si debbano eseguire più moltiplicazioni il segno del prodotto è negativo se il segno meno è presente in un numero dispari di fattori; se il segno negativo non è presente oppure è presente un numero pari di volte il prodotto è positivo.

Perché "meno" per "meno" fa "più"? Una possibile spiegazione.

$$0 = 0 \cdot (-2) = (-3+3) \cdot (-2) = (-3) \cdot (-2) + (+3) \cdot (-2) = (-3) \cdot (-2) - 6.$$

Quale valore dobbiamo assegnare a $(-3) \cdot (-2)$ affinché il numero ottenuto sommato a -6 dia 0? Evidentemente il numero $+6$.

Esempio 2.9. La regola dei segni.

- $(+3) \cdot (+2) \cdot (-2) = -12$: il risultato è negativo perché vi è un solo segno "$-$" tra i fattori;
- $(-2) \cdot (-3) \cdot (+5) \cdot (-2) \cdot (-1) = +60$: il risultato è positivo perché ci sono quattro segni "$-$";
- $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (+2) \cdot (-3) = -72$: il risultato è negativo poiché ci sono cinque "$-$".

✍ *Esercizi proposti:* 2.16, 2.17, 2.18

2.4.5 Divisione

La regola della divisione è del tutto analoga a quella della moltiplicazione. Per dividere due numeri relativi si dividono i valori assoluti e si attribuisce al risultato il segno "$+$" se i numeri da dividere sono concordi, il segno "$-$" se i numeri sono discordi.

Osserva che mentre addizione, sottrazione e moltiplicazione sono operazioni sempre possibili tra numeri interi relativi, ossia il risultato di queste operazioni è sempre un numero intero relativo, il risultato della divisione non sempre è un numero intero relativo. La divisione tra numeri relativi è possibile se è possibile la divisione tra i loro valori assoluti, ossia se il divisore è diverso da zero ed è un sottomultiplo del dividendo.

Esempio 2.10. Divisione di numeri relativi.

- $(+8) : (+2) = +4$: il risultato è 4 perché $8 : 2 = 4$, il segno è "+" perché sono concordi;
- $(+9) : (-3) = -3$: il risultato è 3 perché $9 : 3 = 3$, il segno è "−" perché sono discordi;
- $(-12) : (-4) = +3$: il risultato è 3 poiché $12 : 4 = 3$, il segno è "+" perché sono concordi.

✍ *Esercizi proposti:* 2.19, 2.20, 2.21

2.4.6 Potenza di un numero relativo

La definizione di potenza per un numero relativo è la stessa di quella data per i numeri naturali (in questo caso la base è un numero relativo ma l'esponente è un numero naturale). Si moltiplicano tra di loro tanti fattori uguali alla base quante volte è indicato dall'esponente. L'unica attenzione che dobbiamo avere è quella relativa al segno:

- se la base è un numero positivo il risultato della potenza sarà sempre positivo;
- se la base è un numero negativo il segno dipende dall'esponente: se l'esponente è dispari il risultato è negativo, se l'esponente è pari il risultato è un numero positivo.

Esempio 2.11. Potenze di numeri relativi.

- $(+3)^2 = (+3) \cdot (+3) = +9$;
- $(+3)^3 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +27$;
- $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$;
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$;
- $(-2)^4 = +16$;
- $(-2)^5 = -32$;
- $(-1)^6 = +1$;
- $(-1)^7 = -1$.

Ricordiamo che un qualsiasi numero, diverso da 0, elevato a 0 dà come risultato il numero 1 e che qualsiasi numero elevato a 1 rimane invariato.

$$a^0 = 1 \text{ con } a \neq 0, \qquad a^1 = a.$$

Esempio 2.12. Potenze di numeri relativi, con esponente 0 o 1.

$$(-3)^0 = 1, \qquad (+5)^0 = 1, \qquad (-2)^1 = -2, \qquad (+7)^1 = +7.$$

✍ *Esercizi proposti:* 2.22, 2.23, 2.24, 2.25, 2.26, 2.27

2.4.7 Le proprietà delle operazioni nell'insieme dei numeri relativi

Proprietà commutativa

Un'operazione gode della proprietà *commutativa* se cambiando l'ordine dei termini il risultato non cambia.

Somma algebrica $a+b=b+a$.
Vale la proprietà commutativa: $-3+5=5-3=+2$.

Moltiplicazione $a\cdot b=b\cdot a$.
Vale la proprietà commutativa: $(-3)\cdot(-5)=(-5)\cdot(-3)=+15$.

Potenza $a^b\neq b^a$.
Non vale la proprietà commutativa: $3^2=9\neq 2^3=8$.

Proprietà associativa

Un'operazione gode della proprietà *associativa* se presi tre numeri si ottiene sempre lo stesso risultato indipendentemente da come si raggruppano i numeri per eseguire l'operazione.

Somma algebrica $(a+b)+c=a+(b+c)$.
Dovendo sommare $+3-5-2$ e raggruppando i primi due numeri si ha

$$(+3-5)-2=-2-2=-4.$$

Raggruppando gli ultimi due numeri si ha $3+(-5-2)=3-7=-4$.
Nella somma algebrica tra numeri relativi *vale* la proprietà associativa.

Moltiplicazione $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.
Dovendo moltiplicare tre o più numeri relativi si può procedere scegliendo a piacere da quale moltiplicazione iniziare. Per esempio, dovendo moltiplicare $(-3)\cdot(-5)\cdot(-2)$, si può cominciare dalla prima moltiplicazione

$$[(-3)\cdot(-5)]\cdot(-2)=(+15)\cdot(-2)=(-30).$$

Oppure si può cominciare dalla seconda moltiplicazione

$$(-3)\cdot[(-5)\cdot(-2)]=(-3)\cdot(+10)=(-30).$$

Nella moltiplicazione tra numeri relativi *vale* quindi la proprietà associativa.

Elemento neutro

Un'operazione su uno specifico insieme numerico ha *elemento neutro* se esiste, ed è unico, un numero che composto con un qualsiasi altro numero lo lascia inalterato.

Nella somma algebrica l'elemento neutro è 0 sia che si trovi a destra sia che si trovi a sinistra dell'operazione:

$$+3+0=+3,\qquad -2+0=-2,\qquad 0+5=+5,\qquad 0-4=-4.$$

Nella moltiplicazione l'elemento neutro è $+1$ sia a destra sia a sinistra:

$$-5\cdot(+1)=-5,\qquad +3\cdot(+1)=+3,\qquad +1\cdot(-3)=-3,\qquad +1\cdot(+7)=+7.$$

Nella divisione l'elemento neutro è $+1$ solo se si trova a destra:

$$a:(+1)=a,\qquad +1:a=\dots.$$

Dividendo $+1$ per un numero intero relativo si ottiene un numero intero solo se il divisore è $+1$ o -1.

2.4.8 Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

Moltiplicare il risultato dell'addizione di più numeri per un altro numero dà lo stesso risultato che moltiplicare ogni addendo per il fattore e addizionare i prodotti ottenuti. Questa proprietà, detta *distributiva*, vale sia se la somma è a destra sia se è a sinistra.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Esempio 2.13. Verifica della proprietà distributiva nell'espressione: $+3 \cdot (-2 + 5)$.

$$+3 \cdot (-2 + 5) = (+3) \cdot (-2) + (+3) \cdot (+5) = -6 + 15 = +9$$
$$+3 \cdot (-2 + 5) = (+3) \cdot (+3) = +9$$

Otteniamo lo stesso risultato se applichiamo la proprietà distributiva o se eseguiamo per prima la somma algebrica tra parentesi.

✍ *Esercizi proposti:* 2.28, 2.29

2.5 Esercizi

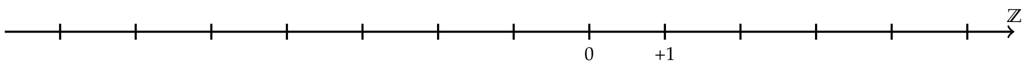
2.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

2.3 - Confronto di numeri relativi

2.1. Riscrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) e in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo) i seguenti numeri relativi:

a) $+11 \quad -3 \quad 0 \quad +2 \quad -5 \quad -7 \quad +1$;
b) $-5 \quad -2 \quad +3 \quad -1 \quad 0 \quad +7 \quad -9 \quad +13 \quad -21$.

2.2. Disponi sulla retta orientata i seguenti numeri relativi $-3; +2; +5; -7; -5; -1; +3$.



2.3. Per ciascuno dei seguenti numeri relativi scrivi il valore assoluto.

a) $|+3| = \ldots$;
b) $|-5| = \ldots$;
c) $|-1| = \ldots$;
d) $|+10| = \ldots$;
e) $|-11| = \ldots$;
f) $|+7| = \ldots$

2.4. Scrivi tra le seguenti coppie di numeri relativi il simbolo corretto tra "$>$" e "$<$".

a) $-5 \ldots -2$;
b) $-3 \ldots +5$;
c) $-2 \ldots +2$;
d) $-5 \ldots 0$;
e) $-3 \ldots -5$;
f) $-1 \ldots +1$;
g) $+3 \ldots -3$;
h) $-1 \ldots -5$;
i) $0 \ldots +1$;
j) $+3 \ldots 0$;
k) $0 \ldots -2$;
l) $+7 \ldots +2$;
m) $-11 \ldots -101$;
n) $+100 \ldots -99$;
o) $-101 \ldots +110$;
p) $-1\,010 \ldots -1\,100$;
q) $+324 \ldots -282$;
r) $-714 \ldots -851$.

2.4 - Le operazioni con i numeri relativi

2.5. Esegui le seguenti addizioni di numeri relativi.

a) $(+3) + (+2) =$
b) $(-5) + (-5) =$
c) $(-3) + (+5) =$
d) $(+12) + (+2) =$
e) $(-2) + (-3) =$
f) $(-3) + (+13) =$
g) $(+10) + (-5) =$
h) $(+1) + (+1) =$
i) $(-10) + 0 =$
j) $(-4) + (+4) =$
k) $(+7) + (-6) =$
l) $(-9) + (-3) =$
m) $(-101) + (+2) =$
n) $0 + (-9) =$
o) $(-10) + (+10) =$

2.6. Per ognuno dei seguenti numeri relativi scrivi il numero opposto.

a) $+3 \to \ldots$;
b) $-2 \to \ldots$;
c) $+1 \to \ldots$;
d) $-11 \to \ldots$;
e) $-3 \to \ldots$;
f) $+5 \to \ldots$

2.7. Completa la seguente tabella.

a	$+1$	-2	0	$+2$	-3	$+3$	-1	$+4$	-5	-10
b	0	-2	-3	$+1$	-5	-3	-10	-5	$+4$	$+4$
$a+b$										

2.8. Esegui le seguenti sottrazioni di numeri relativi.

a) $(-1)-(+2)=\ldots;$
b) $(-5)-(+3)=\ldots;$
c) $(-2)-(+5)=\ldots;$
d) $(+12)-(+2)=\ldots;$
e) $(+1)-(-3)=\ldots;$
f) $(-3)-(+1)=\ldots;$
g) $(+11)-(-5)=\ldots;$
h) $(+21)-(+11)=\ldots;$
i) $(-1)-0=\ldots;$
j) $(-3)-(+4)=\ldots;$
k) $(+7)-(-2)=\ldots;$
l) $(-3)-(-3)=\ldots;$
m) $0-(-11)=\ldots;$
n) $(-6)-(-6)=\ldots;$
o) $(+5)-(-5)=\ldots$

2.9. Completa la seguente tabella.

a	-2	-2	-3	$+2$	-10	$+3$	-1	-7	$+8$	-9
b	0	-3	-3	-5	-5	-1	-10	-5	$+8$	$+4$
$a-b$										

2.10. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+2$	-1	$+2$	-10	-5	-1	-7	$+8$	-9
b	$+1$	-3	-2	-1	$+11$	$+1$	-7	-2	-3	-4
c	-3	-5	-6	$+1$	-1	-2	-2	-5	-3	$+2$
$a-(b+c)$										

2.11. Completa la seguente tabella.

a	$+1$	$+2$	-2	-3	$+4$	-5	-1	$+6$	-7	$+10$
b	-1	0	-3	-2	$+4$	-2	$+1$	-4	-3	$+4$
c	0	-1	$+1$	-2	$+3$	-3	$+4$	-5	$+5$	-6
$a-(b+c)$										
$a-b+c$										
$a-b-c$										

2.12. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+2$	-1	$+1$	0	$+1$	-1	$+2$	-2	$+3$
b	-1	$+1$	0	$+1$	-1	$+2$	-2	$+3$	-3	$+3$
$a+b$										
$-a+b$										
$-a-b$										
$-(a+b)$										
$-(a-b)$										
$-(-a+b)$										

2.13. Esegui le seguenti somme algebriche.

a) $+3-1=+\ldots;$
b) $+2-3=-\ldots;$
c) $-5+2=-\ldots;$
d) $-2+2=\ldots\ldots;$
e) $-5-2=\ldots7;$
f) $-3+5=\ldots2;$
g) $+8-0=\ldots\ldots;$
h) $-9+0=\ldots\ldots;$
i) $0-5=\ldots\ldots;$

j) $+1-1=\dots\dots$; l) $+9-3=\dots 6$; n) $-101+9=-\dots$;
k) $-2-2=\dots\dots$; m) $+7-6=+\dots$; o) $-10+5=\dots\ 5$.

2.14. Esegui le seguenti somme algebriche.

a) $-5-2=\dots$; g) $+8-7=\dots$; m) $+4-6=\dots$;
b) $+3-4=\dots$; h) $+2-1=\dots$; n) $-10+5=\dots$;
c) $-1+2=\dots$; i) $-6+2=\dots$; o) $-16-4=\dots$;
d) $-3+4=\dots$; j) $+5-2=\dots$; p) $-3-9=\dots$;
e) $-6+7=\dots$; k) $+4-3=\dots$; q) $+14-7=\dots$;
f) $-1-9=\dots$; l) $+4+1=\dots$; r) $-10-10=\dots$

2.15. Calcola i seguenti prodotti.

a) $(+3)\cdot(-2)=-\dots$; d) $(+1)\cdot(-1)=\dots 1$; g) $0\cdot(-3)=\dots\dots$;
b) $(-5)\cdot(-2)=+\dots$; e) $(+3)\cdot 0=\dots\dots$; h) $(-2)\cdot(+2)=\dots\dots$;
c) $(+2)\cdot(+4)=\dots 8$; f) $(-2)\cdot(-2)=\dots\dots$; i) $(+10)\cdot(-1)=\dots\dots$

2.16. Esegui le seguenti moltiplicazioni.

a) $(+3)\cdot(+1)=\dots$ e) $(+3)\cdot(-3)=\dots$; i) $(+1)\cdot(-10)=\dots$;
b) $(+1)\cdot(-2)=\dots$; f) $(-2)\cdot(+5)=\dots$; j) $(-4)\cdot(+3)=\dots$;
c) $(+3)\cdot(-3)=\dots$; g) $(-1)\cdot(-7)=\dots$; k) $(+5)\cdot(-6)=\dots$;
d) $(-5)\cdot(-1)=\dots$; h) $(+3)\cdot(+11)=\dots$; l) $(-3)\cdot(-2)=\dots$

2.17. Completa la seguente tabella.

a	−2	+2	−1	+2	−10	−5	−1	−7	+8	−9
b	+1	−3	−2	−1	+11	+1	−7	−2	−3	−4
a · b										

2.18. Esegui le seguenti divisioni.

a) $(+4):(+2)=\dots$; e) $(-8):(+4)=\dots$; i) $(-12):(+6)=\dots$;
b) $(+5):(-1)=\dots$; f) $(-4):(+2)=\dots$; j) $(-12):(+4)=\dots$;
c) $(+6):(+2)=\dots$; g) $(-10):(+5)=\dots$; k) $(+12):(-3)=\dots$;
d) $(+8):(-2)=\dots$; h) $(+10):(-2)=\dots$; l) $(-12):(+1)=\dots$

2.19. Completa la seguente tabella.

a	−2	+12	−6	+20	−10	−5	−21	−16	+8	−32
b	+1	−3	−2	−1	−5	+1	−7	−2	−4	−4
a : b										

2.20. Completa la seguente tabella.

a	0	+2	+1	−4	−6	−8	+10	+12	−14	−16
b	+1	−1	−1	+2	−3	+2	−5	−6	−7	+8
$a : b$										
$-a : b$										
$-(a : b)$										
$a : (-b)$										

2.21. Calcola il valore delle seguenti potenze.

a) $(+3)^2 = \ldots;$
b) $(-1)^2 = \ldots;$
c) $(+1)^3 = \ldots;$
d) $(-2)^2 = \ldots;$
e) $(-2)^3 = \ldots;$
f) $(+2)^3 = \ldots;$
g) $(-3)^2 = \ldots;$
h) $(-3)^3 = \ldots;$
i) $(-4)^1 = \ldots;$
j) $(+4)^1 = \ldots;$
k) $(-4)^2 = \ldots;$
l) $(-2)^4 = \ldots;$
m) $(-3)^0 = \ldots;$
n) $(-1)^5 = \ldots;$
o) $(-2)^4 = \ldots$

2.22. Applica le proprietà delle potenze.

a) $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{\cdots};$
b) $(-2)^4 \cdot (-2)^5 = (-2)^{\cdots};$
c) $(-5) \cdot (-5)^2 = (-5)^{\cdots};$
d) $(-10)^2 \cdot (-5)^2 = (\ldots\ldots)^2;$
e) $(-3)^4 : (-3)^2 = (-3)^{\cdots};$
f) $(-7)^3 : (-7)^3 = (-7)^{\cdots};$
g) $(-2)^4 : (-2)^2 = (-2)^{\cdots};$
h) $(-6)^4 : (+2)^4 = (\ldots\ldots)^4;$
i) $\left[(-3)^2\right]^3 = (-3)^{\cdots};$
j) $\left[(-5)^2\right]^3 = (+5)^{\cdots};$
k) $(-3)^3 \cdot (+3)^3 = \ldots;$
l) $(-8)^2 : (-4)^2 = \ldots;$
m) $\left[(-7)^2\right]^3 : (-7)^3 = \ldots;$
n) $\left[(-3)^3\right]^2 : (-3)^4 = \ldots$

2.23. Completa la seguente tabella.

a	−2	+1	+2	−1	+3	−3	−4	−2	+2	−3
b	1	3	2	4	2	3	2	4	5	2
a^b										

2.24. Completa la seguente tabella.

a	−2	+12	−6	+20	−10	−5	−21	−16	+8	−12
b	+1	−3	−2	−1	−5	+1	+19	−14	−4	−8
$(a-b)^2$										

2.25. Completa la seguente tabella.

a	−1	−2	+3	0	+1	+2	−4	+5	−5	−3
a^2										
$-a^2$										
$-(-a)^2$										

2.26. Completa la seguente tabella.

a	-2	-3	$+3$	-1	0	-2	-4	-3	$+4$	$+5$
b	0	$+1$	-1	-2	$+2$	-3	$+2$	-2	-3	-5
$a \cdot b$										
$-a \cdot b$										
$(-a) \cdot (-b)$										
$-a^2 \cdot b$										

2.27. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+2$	-1	$+2$	-10	-5	-1	-7	$+8$	-9
b	$+1$	-3	-2	-1	$+11$	$+1$	-7	-2	-3	-4
c	-3	-5	-6	$+1$	-1	-2	-2	-5	-3	$+2$
$(a+b) \cdot c$										

2.28. Completa la seguente tabella.

a	-2	$+12$	-6	$+20$	-10	-5	-21	-16	$+8$	-12
b	$+1$	-3	-2	-1	-5	$+1$	$+19$	-14	-4	-8
$(a+b) \cdot (a-b)$										

2.29. Completa la seguente tabella.

a	$+1$	0	-1	$+2$	-2	0	$+3$	-3	$+4$	-10
b	$+2$	0	$+1$	-1	-2	-3	$+2$	$+3$	$+4$	$+8$
c	$+3$	$+1$	$+1$	-2	-2	$+3$	-2	0	0	$+2$
$-2 \cdot a + (b-c)$										

2.5.2 Esercizi riepilogativi

2.30. In quali delle seguenti situazioni è utile ricorrere ai numeri relativi?

a) misurare la temperatura;
b) contare le persone;
c) esprimere la data di nascita di un personaggio storico;
d) esprimere l'età di un personaggio storico;
e) indicare il saldo attivo o passivo del conto corrente;
f) indicare l'altezza delle montagne e le profondità dei mari.

2.31. La somma di due numeri relativi è sicuramente positiva quando:

A i due numeri sono concordi.
B i due numeri sono discordi.
C i due numeri sono entrambi positivi.
D i due numeri sono entrambi negativi.

2.32. La somma di due numeri relativi è sicuramente negativa quando:

A i due numeri sono concordi.
B i due numeri sono discordi.
C i due numeri sono entrambi positivi.
D i due numeri sono entrambi negativi.

2.33. Il prodotto di due numeri relativi è positivo quando (più di una risposta possibile):

A i due numeri sono concordi.
B i due numeri sono discordi.
C i due numeri sono entrambi positivi.
D i due numeri sono entrambi negativi.

2.34. Il prodotto di due numeri relativi è negativo quando:

A i due numeri sono concordi.
B i due numeri sono discordi.
C i due numeri sono entrambi positivi.
D i due numeri sono entrambi negativi.

2.35. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a) ogni numero relativo è minore di zero V F
b) la somma di due numeri discordi è zero V F
c) il cubo di un numero intero relativo è sempre negativo V F
d) la somma di due numeri opposti è nulla V F
e) il quoziente di due numeri opposti è l'unità V F
f) il quoziente di due numeri concordi è positivo V F
g) il prodotto di due numeri opposti è uguale al loro quadrato V F
h) il doppio di un numero intero negativo è positivo V F
i) la somma di due interi concordi è sempre maggiore di ciascun addendo V F
j) il quadrato dell'opposto di un intero è uguale all'opposto del suo quadrato V F

2.36. Inserisci l'operazione corretta per ottenere il risultato.

a) $(+2)\dots(-1) = -2$;
b) $(-10)\dots(+5) = -2$;
c) $(-18)\dots(-19) = +1$;
d) $(+15)\dots(-20) = -5$;
e) $(-12)\dots(+4) = -3$;
f) $(-4)\dots 0 = 0$;
g) $(+1)\dots(+1) = 0$;
h) $(+5)\dots(-6) = +11$;
i) $-8\dots(-2) = +16$.

2.37. Inserisci il numero mancante.

a) $+5 + (\dots\dots) = -5$;
b) $-8 + (\dots\dots) = -6$;
c) $+7 - (\dots\dots) = 0$;
d) $0 - (\dots\dots) = -2$;
e) $+3 \cdot (\dots\dots) = -3$;
f) $-5 \cdot (\dots\dots) = 0$;
g) $(+16) : (\dots\dots) = -2$;
h) $(-6) : (\dots\dots) = -1$;
i) $(-10) : (\dots\dots) = +5$.

2.38. Scrivi tutti i numeri:

a) interi relativi che hanno valore assoluto minore di 5;
b) interi relativi il cui prodotto è -12;
c) interi negativi maggiori di -5.

2.39. Inserisci "+" o "−" in modo da ottenere il numero più grande possibile:

$$-3\dots(-3)\dots 3\dots(-6).$$

2.40 (*). Inserisci le parentesi in modo da ottenere il risultato indicato.

a) $-5 \cdot +3 - 1 + 2 = -20$;
b) $-5 + 2 \cdot -1 + 2 = +5$;
c) $-5 + 7 - 3 \cdot 2 = +3$;
d) $-1 \cdot +3 - 5 \cdot -1 - 2 = +12$;
e) $+1 - 1 \cdot 1 - 1 + 3 - 2 \cdot -3 - 2 = +5$.

2.41 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $-5 + 7 + 4 - 9$;
b) $+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$;
c) $+1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$;
d) $+1 - 2 + 2 - 3 + 3 - 4 + 5 - 6 + 6 - 7 + 7 - 8 + 8 - 9 + 9 - 10$;
e) $(-3 + 10) - (2 - 3)$.

2.42 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $(+5 - 2 - 1) + (+2 + 4 + 6)$;
b) $(-5 + 7 - 9) + (+1 - 2 + 3) - (+4 - 6 + 8)$;
c) $+4 - 3 - [+2 - 1 - (8 - 3) - (-5 - 2)] - (2 + 3)$;
d) $-2 + (-5 + 1) + (-7 + 4) - 2 \cdot (-6 + 1)$;
e) $15 - 9 \cdot (-14 + 12) + 8 \cdot (-3 + 6) + 5 \cdot (-3 + 1)$.

2.43 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $(50 - 36 - 25) \cdot (-15 + 5 + 20) - 10 \cdot (-3 - 7)$;
b) $[+3 - (10 - 5 + 25)] \cdot [-16 + 5 - (-2 - 14)] : (9 + 6)$;
c) $20 : (+15 - 5) - 30 : (-10 + 5) + 40 : (15 - 20)$;
d) $18 : (-3) + 6 \cdot [1 - 5 \cdot (-2 + 4) + 3] : (-6)$;
e) $3 \cdot 4 - 3 \cdot [18 : (-2) - 17 + (14 - 26 + 5) \cdot 3 - 12] + [16 - 1 \cdot (-1 - 3 + 5) - 37 + 16]$.

2.44 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni e indica dove puoi applicare le proprietà delle potenze.

a) $100 : 2 + 3^2 - 2^2 \cdot 6$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
b) $2^7 : 2^3 - 2^2$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
c) $30 - 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2^2 - 2$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
d) $(3^2 + 4^2) - (-3 - 4)^2$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....

2.45 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni e indica dove puoi applicare le proprietà delle potenze.

a) $5 \cdot 5^3 \cdot 5^4 : (5^2)^3 + 5$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
b) $32^5 : 16^4 + (-2)^9$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
c) $(3^4 \cdot 3^3 : 3^6)^2 + (7^2 - 5^2) : 2^2$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....
d) $(3 \cdot 2^2 - 10)^4 \cdot (3^3 + 2^3) : 7 - 10 \cdot 2^3$ Hai applicato le proprietà delle potenze? ....

2.46 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $-5\cdot(12-3+4)-2\cdot[3-16:(-2+4)]^2$;
b) $[-3+(-5)\cdot(-1)]^3+[-4-(1-2)]^2$;
c) $\left[2\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)\cdot(-2)\right]^2:\left[2^4-3\cdot(+6)\right]^2$;
d) $\left[3\cdot(-1)^2-3\cdot(-3)\cdot(-3)\right]^3:\left[2^2+5\cdot(-2)^2\right]^3$.

2.47 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $(-3)^2\cdot(4-1)^5:\left[(-4)^3:\left(2^5\right)-3^3:(-3)^3\right]$;
b) $\left[-(-2)\cdot2+(-10)^2:(-5)^2\right]\cdot\left[3-5+2\cdot(-3)^2-5\right]$;
c) $13-3-4\cdot(-2)^2-5^3:5^2+3\cdot\left(2^3-3^2\right)-6:(-3)-(4-7+3)^4$;
d) $-1-3\cdot(-3)^2-4^3:4^2+(-3-3)\cdot\left(2^2+3^2\right)-(-12):(-3)$.

2.48 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left[10-6\cdot(-2)^2\right]:(-7)+\left(3^2:3\right)\cdot2^3-15:(-3)+\left[(-3)^3:(-3)^0\right]$;
b) $|-5+8|-|-11|+(-|+4|\cdot|-2\cdot(+5)|)^2$;
c) $(-29+37)^5\cdot(-5+|23-28|)^7$;
d) $-2\cdot(-2\cdot|-2|)^2-(|3-5|\cdot(3-5))^2\cdot(-2)$;
e) $(-1)^3\cdot(-1\cdot|-1|)^2-(|-3-2|\cdot(-5+3))^2\cdot(-2+1)^3$.

2.49. Traduci in una espressione matematica le seguenti frasi e motivane la verità o falsità:

a) il cubo del quadrato di un numero diverso da zero è sempre positivo;
b) il quadrato della somma di un numero con il suo opposto è sempre positivo;
c) la differenza tra il triplo di 5 e l'unità è uguale all'opposto di 5;
d) il prodotto tra il quadrato di un numero negativo e l'opposto dello stesso numero è uguale all'opposto del suo cubo.

2.50. Sottrarre dal cubo di -3 la somma dei quadrati di $+2$ e -2. Il risultato è?

2.51. Sottrarre dalla somma di -15 e $+27$ il prodotto di -3 e $+7$.

2.52. Aggiungere al prodotto di -5 e $+3$ la somma di $+5$ e -10.

2.53. Sottrarre dal prodotto di $+7$ e $+4$ la somma di $+1$ e -8.

2.54. Moltiplica la somma tra -3 e $+3$ con la differenza tra $+3$ e -3.

2.55. Partendo dal pian terreno scendo di 15 gradini, salgo 12 gradini, scendo di 7 gradini e risalgo di 8. A che punto mi trovo rispetto al pian terreno?

2.56 (*). Giocando a carte contro due avversari nella prima partita ho vinto 50 gettoni con il primo giocatore e perso 60 gettoni con il secondo giocatore, nella seconda partita ho perso 30 gettoni con il primo e vinto 10 gettoni con il secondo. Quanti gettoni ho vinto o perso complessivamente?

Se il primo giocatore deve dare 30 gettoni al secondo, chiedo al primo di dare al secondo anche i gettoni che doveva a me. Quanto darà il primo al secondo giocatore? Quanto dovrò dare io al secondo giocatore per chiudere tutti i conti della partita?

2.57 (*). Un polpo congelato è stato appena tolto dal congelatore, la sua temperatura è -12°C; viene immerso nell'acqua bollente e la sua temperatura media è aumentata di 6°C. A quale temperatura media si trova ora il polpo?

2.58. Una lumaca sale su un muro alto 10 metri, di giorno sale di due metri ma di notte scende di un metro. In quanti giorni la lumaca arriva in cima al muro?

2.59 (*). Un termometro segna all'inizio $-5°C$, poi scende di $3°C$, quindi sale di $2°C$, infine discende di $6°C$. Quale temperatura segna alla fine?

2.60 (*). Il prodotto di due numeri interi relativi è $+80$, aumentando di 1 il primo numero il prodotto è $+72$. Quali sono i due numeri?

2.61. Il prodotto di due numeri interi relativi è $+6$, la loro somma è -5. Quali sono i due numeri?

2.62. Determina due numeri relativi aventi come prodotto $+12$ e come somma -7.

2.63. Determina due numeri relativi aventi come prodotto $+12$ e come somma -7.

2.64. Determina due numeri relativi aventi come prodotto $+2$ e come somma $+1$.

2.65. Determina due numeri relativi aventi come prodotto $+10$ e come somma -3.

2.66. Determina due numeri relativi aventi come prodotto $+14$ e come somma -9.

2.67. Determina due numeri relativi aventi come prodotto -15 e come somma -8.

2.68. Determina due numeri relativi aventi come prodotto -7 e come somma $+6$.

2.5.3 Risposte

2.40. a) $-5 \cdot (+3-1+2)$, b) $(-5+2) \cdot (-1)+2$, c) $-5+(7-3) \cdot 2$.

2.41. a) -3, b) $+1$, c) -3, d) -8, e) $+8$.

2.42. a) $+14$, b) -11, c) -7, d) $+1$, e) $+47$.

2.43. a) -10, b) -9, c) 0, d) 0, e) $+183$.

2.44. a) $+35$, b) $+12$, c) -15, d) -24.

2.45. a) $+30$, b) 0, c) $+15$, d) 0.

2.46. a) -115, b) $+17$, c) $+225$, d) -1.

2.47. a) -3^7, b) $+88$, c) -12, d) -114.

2.48. a) $+4$, b) $+1\,592$, c) 0, d) 0.

2.56. Ho perso 30 gettoni, il primo deve dare 50 al secondo e io devo dare 30 al secondo.

2.59. $-6°$.

2.60. -10; -8.

3 Frazioni e numeri razionali

3.1 Premessa storica

Quando si deve dividere una certa grandezza o totalità in un certo numero di parti uguali non sempre sono sufficienti i numeri interi per rappresentare il risultato della divisione. Per esempio, per dividere l'unità in due parti uguali i numeri interi non sono sufficienti.

Gli antichi hanno affrontato questo tipo di problema utilizzando varie scritture per rappresentare le parti in cui dividere l'unità, ossia le frazioni.

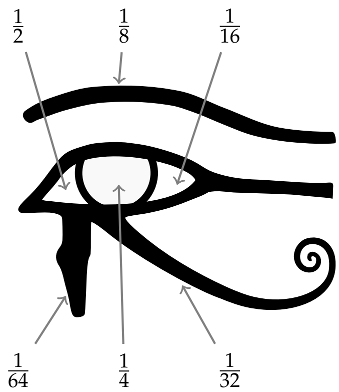
I Babilonesi scrivevano frazioni aventi come denominatore una potenza di 60, la base della loro numerazione; tuttavia non usavano una notazione specifica per le frazioni ed il valore corretto andava interpretato dal contesto.

Gli Egizi facevano largo uso dei numeri frazionari che rappresentavano come somme di frazioni unitarie, ossia frazioni con numeratore uno. La frazione unitaria $\frac{1}{n}$ veniva rappresentata in forma geroglifica ponendo il denominatore n scritto con la normale rappresentazione del numero n sotto ad un ovale. La frazione $\frac{1}{12}$, per esempio, veniva così rappresentata:

Nel "papiro di Ahmes" (detto anche "papiro di Rhind"[1]) troviamo una tabella che dà la scomposizione in frazioni unitarie delle frazioni del tipo $\frac{2}{n}$, con n dispari: la frazione $\frac{2}{43}$ è rappresentata come somma di frazioni unitarie nel seguente modo:

$$\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}.$$

Alcune unità frazionarie più comuni venivano indicate con le parti dell'occhio di Horus (divinità egizia). Secondo la leggenda, Horus, nella lotta contro lo zio Seth, reo di avergli ucciso il padre, perse un occhio le cui parti vennero ritrovate e ricomposte dal dio Toth a meno di una piccola parte.



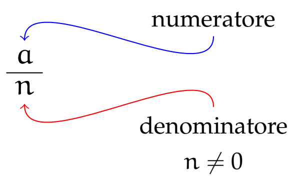
I Romani fecero poco uso dei numeri frazionari; si limitarono a considerare le parti delle misure in uso che venivano divise in 12, 24, 36, 48, ... Avevano pertanto simboli e nomi particolari per indicare alcune frazioni. *Semis* per indicare $\frac{1}{2}$, il cui simbolo era S oppure Z; *sextans* per indicare $\frac{1}{6}$, *dracma* per indicare $\frac{1}{96}$ e *obolus* per indicare la sesta parte della *dracma*.

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Papiro_di_Rhind

Furono gli arabi a introdurre l'attuale scrittura delle frazioni e i termini *numeratore* e *denominatore*. Tale notazione venne diffusa in Europa da Leonardo Pisano (Fibonacci)[2] che con il suo "Liber Abaci" (1202) scrive e opera con le frazioni come oggi le conosciamo.

3.2 Frazioni

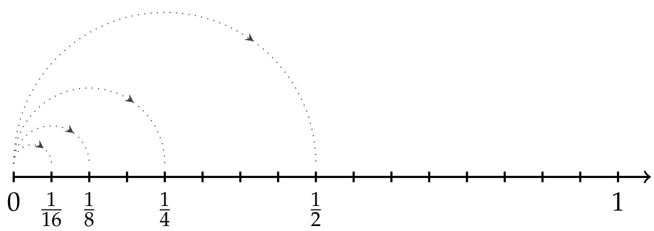
Definizione 3.1. Una *frazione* è una coppia ordinata di numeri naturali in cui il primo si chiama *numeratore* e il secondo *denominatore*. Il denominatore deve essere diverso da zero.



Quando si chiede, per esempio un quarto di litro di latte, $\frac{1}{4}$l, si danno le informazioni su come operare sulla grandezza unitaria (litro) per ottenere la quantità desiderata. Le frazioni possono essere viste come operatori che si applicano a una grandezza fissata, considerata come l'intero o il tutto, per ottenere una nuova grandezza ben determinata e omogenea alla prima.

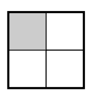
Una frazione con numeratore uguale a 1 è detta *frazione unitaria*; indicata con A una grandezza (segmento, peso, superficie, angolo, ...) la scrittura $\dfrac{1}{n}A$ sta ad indicare l'operazione di divisione della grandezza A, intesa come il "tutto" (l'intero), in n parti uguali.

Nella figura seguente, il segmento unitario da 0 a 1 è stato diviso in due parti uguali ottenendo la frazione $\frac{1}{2}$; dividendolo in quattro parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{4}$; dividendolo in otto parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{8}$; dividendolo in sedici parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{16}$.



❑ **Osservazione** Il *denominatore* di una frazione è quel numero che indica in quante parti uguali si è diviso l'intero. Poiché non ha senso dividere un intero in zero parti, il denominatore deve essere diverso da zero.

Vediamo un altro esempio. Il quadrato Q della figura è stato diviso in quattro parti uguali e una parte è stata colorata di grigio; questa parte viene indicata con la frazione unitaria $\dfrac{1}{4}Q$.



[2]matematico italiano (1170 - 1240).

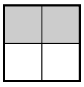
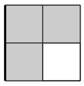
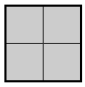
L'espressione $\frac{1}{n}A$ significa l'ennesima parte di A, dove A è il tutto che si deve dividere in n parti uguali. In altre parole, A si può ottenere moltiplicando per n l'espressione $\frac{1}{n}A$.

Partendo da $\frac{1}{n}A$ si possono considerare i suoi multipli interi:

$$\frac{2}{n}A,\ \frac{3}{n}A,\ \ldots,\ \frac{n}{n}A$$

che rappresentano il doppio di un n-esimo di A, il triplo di un n-esimo di A, ..., l'intera grandezza A.

Riferendoci all'esempio del quadrato ($n = 4$):

 $\frac{2}{4}Q$  $\frac{3}{4}Q$  $\frac{4}{4}Q$

La frazione $\frac{m}{n}A$ (si legge *emme ennesimi di* A) indica il multiplo secondo m della frazione unitaria $\frac{1}{n}A$, cioè la grandezza che si ottiene dividendo A in n parti uguali e prendendone m.

❑ **Osservazione** Il *numeratore* di una frazione è quel numero che esprime quante parti, dell'intero suddiviso in parti uguali secondo il denominatore, devono essere considerate.

Per leggere una frazione si legge prima il numeratore e poi il denominatore. Quest'ultimo si legge come numero ordinale (terzo/i, quarto/i, quinto/i, ...). Nel caso in cui sia 2 si legge "mezzo/i".

Esempio 3.1. Lettura di frazioni.

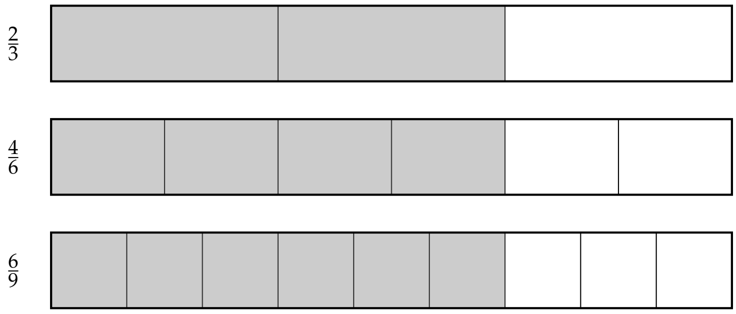
a) $\frac{1}{2}$ è un mezzo;
b) $\frac{1}{10}$ è un decimo;
c) $\frac{2}{3}$ è due terzi;
d) $\frac{3}{11}$ è tre undicesimi;
e) $\frac{5}{7}$ è cinque settimi;
f) $\frac{1}{12}$ è un dodicesimo.

Per esprimere le frazioni si utilizza anche la scrittura del tipo a/b; es. 2/3, 4/6, 6/9, ...

✍ *Esercizi proposti:* 3.1, 3.2, 3.3, 3.4

Definizione 3.2. Si chiamano *proprie* le frazioni che hanno il numeratore minore del denominatore. Esse rappresentano sempre una grandezza minore dell'intero.

Vi sono frazioni che pur essendo formate da numeratori e denominatori diversi rappresentano la stessa parte dell'intero.



Definizione 3.3. Si dicono *equivalenti* due frazioni che rappresentano la stessa parte dell'intero.

Proprietà 3.1 (Invariantiva delle frazioni)**.** *Se si moltiplica, o si divide, numeratore e denominatore di una stessa frazione per uno stesso numero diverso da zero si ottiene una frazione equivalente alla frazione data.*

Per trovare una frazione equivalente a una frazione assegnata è sufficiente moltiplicare per uno stesso numero il numeratore e il denominatore della frazione assegnata.

Esempio 3.2. Trova due frazioni equivalenti a $\frac{4}{7}$.

Moltiplicando numeratore e denominatore per 2 si ha la frazione equivalente:

$$\frac{4 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{8}{14}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per 3 si ha la frazione equivalente:

$$\frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{12}{21}.$$

Definizione 3.4. Una frazione si dice *ridotta ai minimi termini* se il numeratore e il denominatore sono due interi primi tra loro.

Per ridurre ai minimi termini una frazione occorre dividere numeratore e denominatore per il loro Massimo Comune Divisore.

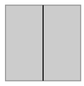
Per esempio per ridurre ai minimi termini la frazione $\frac{8}{12}$, scompongo in fattori 8 e 12, ottengo $8 = 2^3$ e $12 = 3 \cdot 2^2$. Calcolo il MCD prendendo i fattori comuni con l'esponente più piccolo; in questo caso 2^2 cioè 4. Divido numeratore e denominatore per 4:

$$\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}.$$

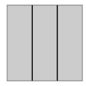
Tutte le frazioni che hanno il denominatore (numero di parti uguali in cui va divisa l'unità) uguale al numeratore (numero delle parti che vanno considerate) rappresentano l'intero:

$$\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{10}{10} = 1.$$

Per esempio se divido un quadrato in due parti uguali e ne prendo due parti ottengo l'intero; se divido un quadrato in tre parti uguali e ne prendo tre parti ottengo l'intero ...



$\frac{2}{2} = 1$



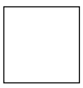
$\frac{3}{3} = 1$

Cosa significa costruire la grandezza $\frac{6}{2}$ del quadrato Q? Tutte le frazioni che hanno il numeratore che è multiplo del denominatore rappresentano un multiplo dell'intero:

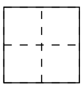
$$\frac{6}{2} = 3, \qquad \frac{15}{3} = 5, \qquad \frac{72}{6} = 12.$$

Definizione 3.5. Si chiamano *apparenti* le frazioni che hanno il numeratore multiplo del denominatore; esse rappresentano una grandezza multipla di quella presa come intero unitario.

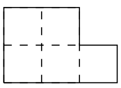
Le frazioni che hanno il numeratore maggiore del denominatore rappresentano grandezze più grandi dell'intero. Infatti le parti da considerare (indicate dal numeratore) sono di più delle parti in cui è divisa l'unità (indicate dal denominatore).



I $\frac{5}{4}$ di Q si ottengono dividendo il quadrato Q in 4 parti uguali ...



... e dovendone prenderne 5, l'unità (Q) non è sufficiente.



La grandezza ottenuta è formata da $\frac{4}{4}$ con l'aggiunta di $\frac{1}{4}$. Cioè

$$\frac{5}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}.$$

Definizione 3.6. Si chiamano *improprie* le frazioni che hanno il numeratore maggiore del denominatore; esse rappresentano una grandezza maggiore della grandezza assegnata come intero.

✍ *Esercizi proposti:* 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21

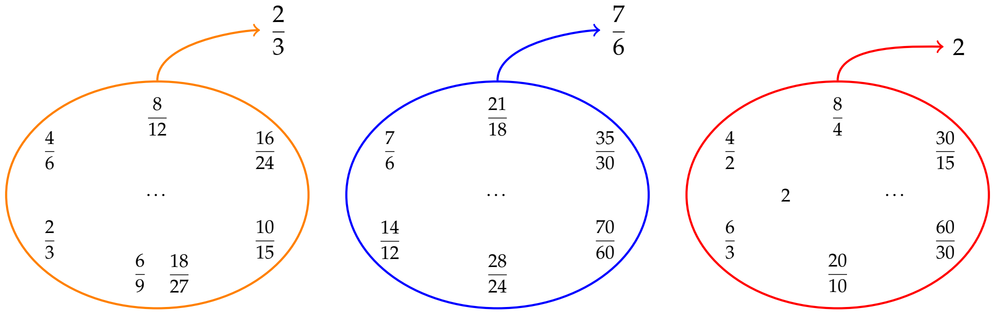


Figura 3.1: Esempi di frazioni equivalenti.

3.3 Dalle frazioni ai numeri razionali

Abbiamo visto che ci sono delle frazioni che, pur essendo diverse tra di loro, rappresentano la stessa parte dell'intero: queste frazioni vengono chiamate *frazioni equivalenti*. Possiamo formare dei raggruppamenti di frazioni tra loro equivalenti, come nella figura 3.1.

Definizione 3.7. Ogni raggruppamento di frazioni equivalenti è definito come un *numero razionale assoluto* ed è rappresentato da una qualunque frazione del raggruppamento; solitamente si sceglie la frazione ridotta ai minimi termini.

Nel nostro esempio $\frac{2}{3}$ è il numero razionale rappresentante del raggruppamento

$$\frac{2}{3} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{10}{15}, \frac{14}{21}, \dots\right\}.$$

In questo modo abbiamo dato al simbolo $\frac{a}{b}$ un nuovo significato, quello di numero e come tale la scrittura $\frac{a}{b}$ rappresenta il quoziente indicato tra i due numeri naturali a e b. Scriveremo quindi: $\frac{2}{3} = 2/3 = 2 : 3$.

Definizione 3.8. Un numero razionale assoluto preceduto dal segno è detto *numero razionale*. L'insieme dei numeri razionali si indica con il simbolo $\mathbb{Q}$.

Il segno del numero razionale relativo è quello che si ottiene dalla regola della divisione dei segni tra numeratore e denominatore.

Esempio 3.3. Segno di numeri razionali.

$$\frac{-2}{-3} = +\frac{2}{3}; \qquad \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}; \qquad \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Le frazioni proprie, che hanno numeratore minore del denominatore, rappresentano sempre un numero compreso tra 0 e 1.

Le frazioni improprie, che hanno numeratore maggiore del denominatore, si possono scrivere come somma di un numero naturale e di una frazione propria:

- il numero naturale è il risultato della divisione intera tra numeratore e denominatore;
- il numeratore della frazione propria è il resto della divisione tra numeratore e denominatore;
- il denominatore della frazione propria è il denominatore stesso della frazione.

Le frazioni apparenti, del tipo $\frac{2}{2}, \frac{6}{3}, \frac{20}{5}, \frac{12}{4}, \frac{12}{3}, \ldots$ corrispondono a un numero intero, rispettivamente a $1, 2, 4, 3, 4, \ldots$

Esempio 3.4. $\frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$.

- $11 \operatorname{div} 3 = 3$ il numero naturale;
- $11 \mod 3 = 2$ il numeratore della frazione propria;
- 3 il denominatore della frazione propria.

Esempio 3.5. $\frac{19}{7} = 2 + \frac{5}{7}$.

- $19 \operatorname{div} 7 = 2$ il numero naturale;
- $19 \mod 7 = \ 2$ il numeratore della frazione propria;
- 7 il denominatore della frazione propria.

✍ *Esercizio proposto:* 3.22

3.4 La scrittura dei numeri razionali

I numeri razionali, rappresentati finora come frazioni, possono essere scritti come numeri decimali: basta fare la divisione tra numeratore e denominatore, il quoziente ottenuto è la rappresentazione della frazione sotto forma decimale.

$$
\begin{array}{llll|l}
1 & & & & 3 \\ \cline{5-5}
1\,0 & & & & 0,3\,3\,3\,3\ldots \\
 & 1\,0 & & & \\
 & & 1\,0 & & \\
 & & & 1\,0 & \\
 & & & \vdots &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{llll|l}
1\,1 & & & & 8 \\ \cline{5-5}
3 & & & & 1,3\,7\,5 \\
3\,0 & & & & \\
 & 6\,0 & & & \\
 & & 4\,0 & & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$$
\frac{1}{3} = 0{,}333\,3\ldots \qquad\qquad \frac{11}{8} = 1{,}375
$$

I numeri decimali che si ottengono sono di due tipi: numeri decimali *finiti* come 1,375 e numeri decimali *periodici* come $0{,}333\,3\ldots$; quest'ultimo si scrive mettendo una barra sulla parte periodica: $0{,}\overline{3}$ oppure racchiudendo la parte periodica tra parentesi tonde $0{,}(3)$.

I numeri decimali finiti si ottengono dalle frazioni il cui denominatore ha come fattori solo il 2, solo il 5 o entrambi, eventualmente elevati a una potenza.

I numeri decimali periodici *semplici* si ottengono dalle frazioni il cui denominatore non ha per fattori né 2 né 5.

I numeri decimali periodici *misti* si ottengono dalle frazioni il cui denominatore contiene altri fattori oltre al 2 e al 5.

Esempio 3.6. Alcuni numeri decimali finiti.

a) $\dfrac{11}{8} = \dfrac{11}{2^3} = \dfrac{11 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \dfrac{1\,375}{1\,000} = 1\,375;$

b) $\dfrac{7}{25} = \dfrac{7}{5^2} = \dfrac{7 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 2^2} = \dfrac{28}{100} = 0{,}28\,;$

c) $\dfrac{13}{40} = \dfrac{13}{2^3 \cdot 5} = \dfrac{13 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \dfrac{325}{1\,000} = 0{,}325;$

d) $\dfrac{50}{7} = \dfrac{\dots}{10}$ non è possibile: non è un decimale finito.

✍ *Esercizio proposto:* 3.23

Procedura 3.2. *Trasformare una frazione in numero decimale:*

a) eseguire la divisione tra numeratore e denominatore;
b) se la divisione ha un resto mettere la virgola al quoziente e moltiplicare per 10 *il resto;*
c) continuare la divisione finché il resto è 0 *oppure è uguale ad un valore già trovato prima;*
d) se la divisione si conclude con resto 0 *si ha un numero decimale finito;*
e) se la divisione si conclude perché si è ritrovato un resto ottenuto in precedenza si ha un numero decimale periodico.

Esempio 3.7. Trasformazione di frazioni in numeri decimali.

a)

$$\begin{array}{r|l} 113 & 20 \\ \cline{2-2} -100 & 5,65 \\ \cline{1-1} 130 & \\ -120 & \\ \cline{1-1} 100 & \\ -100 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} 17 & 6 \\ \cline{2-2} -12 & 2,83 \\ \cline{1-1} 50 & \\ -48 & \\ \cline{1-1} 20 & \\ -18 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r|l} 15 & 7 \\ \cline{2-2} -14 & 2,142857 \\ \cline{1-1} 10 & \\ -7 & \\ \cline{1-1} 30 & \\ -28 & \\ \cline{1-1} 20 & \\ -14 & \\ \cline{1-1} 60 & \\ -56 & \\ \cline{1-1} 40 & \\ -35 & \\ \cline{1-1} 50 & \\ -49 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

a) $\frac{113}{20} = 5{,}65$ numero decimale finito;

b) $\frac{17}{6} = 2{,}8\overline{3}$ numero decimale periodico misto di periodo 3;

c) $\frac{15}{7} = 2{,}\overline{142\,857}$ numero decimale periodico di periodo 142 857.

✍ *Esercizio proposto:* 3.24, 3.25, 3.26

Viceversa un numero decimale finito o periodico può essere sempre scritto sotto forma di frazione.

Procedura 3.3. *Trasformare un numero decimale finito in una frazione:*

a) *contare le cifre significative dopo la virgola;*
b) *moltiplicare numeratore e denominatore per la potenza del* 10 *che ha esponente uguale al numero delle cifre significative dopo la virgola.*

Per facilitare questa operazione possiamo considerare i numeri decimali finiti come frazioni particolari che hanno il numeratore uguale al numero decimale e il denominatore uguale a 1.

Ad esempio, il numero 1,360 ha due cifre significative dopo la virgola, quindi:

$$\frac{1{,}36}{1} = \frac{1{,}36 \cdot 10^2}{1 \cdot 10^2} = \frac{136}{100} = \frac{34}{25}$$

ed il numero 0,000 430 00 ha cinque cifre significative dopo la virgola, quindi:

$$\frac{0{,}000\,43}{1} = \frac{0{,}000\,43 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^5} = \frac{43}{100\,000}.$$

Un numero decimale periodico, generalmente, presenta tre elementi:

la parte intera composta dalle cifre poste prima della virgola;

il periodo che è composto da una o più cifre che si ripetono all'infinito dopo la virgola;

l'antiperiodo la parte, talvolta assente, composta da una o più cifre poste tra la virgola e il periodo.

Per esempio, nel numero 253,485 795 795 795 795 ... la parte intera è 253, il periodo è 579 e l'antiperiodo è 48. Dato che il numero è infinito non può essere scritto con tutte le sue cifre, si usano due modi per scriverlo in forma compatta, mettendo una lineetta sopra le cifre del periodo o racchiudendo le cifre del periodo tra parentesi tonde. Quindi può essere rappresentato come $253{,}48\overline{5\,79}$, oppure $253{,}48(5\,79)$.

I numeri decimali periodici si dividono in:

semplici se subito dopo la virgola è presente il periodo (non hanno antiperiodo);

misti se dopo la virgola è presente l'antiperiodo.

Anche i numeri periodici possono essere trasformati in una frazione, che si dice *frazione generatrice* del numero.

Procedura 3.4. *Determinare la frazione generatrice di un numero periodico:*

a) scrivere il numero senza la virgola;
b) il numeratore della frazione si ottiene sottraendo dal numero senza la virgola il numero costituito dalle cifre che precedono il periodo;
c) il denominatore della frazione si ottiene scrivendo tanti 9 *quante sono le cifre del periodo e tanti* 0 *quante sono le eventuali cifre dell'antiperiodo.*

Esempio 3.8. Trasformare il numero periodico $2{,}5\overline{12}$ nella frazione equivalente.

a) $2{,}5\overline{12} \to\ 2\,512$ scrivo il numero senza la virgola;
b) $2\,512 - 25 = 2\,487$ determino il numeratore della frazione;
c) 990 determino il denominatore della frazione. In definitiva:

$$2{,}5\overline{12} = \frac{2512 - 25}{990} = \frac{2\,487}{990}$$

Ma perché questa regola? Una possibile spiegazione Consideriamo il numero periodico semplice $2{,}\overline{3}$. Poiché $2{,}\overline{3} \cdot 10 = 23{,}\overline{3}$ si ha che $2{,}\overline{3} \cdot 9 = 23{,}\overline{3} - 2{,}\overline{3} = 21$. Quindi, consideriamo la frazione $\frac{2{,}\overline{3}}{1}$ e moltiplichiamo numeratore e denominatore per 9, così da far sparire la parte periodica al numeratore. Si ha quindi

$$2{,}\overline{3} = \frac{2{,}\overline{3} \cdot 9}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}.$$

Possiamo usare lo stesso procedimento per il numero periodico misto $2{,}5\overline{12}$. Poiché $2{,}5\overline{12} \cdot 1\,000 = 2\,512{,}\overline{12}$ si ha che $2{,}5\overline{12} \cdot 990 = 2\,512{,}\overline{12} - 25{,}\overline{12} = 2\,487$. Quindi, consideriamo la frazione $\frac{2{,}5\overline{12}}{1}$ e moltiplichiamo numeratore e denominatore per 990, così da far sparire la parte periodica al numeratore. Si ha quindi

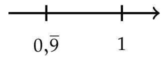
$$2{,}5\overline{12} = \frac{2{,}5\overline{12} \cdot 990}{990} = \frac{2\,487}{990}.$$

3.4.1 Numeri periodici particolari

Numeri periodici particolari sono quelli che hanno come periodo il numero 9, come $2{,}\overline{9}$, $1{,}1\overline{9}$, $21{,}22\overline{9}$, ecc. Se, per esempio, applichiamo la regola per il calcolo della frazione generatrice al numero periodico otteniamo un risultato inatteso

$$2{,}\overline{9} = \frac{29 - 2}{9} = \frac{27}{9} = 3.$$

Quindi $2{,}\overline{9}$ coincide con il numero intero 3. Per lo stesso motivo $1{,}1\overline{9} = 1{,}2$ e $21{,}22\overline{9} = 21{,}23$.



Questo fatto si può anche dimostrare in modo grafico, rappresentando, ad esempio, il numero $0,\overline{9}$ e il numero 1 sulla retta reale.[3] Se i due numeri fossero diversi sarebbero rappresentati da due punti distinti come in figura. Dato che la retta reale non può avere "buchi", tra due punti distinti ce ne deve essere almeno un altro corrispondente ad un numero compreso tra i primi due. Ma qual è questo numero? Qualunque numero decimale minore di 1 è sicuramente superato dal numero $0,\overline{9}$, ad esempio 0,999 999 999 8 è sicuramente più piccolo di $0,\overline{9}$. Quindi non può esistere nessun numero tra $0,\overline{9}$ e 1, di conseguenza i due numeri coincidono.

✍ *Esercizi proposti:* 3.27, 3.28, 3.29, 3.30, 3.31, 3.32

3.5 I numeri razionali e la retta

Anche i numeri razionali si possono rappresentare su una retta orientata. Per fare questo occorre scegliere un punto O sulla retta e associare ad esso il numero 0. Fissiamo poi un segmento unitario e scegliamo un verso di percorrenza.

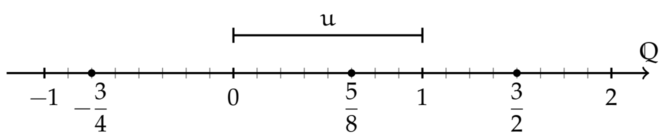
Un numero razionale positivo, rappresentato dalla frazione $\frac{a}{n}$, corrisponde a un punto della retta determinato nel seguente modo.

Dividiamo il segmento unitario u in tante parti uguali quante sono quelle indicate dal denominatore n della frazione, ottenendo così la frazione unitaria $\frac{1}{n}$. A partire dal punto di origine O, procedendo verso destra, si contano a frazioni unitarie. L'ultimo punto rappresenta il numero razionale $\frac{a}{n}$.

Per le frazioni improprie la singola unità u non è sufficiente, occorre prendere quella successiva e dividere anche questa in n parti. Il procedimento si ripete fino a che si considerano tutte le frazioni unitarie indicate da a. Anche in questo caso, il punto individuato dall'ultima frazione unitaria rappresenta il numero razionale $\frac{a}{n}$.

0In alternativa si può scomporre la frazione impropria nella somma di un numero intero e di una frazione propria, quindi si rappresenta la frazione impropria a partire dal suo numero intero invece che partire da 0. Per esempio, per rappresentare la frazione $\frac{3}{2}$ trasformiamo la frazione in $1 + \frac{1}{2}$, quindi per indicare $\frac{3}{2}$ possiamo rappresentare $\frac{1}{2}$ partendo da 1.

Se il numero razionale è negativo, ci muoviamo nel senso opposto, cioè da destra verso sinistra.



✍ *Esercizi proposti:* 3.33, 3.34, 3.35

3.6 Confronto tra numeri razionali

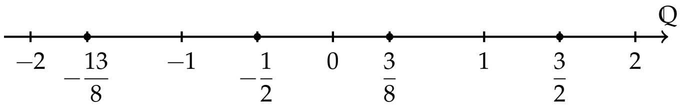
Il numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{a}{n}$ è *minore* del numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{b}{m}$, se nella retta orientata il punto che corrisponde alla frazione $\frac{a}{n}$ precede il punto che corrisponde alla frazione $\frac{b}{m}$ e si scrive $\frac{a}{n} < \frac{b}{m}$.

[3]si veda la sezione 3.9 a pagina 68.

Viceversa il numero razionale $\frac{a}{n}$ è *maggiore* di $\frac{b}{m}$ se nella retta orientata il punto che corrisponde alla frazione $\frac{a}{n}$ segue il punto che corrisponde alla frazione $\frac{b}{m}$ e si scrive $\frac{a}{n} > \frac{b}{m}$.

Infine il numero razionale $\frac{a}{n}$ è *equivalente* a $\frac{b}{m}$ se nella retta orientata i punti che corrispondono alle frazioni $\frac{a}{n}$ e $\frac{b}{m}$ coincidono e si scrive $\frac{a}{n} = \frac{b}{m}$.

Esempio 3.9. Confronto tra numeri razionali.



$$-\frac{13}{8} < -\frac{1}{2}, \qquad \frac{3}{8} > -\frac{1}{2}, \qquad \frac{3}{8} < \frac{3}{2}, \qquad -1 > -\frac{13}{8}.$$

Per alcune frazioni è facile vedere se una frazione è minore o maggiore di un'altra. Ma non sempre è così semplice.

Consideriamo per esempio le frazioni $\frac{7}{9}$ e $\frac{6}{7}$. Quale frazione precede e quale segue? Il confronto non è immediato perché con la prima frazione si conta per unità frazionarie di tipo $\frac{1}{9}$ e con la seconda per unità frazionarie di tipo $\frac{1}{7}$.

In generale, senza ricorrere alla rappresentazione sulla retta, come si possono confrontare i numeri razionali?

Conviene sostituire le frazioni date con altre equivalenti che hanno le stesse unità frazionarie: cioè occorre ridurre le frazioni allo stesso denominatore.

Procedura 3.5. *Confrontare due frazioni:*

a) *si calcola il minimo comune multiplo* (mcm) *dei denominatori delle frazioni;*

b) *si trasforma ciascuna frazione come segue:*
il nuovo denominatore è il mcm *trovato;*
il nuovo numeratore si ottiene dividendo il mcm *per il denominatore della frazione data e moltiplicando il quoziente ottenuto per il numeratore della frazione data.*

c) *si confrontano i nuovi numeratori: la frazione più grande è quella che ha il numeratore più grande.*

Esempio 3.10. Confronta le frazioni $\dfrac{7}{9}$ e $\dfrac{6}{7}$.

$\mathrm{mcm}(7, 9) = 63.$

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{49}{63}, \qquad \frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{54}{63}.$$

$$\frac{54}{63} > \frac{49}{63} \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{7} > \frac{7}{9}.$$

Un altro modo per confrontare due frazioni consiste nel *moltiplicare in croce* numeratori e denominatori delle frazioni, come nei seguenti esempi.

Esempio 3.11. Confronta $\frac{3}{2}$ con $\frac{5}{3}$.

Moltiplichiamo il numeratore della prima frazione per il denominatore della seconda frazione e il denominatore della prima per il denominatore della seconda

$$3 \cdot 3 = 9 \qquad 2 \cdot 5 = 10.$$

Quindi, poiché $9 < 10$ si può scrivere

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{3}.$$

Esercizi proposti: 3.36, 3.37, 3.38, 3.39, 3.40, 3.41, 3.42, 3.43, 3.44

3.7 Le operazioni con i numeri razionali

Con i numeri razionali è sempre possibile eseguire le addizioni, le moltiplicazioni, le sottrazioni e le divisioni. In altre parole, poiché un numero razionale può essere scritto sotto forma di frazione, se si addizionano, si moltiplicano, si sottraggono, si dividono due frazioni il risultato è sempre una frazione.

3.7.1 Addizione

Se due frazioni hanno la stessa unità frazionaria allora è sufficiente sommare i numeratori delle frazioni e prendere come denominatore l'unità frazionaria comune.

$$\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5+2}{3} = \frac{7}{3}.$$

Definizione 3.9. La *somma di due frazioni con lo stesso denominatore* è una frazione che ha per denominatore lo stesso denominatore delle frazioni date e per numeratore la somma dei numeratori.

Se le unità frazionarie sono diverse dobbiamo considerare frazioni equivalenti a quelle date che abbiano la stessa unità frazionaria e poi eseguire l'addizione come indicato nel punto precedente e cioè sommando i numeratori e lasciando lo stesso denominatore comune.

$$\begin{array}{l} \frac{5}{3} = \frac{25}{15} \\[1em] \frac{2}{3} = \frac{6}{15} \end{array} \quad \rightrightarrows \quad \boxed{+} \quad \longrightarrow \quad \frac{31}{15}$$

In generale, la somma di due frazioni $\frac{m}{n} + \frac{p}{q}$ si può scrivere come $\frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q}$.

$$\begin{array}{l} \frac{m}{n} = \frac{m \cdot q}{n \cdot q} \\[1em] \frac{p}{q} = \frac{n \cdot p}{n \cdot q} \end{array} \quad \rightrightarrows \quad \boxed{+} \quad \longrightarrow \quad \frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q}$$

Quando si sommano due frazioni si può scegliere un qualsiasi denominatore comune, tuttavia per semplificare i calcoli conviene scegliere il più piccolo possibile, cioè il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni da sommare.

Procedura 3.6. *Sommare due o più frazioni:*

a) *ridurre le frazioni ai minimi termini;*
b) *calcolare il* mcm *dei denominatori;*
c) *mettere il* mcm *come denominatore della frazione somma;*
d) *per ogni frazione dividere il* mcm *per il suo denominatore e moltiplicare il risultato per il numeratore della frazione mantenendo il segno;*
e) *calcolare la somma algebrica di tutti i numeri trovati;*
f) *mettere la somma ottenuta come numeratore della frazione somma;*
g) *ridurre ai minimi termini la frazione ottenuta.*

Esempio 3.12. Sommare le frazioni $\frac{8}{12} - \frac{5}{6} + \frac{8}{5} - 1$.

a) riduco ai minimi termini le frazioni $\frac{2}{3} - \frac{5}{6} + \frac{8}{5} - \frac{1}{1}$;
b) calcolo $\text{mcm}(3, 6, 5, 1) = 30$;
c) la frazione somma avrà come denominatore il mcm trovato $\frac{\dots}{30}$;
d) per ogni frazione divido il mcm per il suo denominatore e moltiplico il risultato per il numeratore:

$$\begin{aligned}\frac{2 \cdot (30:3) - 5 \cdot (30:6) + 8 \cdot (30:5) - 1 \cdot (30:1)}{30} &= \frac{2 \cdot 10 - 5 \cdot 5 + 8 \cdot 6 - 1 \cdot 30}{30} \\ &= \frac{20 - 25 + 48 - 30}{30};\end{aligned}$$

e) calcolo la somma algebrica dei numeri ottenuti al numeratore $+13$;
f) metto la somma ottenuta al numeratore della frazione somma $+\frac{13}{30}$;
g) vedo se posso ridurre la frazione, in questo caso no, il risultato è $+\frac{13}{30}$.

Esempio 3.13. Sommare i numeri razionali $-0{,}2 - 1{,}\overline{2} + 25\% + \frac{7}{12}$.

Trasformo i numeri razionali in frazioni:

$$-\frac{2}{10} - \frac{12-1}{9} + \frac{25}{100} + \frac{7}{12} = -\frac{1}{5} - \frac{11}{9} + \frac{1}{4} + \frac{7}{12}.$$

Quindi $\text{mcm}(5, 9, 4, 12) = 180$.

$$
\begin{aligned}
\frac{-1\cdot(180:5)-11\cdot(180:9)+1\cdot(180:4)+7\cdot(180:12)}{180} &= \frac{-1\cdot 36-11\cdot 20+1\cdot 45+7\cdot 15}{180}\\
&= \frac{-36-220+45+105}{180}\\
&= -\frac{106}{180}\\
&= -\frac{53}{90}.
\end{aligned}
$$

3.7.2 Sottrazione di frazioni

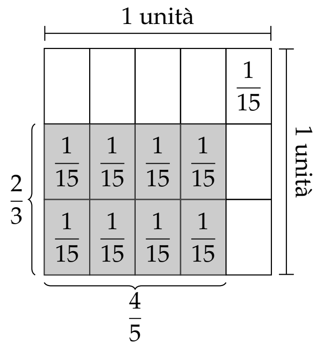
La sottrazione di frazioni si può sempre trasformare in una addizione tra la prima frazione e l'opposto della seconda frazione. Come per i numeri relativi, quando si parla di somma di frazioni si intende sempre somma algebrica di frazioni.

✍ *Esercizi proposti:* 3.45, 3.46, 3.47, 3.48, 3.49, 3.50

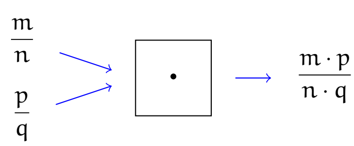
3.7.3 Moltiplicazione

Il prodotto tra frazioni può essere interpretato come l'area di un rettangolo in cui le frazioni fattori sono la base e l'altezza.

Moltiplicare $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$ è come calcolare l'area del rettangolo di base $\frac{4}{5}$ e altezza $\frac{2}{3}$. Ogni rettangolino di base $\frac{1}{5}$ e altezza $\frac{1}{3}$ ha area $\frac{1}{15}$. I rettangolini da prendere in considerazione sono 8. Il risultato è quindi $\frac{8}{15}$. Il denominatore indica in quante parti è stato diviso il quadrato unitario: sono $3\cdot 5=15$ parti. Il numeratore indica quante parti prendiamo, sono le parti $2\cdot 4=8$ in grigio.



Definizione 3.10. Il *prodotto di due frazioni* è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.



✍ *Esercizi proposti:* 3.51, 3.52, 3.53, 3.54, 3.55

Definizione 3.11. Data una frazione $\frac{n}{m}$ si definisce il suo *inverso* o *reciproco* quella $\frac{n_i}{m_i}$ tale che il loro prodotto sia l'elemento neutro 1, cioè

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{n_i}{m_i} = 1$$

Esempio 3.14. Trova l'inverso della frazione $\frac{3}{2}$.

Dobbiamo trovare quindi una frazione $\frac{n_i}{m_i}$ tale che

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{n_i}{m_i} = 1$$

Consideriamo l'unità a destra del simbolo $=$ come la frazione $\frac{1}{1}$ e moltiplichiamo a destra e a sinistra del simbolo $=$ per $\frac{2}{3}$, ottenendo

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot n_i}{3 \cdot 2 \cdot m_i} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 1}$$

ovvero

$$\frac{6 \cdot n_i}{6 \cdot m_i} = \frac{2}{3}$$

riducendo ai minimi termini la frazione a sinistra del simbolo $=$ si ha

$$\frac{n_i}{m_i} = \frac{2}{3}$$

che è appunto il risultato cercato.

❑ **Osservazione** Il reciproco di una frazione $\frac{n}{m}$ si può ottenere semplicemente invertendo il numeratore con il denominatore, cioè $\frac{m}{n}$.

Se infatti moltiplichiamo una frazione per se stessa con il numeratore ed il denominatore scambiati tra loro, si ottiene

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n} = \frac{n \cdot m}{m \cdot n} = 1$$

in quanto il numeratore ed il denominatore sono uguali (lo stesso prodotto).

3.7.4 Operazione inversa e aritmetica dell'orologio

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Ma cosa significa operazione inversa? Un'operazione può essere interpretata come qualsiasi azione che provoca un cambiamento di stato.

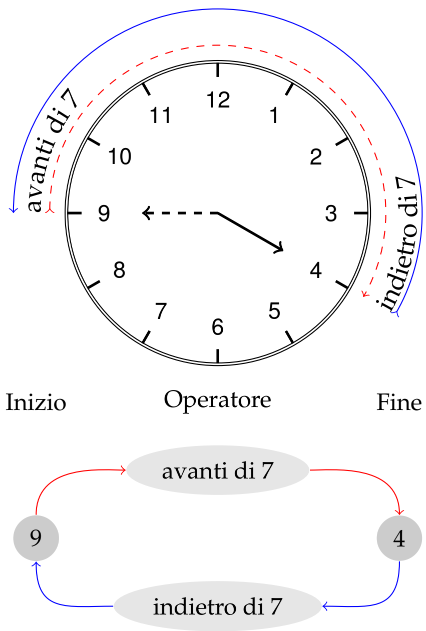
Consideriamo come esempio l'addizione nell'orologio che segna le ore dodici $(12 = 0)$. Addizionare significa spostare le lancette in avanti di un determinato numero di ore. Si riporta la tabella dell'addizione dell'orologio.

Consideriamo l'addizione $9 + 7 = 4$. Il primo elemento 9 può essere interpretato come *stato iniziale*, il simbolo $+$ come *operatore* che indica l'operazione «spostare le lancette avanti di ...» e dall'*argomento* 7; il risultato 4 è lo *stato finale*.

Si indica come *operazione inversa* quella che applicata allo stato finale con argomento uguale a quello dell'operazione diretta, riporta allo stato iniziale.

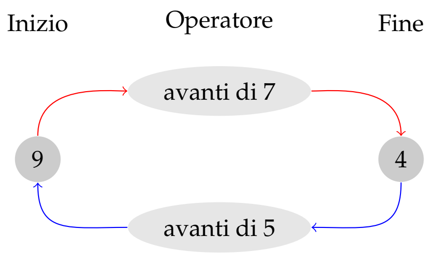
Notiamo che anche nella matematica dell'orologio l'addizione gode della proprietà commutativa e associativa, ha l'elemento neutro, che è 0, e ogni numero ha l'inverso.

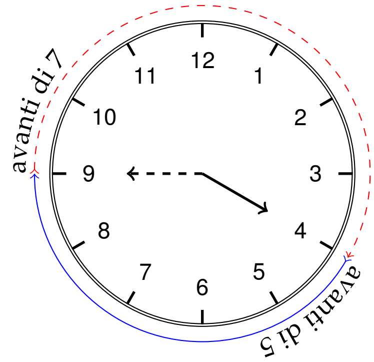
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



- L'inverso di 0 è 0 perché $0 + 0 = 0$;
- l'inverso di 1 è 11 perché $1 + 11 = 0$;
- l'inverso di 2 è 10 perché $2 + 10 = 0$;
- l'inverso di 3 è 9 perché $3 + 9 = 0$;
- l'inverso di 4 è 8 perché $4 + 8 = 0$;
- l'inverso di 5 è 7 perché $5 + 7 = 0$.

L'elemento inverso è molto importante in quanto ci permette di sostituire l'operazione inversa con l'operazione diretta, fornendo come argomento l'elemento inverso di quello dell'operazione diretta iniziale.

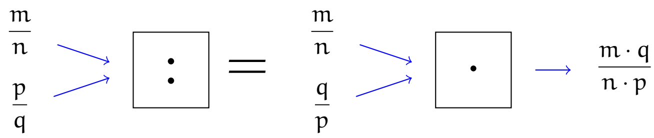




Così per tornare allo stato iniziale invece di operare portando indietro le lancette di 7, otteniamo lo stesso risultato portando avanti le lancette di 5 che è appunto l'inverso di 7.

3.7.5 Divisione

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Dato che nell'insieme dei numeri razionali esiste sempre l'inverso di una frazione rispetto alla moltiplicazione, esclusa la frazione zero, si può sempre eseguire la divisione di due qualsiasi frazioni.



$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}.$$

Definizione 3.12. Il *quoziente di due frazioni* è la frazione che si ottiene moltiplicando la prima frazione per l'inverso della seconda frazione.

Esempio 3.15. Quoziente di due frazioni.

- $\frac{2}{3} : \frac{7}{4}$.

  Il reciproco di $\frac{7}{4}$ è $\frac{4}{7}$. Pertanto $\frac{2}{3} : \frac{7}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$.

- $-\frac{2}{3} : \left(-\frac{3}{4}\right)$.

  Il reciproco di $-\frac{3}{4}$ è $-\frac{4}{3}$. Pertanto $-\frac{2}{3} : \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = +\frac{8}{9}$.

- $\frac{2}{3} : 0$.

  Il reciproco di 0 non esiste, quindi la divisione non è eseguibile.

➡ $0 : \frac{2}{3}$.

Il reciproco di $\frac{2}{3}$ è $\frac{3}{2}$. Pertanto $0 : \frac{2}{3} = 0 \cdot \frac{3}{2} = 0$.

✍ *Esercizi proposti:* 3.56, 3.57, 3.58, 3.59

3.8 Potenza di una frazione

Come per ogni numero, anche per le frazioni, la *potenza di una frazione* non è altro che un prodotto di tante frazioni identiche alla frazione data quanto è il valore dell'esponente, pertanto si trova elevando il numeratore e il denominatore della frazione all'esponente della potenza.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ volte}} = \frac{a^n}{b^n}.}$$

Esempio 3.16. Potenza di frazioni.

➡ $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$;

➡ $-\frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3}$;

➡ $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = +\frac{4}{9}$.

3.8.1 Potenza con esponente uguale a zero

La definizione di potenza si estende anche al caso in cui l'esponente è zero.

Consideriamo l'esempio della divisione di due potenze con la stessa base e con lo stesso esponente:

➡ $a^n : a^n = 1$, la divisione di due numeri uguali è 1;
➡ $a^n : a^n = a^0$, applicando le proprietà delle potenze.

Possiamo allora concludere che per ogni frazione o numero razionale a diverso da zero risulta $a^0 = 1$. Non è invece possibile definire la scrittura 0^0.

3.8.2 Potenza con esponente intero negativo

La definizione di potenza si può estendere anche al caso in cui l'esponente sia uguale a un numero intero negativo:

$$a^{-n} = a^0 : a^n = 1 : a^n = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Si può definire allora per ogni numero razionale diverso da zero

$$\boxed{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.}$$

Definizione 3.13. La *potenza di un numero razionale* diverso da zero elevato a un *esponente intero negativo* è uguale a una potenza che ha per base il reciproco della base rispetto alla moltiplicazione e per esponente l'opposto dell'esponente rispetto all'addizione.

Non è definita invece la potenza con esponente negativo di 0. Il numero 0 infatti non ha il reciproco. Pertanto, 0^{-n} è una scrittura priva di significato.

✍ *Esercizi proposti:* 3.60, 3.61, 3.62, 3.63, 3.64, 3.65

3.9 Introduzione ai numeri reali

Per quanto abbiamo visto nei paragrafi precedenti, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è quello che contiene gli altri presentati precedentemente, ovvero i naturali $\mathbb{N}$ e gli interi relativi $\mathbb{Z}$, cioè $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. In realtà questo insieme, per quanto infinito, non è sufficiente a contenere tutti i numeri che utilizziamo, poiché ve ne sono alcuni (infiniti), detti *irrazionali*, il cui insieme viene indicato con $\mathbb{J}$, che derivano da operazioni come l'estrazione di radice, il cui risultato non trova sempre una corrispondenza in $\mathbb{Q}$.

Consideriamo infatti il numero $\sqrt{2}$ e supponiamo, per ipotesi, che sia un numero razionale. Quindi possiamo scrivere $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ con n e m numeri interi primi tra loro (una frazione può sempre essere ridotta ai minimi termini). Dunque, elevando al quadrato entrambi i termini si ha:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{n^2}{m^2}.$$

Cioè n^2 è il doppio di m^2, ovvero n^2 e m^2 non sono primi tra loro e pertanto non lo sono neanche n e m, in contraddizione con quanto ipotizzato. Perciò $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Come $\sqrt{2}$ esistono altri numeri che non appartengono a $\mathbb{Q}$, ad esempio $\sqrt{3}$, π, ...

L'unione dell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ e quello degli irrazionali $\mathbb{J}$ costituisce l'insieme dei numeri *reali* $\mathbb{R}$, ovvero $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$, che in genere è quello al quale si fa riferimento in matematica e sarà trattato in dettaglio nel volume Algebra 2.

Mettendo quindi in relazione la retta orientata con l'insieme $\mathbb{Q}$, esistono punti di quest'ultima che non provengono da elementi di $\mathbb{Q}$, ovvero esistono dei "buchi". Tali buchi scompaiono considerando al posto di $\mathbb{Q}$ l'insieme $\mathbb{R}$.

3.10 Notazione scientifica e ordine di grandezza

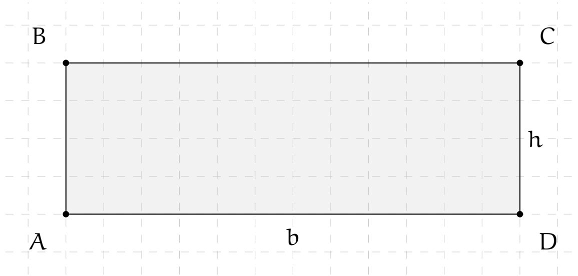
Le discipline scientifiche quali la fisica, la biologia, l'astronomia, ecc., si trovano spesso a doversi confrontare con misurazioni di grandezze espresse da numeri molto grandi o molto piccoli. Per esempio:

- il raggio della Terra è circa 6 400 000 m;
- la velocità della luce nel vuoto è 299 790 000 m/s;
- un globulo rosso ha il diametro di 0,000 007 m.

I primi due numeri sono molto grandi, mentre l'ultimo è molto piccolo e operare con numeri simili, non è affatto semplice.

Per renderci conto di ciò, consideriamo un rettangolo di dimensioni $b = 0{,}000\,000\,06\,\mathrm{m}$ e $h = 0{,}000\,000\,2\,\mathrm{m}$ e calcoliamone l'area:

$$A = b \cdot h = 0{,}000\,000\,06 \cdot 0{,}000\,000\,2 = 0{,}000\,000\,000\,000\,012\,\mathrm{m}^2.$$



Come si può notare, per scrivere il risultato di un'operazione tra due numeri, in questo caso molto piccoli, è necessario fare particolare attenzione in quanto, per l'eccessiva quantità di cifre decimali, è facile commettere degli errori.

Per risolvere questo problema, si preferisce utilizzare una scrittura compatta che permette di scrivere questo tipo di numeri in forma più agevole. Una tale scrittura prende il nome di *notazione scientifica*.

Definizione 3.14. Un numero α è scritto in *notazione scientifica* se si presenta nella forma:

$$\alpha = k \cdot 10^n$$

dove k è un numero decimale maggiore o uguale a 1 e minore di 10 e n è un numero intero.

Esempio 3.17. I numeri $3{,}5 \cdot 10^7$ e $8{,}9 \cdot 10^{-5}$ sono scritti in notazione scientifica, mentre i numeri $0{,}5 \cdot 10^3$ e $10{,}3 \cdot 10^{-8}$ non sono scritti in notazione scientifica in quanto il numero davanti alla potenza di 10 nel primo caso è 0,5 che è minore di 1, nel secondo caso è 10,3 che è maggiore di 10.

3.10.1 Come trasformare un numero in notazione scientifica

Consideriamo la misura del diametro del globulo rosso, ovvero $0{,}000\,007\,\mathrm{m}$. Per esprimere questa misura in notazione scientifica basta considerare la sua frazione generatrice, ovvero:

$$0{,}000\,007\,\mathrm{m} = 7 \cdot \frac{1}{1\,000\,000}\mathrm{m} = 7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}.$$

Allo stesso modo il numero $0{,}000\,000\,026$ viene scritto in notazione scientifica come segue:

$$0{,}000\,000\,026 = 2{,}6 \cdot \frac{1}{100\,000\,000} = 2{,}6 \cdot \frac{1}{10^8} = 2{,}6 \cdot 10^{-8}.$$

Si osservi che in questo secondo caso abbiamo preso in considerazione il valore 2,6 anziché 26, in quanto il numero k deve essere minore di 10.

Consideriamo ora la misura del raggio della Terra, ovvero 6 400 000 m, la sua espressione in notazione scientifica sarà: $6{,}4 \cdot 10^6$.

Allo stesso modo il numero 340 000 000 000 viene scritto in notazione scientifica $3{,}4 \cdot 10^{11}$. Si osservi che in questo secondo caso abbiamo preso in considerazione il valore 3,4 anziché 34, in quanto, come si è già detto, il numero k deve essere minore di 10.

❑ **Osservazione** A numeri "piccoli", corrisponde una potenza di dieci con esponente negativo; a numeri "grandi", corrisponde una potenza di dieci con esponente positivo.

Procedura 3.7. *Scrivere un numero decimale positivo a in notazione scientifica, se $a > 1$:*

a) *si divide il numero decimale per una potenza di 10 in modo da avere un numero decimale compreso maggiore o uguale a 1 e minore di 10. Per trovare la potenza di 10 per la quale dividere il numero bisogna contare le cifre significative del numero prima della eventuale virgola e togliere 1;*

b) *per scrivere il numero a in notazione scientifica occorre moltiplicare il numero trovato al passo precedente per la potenza di 10 utilizzata.*

Esempio 3.18. Trasformare 348 000 000 000 000 in notazione scientifica.

a) Le cifre significative di 348 000 000 000 000 sono 15, si divide quindi il numero per 10^{14} e si ottiene 3,48;

b) $3{,}48 \cdot 10^{14}$.

Procedura 3.8. *Scrivere un numero decimale positivo a in notazione scientifica, se $0 < a < 1$:*

a) *si moltiplica il numero decimale per una opportuna potenza di 10 in modo da ottenere un numero maggiore o uguale a 1 e minore di 10. Per trovare la potenza di 10 bisogna contare gli zeri che si trovano tra la virgola e la prima cifra significativa del numero e aggiungere 1;*

b) *per scrivere il numero a in notazione scientifica occorre moltiplicare il numero ottenuto al passo precedente per la stessa potenza di 10 utilizzata presa però con esponente negativo.*

Esempio 3.19. Trasformare 0,000 034 in notazione scientifica.

a) Gli zero da considerare sono 4, si moltiplica allora il numero per 10^5 e si ottiene $3,4$;

b) quindi, per l'esempio considerato si ha $3{,}4 \cdot 10^{-5}$.

Esempio 3.20. Riprendendo il problema della lamina rettangolare, le sue dimensioni in notazione scientifica vengono scritte come: $b = 6 \cdot 10^{-8}$ m, $h = 2 \cdot 10^{-7}$ m. L'area sarà quindi:

$$\begin{aligned} A = b \cdot h &= 6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m} \cdot 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} \\ &= 12 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}^2 \\ &= 1{,}2 \cdot 10^{1} \cdot 10^{-15}\mathrm{m}^2 \\ &= 1{,}2 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

Com'è possibile vedere, utilizzando le note proprietà delle potenze, si riesce ad eseguire l'operazione in maniera molto agevole.

Esempio 3.21. Trasforma in notazione scientifica e calcola $\dfrac{3\,000 : 6 \text{ milioni}}{5\,000 \cdot 0{,}000\,002}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{3\,000 : 6 \text{ milioni}}{5\,000 \cdot 0{,}000\,002} &= \frac{(3 \cdot 10^3) : (6 \cdot 10^6)}{(5 \cdot 10^3) \cdot (2 \cdot 10^{-6})} \\
&= \frac{3 : 6 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \\
&= \frac{0{,}5}{10} \cdot 10^{-3+3} \\
&= 0{,}05 \cdot 10^0 \\
&= 0{,}05 \\
&= 5 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}
$$

❑ **Osservazione** Un numero intero composto dalla cifra 1 seguita da un numero n di cifre 0 può essere rappresentato più semplicemente come 10^n.

Esempio 3.22. Potenze positive di 10.

a) $10 = 10^1$;
b) $100 = 10^2$;
c) $1\,000 = 10^3$;
d) $10\,000 = 10^4$;
e) $100\,000 = 10^5$;
f) $1\,000\,000 = 10^6$;
g) $10\,000\,000 = 10^7$;
h) $100\,000\,000 = 10^8$;
i) $1\,000\,000\,000 = 10^9$.

❑ **Osservazione** Un numero decimale con parte intera nulla seguita da n cifre decimali tutte 0 tranne l'ultima che vale 1 può essere rappresentato più semplicemente come 10^{-n}.

Esempio 3.23. Potenze negative di 10.

a) $0{,}1 = 10^{-1}$;
b) $0{,}01 = 10^{-2}$;
c) $0{,}001 = 10^{-3}$;
d) $0{,}000\,1 = 10^{-4}$;
e) $0{,}000\,01 = 10^{-5}$;
f) $0{,}000\,001 = 10^{-6}$;
g) $0{,}000\,000\,1 = 10^{-7}$;
h) $0{,}000\,000\,01 = 10^{-8}$;
i) $0{,}000\,000\,001 = 10^{-9}$.

✍ *Esercizi proposti:* 3.66, 3.67, 3.68, 3.69, 3.70, 3.71, 3.72, 3.73

3.10.2 Ordine di grandezza

Spesso, nel trattare i numeri molto grandi o molto piccoli, non è importante conoscere la misura con precisione, ma basta conoscere "quanto il valore è più o meno grande", cioè l'entità della sua grandezza. Per fare ciò si introduce il seguente concetto.

Definizione 3.15. Dato un numero, si definisce *ordine di grandezza* (abbreviato con la sigla o.d.g.), la potenza di 10 più vicina al numero.

Se un numero è equidistante dalle due potenze del 10 tra le quali è compreso, si assume come ordine di grandezza la potenza maggiore.

Esempio 3.24. Determinare l'ordine di grandezza dei numeri 0,000 074 e 47 000 000 000.

Scriviamo dapprima i numeri in notazione scientifica e poi l'o.d.g.

- $0{,}000\,074 = 7{,}4 \cdot 10^{-5}$. L'o.d.g. è 10^{-4} in quanto il numero $7,4$ è maggiore di 5
- $47\,000\,000\,000 = 4{,}7 \cdot 10^{10}$. L'o.d.g. è 10^{10} in quanto il numero $4,7$ è minore di 5.

✍ *Esercizi proposti:* 3.74, 3.75, 3.76

3.11 Problemi con le frazioni

3.11.1 Problemi diretti

Nei problemi diretti si conosce il valore di una grandezza e se ne deve calcolare la parte che corrisponde a una frazione. In questo caso basta moltiplicare la frazione per la grandezza intera.

Esempio 3.25. Una pasticceria produce 568 cornetti alla settimana: i 3/4 sono alla crema, 1/8 sono al cioccolato e 1/8 alla marmellata. Quanti cornetti di ciascun tipo produce?

Per risolvere il problema occorre calcolare la parte che corrisponde a ciascuna frazione:

- cornetti alla crema: $\frac{3}{4} \cdot 568 = 426$;
- cornetti al cioccolato: $\frac{1}{8} \cdot 568 = 71$;
- cornetti alla marmellata (come per quelli al cioccolato): 71.

3.11.2 Problemi inversi

Nei problemi inversi si conosce il valore numerico di una frazione di una certa grandezza e si deve calcolare il valore dell'intera grandezza. In questo caso occorre dividere il valore numerico dato per la frazione, si ottiene così l'intero.

Esempio 3.26. Mario ha speso € 21 che corrispondono ai 3/5 della somma che possedeva. Quanto possedeva?

In questo problema si sa che € 21 corrispondono ai 3/5 della somma da cercare. Per trovare la somma posseduta da Mario è sufficiente dividere 21 per la frazione spesa, cioè € $21 : 3/5 =$ € $21 \cdot 5/3 =$ € 35.

Esempio 3.27. Giuseppe possiede € 150. Se spende i 3/5 della somma posseduta e poi i 2/3 della somma rimanente, quanto gli rimane?

Per risolvere il problema si può procedere in più modi.

Calcoliamo prima i 3/5 di € 150, cioè € $150 \cdot 3/5 =$ € 90. Quindi la prima volta Giuseppe spende € 90, perciò gliene rimangono 60. La seconda volta spende i 2/3 di € 60, cioè € $60 \cdot 2/3 =$ € 40. In tutto ha speso € 90+ € 40 = € 130 e quindi gli rimangono € 150− € 130 = € 20.

Un altro modo per risolvere il problema è tenere conto che, se la prima volta ha speso i $3/5$ della somma che possedeva, significa che gli rimane la frazione $1 - 3/5 = 2/5$. La seconda volta spende i $2/3$ dei $2/5$ rimanenti, cioè $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$. In tutto ha speso la frazione

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{15} = \frac{3 \cdot 3 + 4}{15} = \frac{13}{15}$$

gli rimane perciò la frazione $1 - \frac{13}{15} = \frac{2}{15}$ ovvero € $150 \cdot 2/15 =$ € 20.

✍ *Esercizi proposti:* 3.77, 3.78, 3.79, 3.80

3.12 Le percentuali

Avrai sentito parlare spesso che il prezzo di un oggetto è stato scontato del 10 per cento, oppure che un partito politico ha preso il 25 per cento di voti e altre espressioni simili che coinvolgono le percentuali.

Le percentuali sono un altro modo per scrivere le frazioni.

Definizione 3.16. Le *percentuali* sono frazioni che hanno come denominatore 100 e come numeratore un numero intero o decimale.

La percentuale si indica con un numero intero o decimale seguita dal simbolo %.

$$35\% = \frac{35}{100}; \qquad 7\% = \frac{7}{100}; \qquad 12{,}5\% = \frac{12{,}5}{100} = \frac{125}{1\,000}.$$

Quindi, in generale

$$\boxed{n\% = \frac{n}{100}}$$

Per passare quindi dalla scrittura percentuale alla scrittura decimale basta dividere il numero che esprime la percentuale per 100, cioè effettuare l'operazione di divisione tra il numeratore ed il denominatore:

$$35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35; \qquad 7\% = \frac{7}{100} = 0{,}07; \qquad 12{,}5\% = \frac{12{,}5}{100} = 0{,}125.$$

Per passare dalla scrittura decimale alla scrittura in percentuale, invece, occorre moltiplicare numeratore e denominatore per 100:

$$0{,}02 = \frac{0{,}02}{1} = \frac{2}{100} = 2\%; \qquad 0{,}23 = \frac{0{,}23}{1} = \frac{23}{100} = 23\%; \qquad 1{,}21 = \frac{1{,}21}{1} = \frac{121}{100} = 121\%.$$

Per passare da una frazione alla sua scrittura in percentuale conviene prima scrivere la frazione come numero decimale e poi da questo passare alla percentuale:

$$\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6} = \frac{0{,}\overline{6}}{1} = \frac{66{,}\overline{6}}{100} = 66{,}\overline{6}\%.$$

✍ *Esercizi proposti:* 3.81, 3.82, 3.83, 3.84

3.12.1 Problemi con le percentuali

Per calcolare la percentuale di una grandezza è sufficiente moltiplicare il valore della grandezza per la percentuale espressa in frazione.

Esempio 3.28. In una scuola che ha 857 alunni ne sono stati promossi il 95%. Quanti sono stati i promossi?

Per rispondere, si moltiplica il numero totale di alunni per la frazione 95/100. Precisamente $\frac{95}{100} \cdot 857 = 814{,}15$. Poiché il risultato non è un numero intero, la percentuale è stata approssimata. Gli alunni promossi sono stati 814.

A volte è nota una parte della grandezza e si vuole conoscere che percentuale è la parte nota rispetto al totale. In questo caso occorre dividere la parte nota per l'intera grandezza, moltiplicare il risultato per 100 ed esprimere il numero in percentuale.

Esempio 3.29. Di una scolaresca di 652 alunni ben 126 hanno avuto il debito in matematica. Qual è la percentuale di alunni che hanno avuto il debito in matematica?

Per rispondere alla domanda eseguiamo i seguenti calcoli:

$$\frac{126}{652} \cdot 100\% \simeq 0{,}19 \cdot 100\% = 19\%.$$

Si noti che nell'ultimo esempio è stato utilizzato il simbolo $\simeq$ (*circa uguale*) che indica un'approssimazione del calcolo, ovvero che la corrispondenza tra le scritture a sinistra e a destra di tale simbolo non è esatta, ma è approssimata all'ultima cifra decimale indicata nella scrittura di destra.

3.12.2 Problemi con gli sconti

Esempio 3.30. Un pantalone costava € 70 e viene venduto con il 20% di sconto, a quanto viene venduto?

Si tratta di calcolare prima lo sconto e poi il prezzo scontato. Lo sconto è dato da

$$20\% \cdot \text{€}\ 70 = \frac{20}{100} \cdot \text{€}\ 70 = \text{€}\ 14.$$

Il prezzo scontato è € 70− € 14 = € 56.

In alternativa si può tenere conto che, se 20% esprime lo sconto, la parte rimanente, quella da pagare, è $100\% - 20\% = 80\%$. Quindi per calcolare quanto costano i pantaloni scontati si può calcolare

$$80\% \cdot \text{€}\ 70 = \frac{80}{100} \cdot \text{€}\ 70 = \text{€}\ 56.$$

Esempio 3.31. Un paio di scarpe da € 120 viene venduto scontato a € 75. Qual è stata la percentuale di sconto praticato?

Per rispondere alla domanda, calcolo lo sconto € 120− € 75 = € 45.

Calcolo la percentuale che € 45 rappresentano di € 120,

$$\frac{45}{120} \cdot 100\% = 0{,}375 \cdot 100\% = 37{,}5\%.$$

Esempio 3.32. Mario ha trovato in un negozio il computer che stava cercando; per fortuna era scontato del 15% e così ha risparmiato € 120. Quanto costa il computer di listino?

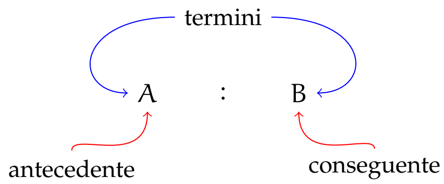
Poiché € 120 corrispondono al 15% del prezzo di listino, per calcolare il prezzo di listino occorre dividere 120 per la frazione che corrisponde a 15%.

$$120 : \ 15\% = 120 : \frac{15}{100} = 120 \cdot \frac{100}{15} = € \, 800.$$

✍ *Esercizi proposti:* 3.85, 3.86, 3.87, 3.88, 3.89, 3.90, 3.91, 3.92, 3.93, 3.94, 3.95, 3.96, 3.97, 3.98,3.99, 3.100, 3.101, 3.102, 3.103, 3.104, 3.105, 3.106, 3.107, 3.108, 3.109, 3.110, 3.111, 3.112, 3.113, 3.114, 3.115, 3.116

3.13 Proporzioni

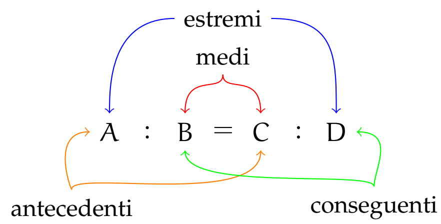
Definizione 3.17. Il rapporto tra due numeri, di cui il secondo è diverso da zero, è il quoziente che si ottiene dividendo il primo numero per il secondo. Il primo numero si dice *antecedente*, il secondo *conseguente*.



Definizione 3.18. Una *proporzione* è una uguaglianza tra due rapporti, del tipo

$$A : B = C : D$$

che si legge "A sta a B come C sta a D", con B e D diversi da zero. A e D sono detti *estremi*, mentre B e C si dicono *medi*.



Esempio 3.33. Determinare se quattro numeri sono in proporzione.

- $4 : 2 = 12 : 6$. Formano una proporzione perché i due quozienti valgono entrambi 2;
- $7 : 14 = 16 : 4$. *Non* formano una proporzione perché il primo rapporto vale 0,5 mentre il secondo rapporto vale 4.

Proprietà 3.9 (Fondamentale delle proporzioni). *In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi, cioè*

$$A : B = C : D \quad \Rightarrow \quad A \cdot D = B \cdot C.$$

Esempio 3.34. Determinare se quattro numeri sono in proporzione.

- $4 : 6 = 6 : 9$ è una proporzione.
  Il prodotto dei medi è $6 \cdot 6 = 36$ e il prodotto degli estremi è $4 \cdot 9 = 36$. Quindi è una proporzione.
- $20 : 30 = 30 : 40$ non è una proporzione.
  Il prodotto dei medi è $30 \cdot 30 = 900$ mentre il prodotto degli estremi è $20 \cdot 40 = 800$. Quindi non è una proporzione.

Proprietà 3.10 (del permutare). *Se in una proporzione scambiamo tra loro i medi otteniamo ancora una proporzione; in modo analogo otteniamo ancora una proporzione se scambiamo tra loro gli estremi, o ancora se scambiamo tra loro sia i medi sia gli estremi, ovvero*

$$A : B = C : D \quad \Rightarrow \quad A : C = B : D \quad \Rightarrow \quad D : B = C : A \quad \Rightarrow \quad D : C = B : A.$$

Esempio 3.35. Data la proporzione $12 : 16 = 18 : 24$ e scambiando tra loro:

- i medi si ottiene la proporzione $12 : 18 = 16 : 24$;
- gli estremi si ottiene la proporzione $24 : 16 = 18 : 12$;
- sia i medi che gli estremi si ottiene la proporzione $24 : 18 = 16 : 12$.

Proprietà 3.11 (dell'invertire). *Se in una proporzione scambiamo ogni antecedente con il rispettivo conseguente otteniamo ancora una proporzione, cioè*

$$A : B = C : D \quad \Rightarrow \quad B : A = D : C.$$

Esempio 3.36. Data la proporzione $15 : 9 = 5 : 3$, applicando la proprietà dell'invertire otteniamo la proporzione $9 : 15 = 3 : 5$.

Proprietà 3.12 (del comporre). *In una proporzione la somma dei primi due termini sta al primo termine come la somma del terzo e del quarto termine sta al terzo termine. Analogamente, la somma dei primi due termini sta al secondo termine come la somma del terzo e del quarto termine sta al quarto termine. In termini matematici*

$$A : B = C : D \quad \Rightarrow \quad (A + B) : A = (C + D) : C$$

$$A : B = C : D \quad \Rightarrow \quad (A + B) : B = (C + D) : D.$$

Esempio 3.37. Data la proporzione $16 : 10 = 40 : 25$, applicando la proprietà del comporre si ottengono le proporzioni

$$26 : 16 = 65 : 40 \qquad \text{e} \qquad 26 : 10 = 65 : 25.$$

Analogamente alla proprietà del comporre si ha la seguente:

Proprietà 3.13 (dello scomporre). *In una proporzione la differenza dei primi due termini sta al primo termine come la differenza del terzo e del quarto termine sta al terzo termine. Analogamente, la differenza dei primi due termini sta al secondo termine come la differenza del terzo e del quarto termine sta al quarto termine. Quindi*

$$A : B = C : D \quad \Rightarrow \quad (A - B) : A = (C - D) : C$$

$$A : B = C : D \quad \Rightarrow \quad (A - B) : B = (C - D) : D.$$

Esempio 3.38. Data la proporzione $16 : 10 = 40 : 25$, applicando la proprietà dello scomporre si ottengono le proporzioni

$$6 : 16 = 15 : 40 \qquad \text{e} \qquad 6 : 10 = 15 : 25.$$

3.13.1 Calcolo di un medio o un estremo incognito

Il medio incognito di una proporzione si calcola moltiplicando gli estremi e dividendo per il medio noto:

$$a : b = x : d \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a \cdot d}{b}.$$

L'estremo incognito di una proporzione si calcola moltiplicando i medi e dividendo per l'estremo noto:

$$x : b = c : d \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b \cdot c}{d}.$$

Esempio 3.39. Calcola il termine incognito di ciascuna proporzione.

- $5 : 7 = 20 : x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7 \cdot 20}{5} = 28$;
- $2 : x = 3 : 16 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \cdot 16}{3} = \frac{32}{3}$;
- $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = x : \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{10}{9}$.

Definizione 3.19. Una proporzione si dice *continua* se ha i medi uguali.

Una proporzione continua è del tipo $A : B = B : C$, per esempio le seguenti proporzioni sono continue

$$3 : 9 = 9 : 27 \qquad 5 : 10 = 10 : 20 \qquad 4 : 16 = 16 : 64.$$

Calcolo del medio in una proporzione continua

In una proporzione continua il medio proporzionale incognito si ottiene moltiplicando gli estremi e calcolando la radice quadrata del prodotto ottenuto, cioè

$$a : x = x : d \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{a \cdot d}.$$

Esempio 3.40. Trova il valore di x nella seguente proporzione continua $36 : x = x : 9$.
Svolgimento $x = \sqrt{36 \cdot 9} = 18$.

Calcolo di un termine incognito per mezzo delle proprietà del comporre e dello scomporre

---

Esempio 3.41. Calcolare x nella proporzione $(11 - x) : x = 15 : 5$.
Applicando la proprietà del comporre si ottiene la proporzione

$$\begin{aligned}(11 - x + x) : x = (15 + 5) : 5 \Rightarrow\ & 11 : x = 20 : 5 \\ \Rightarrow\ & x = \frac{11 \cdot 5}{20} = \frac{11}{4}.\end{aligned}$$

Esempio 3.42. Calcolare x nella proporzione $\left(\frac{1}{2} + x\right) : \frac{5}{8} = x : 5$.

Permutando i medi si ha $\left(\frac{1}{2} + x\right) : x = \frac{5}{8} : 5$.

Applicando la proprietà dello scomporre si ha:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} + x - x\right) : x = \left(\frac{5}{8} - 5\right) : 5 \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{2} : x = \frac{-35}{8} : 5 \\ \Rightarrow\ & x = \frac{1}{2} \cdot 5 : \left(\frac{-35}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left(-\frac{8}{35}\right) = -\frac{4}{7}.\end{aligned}$$

✍ *Esercizi proposti:* 3.117, 3.118, 3.119, 3.120, 3.121, 3.122, 3.123, 3.124

3.13.2 Grandezze direttamente e inversamente proporzionali

Il perimetro di un triangolo equilatero varia al variare della lunghezza del suo lato. Se si indica con l la lunghezza del lato del triangolo, allora il perimetro ($2p$) è dato dalla relazione:

$$2p = 3 \cdot l.$$

È possibile notare che se si raddoppia il lato, raddoppia anche il perimetro; se si triplica il lato, allora triplica anche il perimetro, ecc.

Lato (l)	0,5	1	1,5	2,4	3,1	4,4
Perimetro ($2p$)	1,5	3	4,5	7,2	9,3	13,2
Rapporto $\frac{2p}{l}$	3	3	3	3	3	3

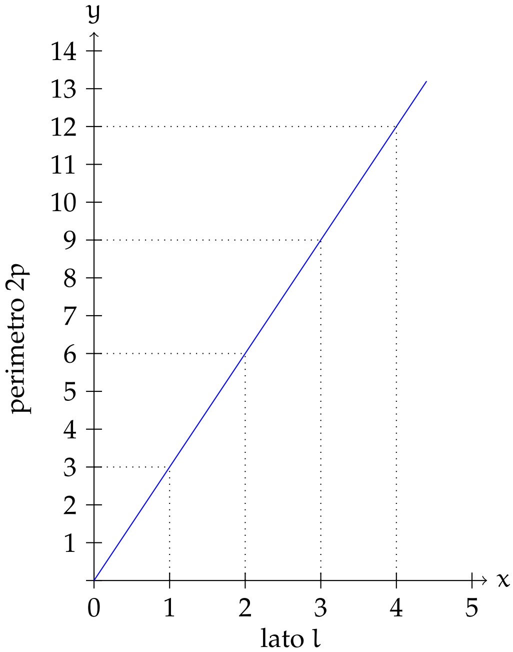


Figura 3.2: Proporzionalità diretta.

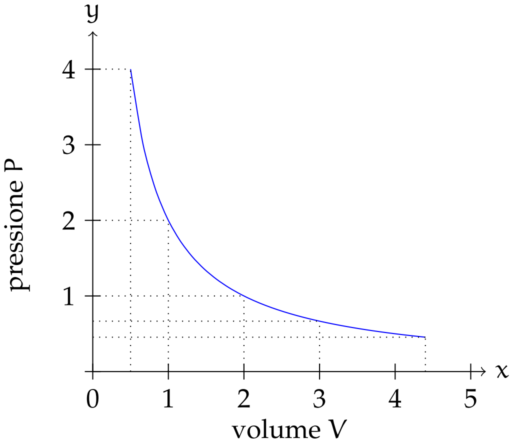


Figura 3.3: Proporzionalità inversa.

Definizione 3.20. Due grandezze x e y si dicono *direttamente proporzionali* se il loro rapporto è costante, cioè

$$\frac{y}{x} = k, \quad \text{con } k \neq 0.$$

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità diretta è espressa da una formula del tipo:

$$y = kx, \quad \text{con } k \neq 0.$$

Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato da una retta che passa per l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali (figura 3.2).

Esaminiamo ora un altro esempio. Se quando vai a fare benzina allo scooter chiedi ogni volta € 10 di benzina, noterai che se aumenta il prezzo della benzina diminuirà la quantità di carburante che ricevi e viceversa se diminuisce il prezzo aumenterà la quantità di carburante che ricevi. Ciò che rimane costante è il prodotto tra il prezzo della benzina e la quantità di benzina ricevuta che deve essere sempre € 10.

Prezzo benzina al litro: p (€)	1,126	1,156	1,212	1,248
Benzina ricevuta: b (l)	8,881	8,650	8,251	8,013
Costo: $c = p \cdot b$ (€)	10,00	10,00	10,00	10,00

Definizione 3.21. Due grandezze x e y si dicono *inversamente proporzionali* se il loro prodotto è costante, cioè

$$x \cdot y = k, \text{ con } k \neq 0.$$

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità inversa è espressa da una formula del tipo:

$$y = \frac{k}{x}, \text{ con } k \neq 0.$$

Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato, in un sistema di assi cartesiani ortogonali, da un ramo d'iperbole equilatera (figura 3.3).

✍ *Esercizi proposti:* 3.125, 3.126, 3.127, 3.128

3.14 Espressioni con le frazioni

Esempio 3.43. Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left\{\frac{3}{20} \cdot \left[\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right) : 5 + \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{5}\right) : \frac{1}{14} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9}\right] + \frac{2}{15}\right\} : 2.$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{3}{20} \cdot \left[\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right) : 5 + \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{5}\right) : \frac{1}{14} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9}\right] + \frac{2}{15}\right\} : 2 = \\
&= \left\{\frac{3}{20} \cdot \left[\left(\frac{4-3}{9}\right) : 5 + \left(\frac{15-14}{35}\right) : \frac{1}{14} + \frac{1}{45}\right] + \frac{2}{15}\right\} : 2 \\
&= \left\{\frac{3}{20} \cdot \left[\frac{1}{9} : 5 + \frac{1}{35} : \frac{1}{14} + \frac{1}{45}\right] + \frac{2}{15}\right\} : 2 \\
&= \left\{\frac{3}{20} \cdot \left[\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{35} \cdot \frac{14}{1} + \frac{1}{45}\right] + \frac{2}{15}\right\} : 2 \\
&= \left\{\frac{3}{20} \cdot \left[\frac{1}{45} + \frac{14}{35} + \frac{1}{45}\right] + \frac{2}{15}\right\} : 2 \\
&= \left\{\frac{3}{20} \cdot \left[\frac{1}{45} + \frac{2}{5} + \frac{1}{45}\right] + \frac{2}{15}\right\} : 2 \\
&= \left\{\frac{3}{20} \cdot \left[\frac{1+18+1}{45}\right] + \frac{2}{15}\right\} : 2 \\
&= \left\{\frac{3}{20} \cdot \frac{20}{45} + \frac{2}{15}\right\} : 2 \\
&= \left\{\frac{3}{45} + \frac{2}{15}\right\} : 2 \\
&= \left\{\frac{1}{15} + \frac{2}{15}\right\} : 2 \\
&= \frac{3}{15} : 2 \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Esempio 3.44. Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}-\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{25}{4}\right]\cdot\left[\left(\frac{5}{8}-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{8}{3}-\frac{15}{4}:\left(\frac{8}{3}-1\right)+\frac{10}{3}\right].$$

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}-\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{25}{4}\right]\cdot\left[\left(\frac{5}{8}-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{8}{3}-\frac{15}{4}:\left(\frac{8}{3}-1\right)+\frac{10}{3}\right]=\\
&\qquad=\left[\frac{5}{8}-\left(\frac{6-5}{10}\right)\cdot\frac{25}{4}\right]\cdot\left[\left(\frac{25-32}{40}\right)\cdot\frac{8}{3}-\frac{15}{4}:\left(\frac{8-3}{3}\right)+\frac{10}{3}\right]\\
&\qquad=\left[\frac{5}{8}-\frac{1}{10}\cdot\frac{25}{4}\right]\cdot\left[-\frac{7}{40}\cdot\frac{8}{3}-\frac{15}{4}:\frac{5}{3}+\frac{10}{3}\right]\\
&\qquad=\left[\frac{5}{8}-\frac{5}{8}\right]\cdot\left[-\frac{7}{15}-\frac{15}{4}\cdot\frac{3}{5}+\frac{10}{3}\right]\\
&\qquad=0\cdot\left[-\frac{7}{15}-\frac{9}{4}+\frac{10}{3}\right]\\
&\qquad=0.
\end{aligned}$$

Esempio 3.45. Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left[\frac{13}{5}:\left(3+\frac{9}{10}\right)+\frac{7}{8}+\left(\frac{13}{4}-2\right)\cdot\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{11}{3}:\left(6-\frac{1}{2}\right).$$

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{13}{5}:\left(3+\frac{9}{10}\right)+\frac{7}{8}+\left(\frac{13}{4}-2\right)\cdot\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{11}{3}:\left(6-\frac{1}{2}\right)=\\
&\qquad=\left[\frac{13}{5}:\left(\frac{30+9}{10}\right)+\frac{7}{8}+\left(\frac{13-8}{4}\right)\cdot\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{11}{3}:\left(\frac{12-1}{2}\right)\\
&\qquad=\left[\frac{13}{5}:\frac{39}{10}+\frac{7}{8}+\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{11}{3}:\frac{11}{2}\\
&\qquad=\left[\frac{13}{5}\cdot\frac{10}{39}+\frac{7}{8}+\frac{1}{3}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{2}{11}\\
&\qquad=\left[\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{1}{3}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{2}{3}\\
&\qquad=\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right]\cdot\frac{2}{3}\\
&\qquad=1\cdot\frac{2}{3}\\
&\qquad=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Esempio 3.46. Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left[\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(1+\frac{2}{3}-2\right)^2\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(1+\frac{8}{5}+\frac{1}{25}\right).$$

$$\begin{aligned}
\left[\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(1+\frac{2}{3}-2\right)^2\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(1+\frac{8}{5}+\frac{1}{25}\right) &= \\
&=\left[\left(\frac{14-5}{10}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(\frac{3+2-6}{3}\right)^2\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(\frac{25+40+1}{25}\right) \\
&=\left[\left(\frac{9}{10}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\frac{66}{25} \\
&=\left[1-\frac{1}{9}\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\frac{66}{25} \\
&=\left[\frac{8}{9}\right]^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2-\frac{66}{25} \\
&=\left(\frac{4}{5}\right)^2-\frac{66}{25} \\
&=\frac{16}{25}-\frac{66}{25} \\
&=-\frac{50}{25} \\
&=-2.
\end{aligned}$$

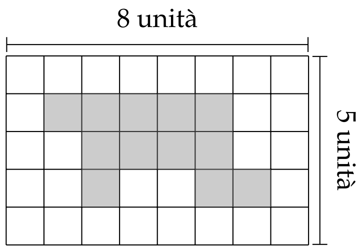
✍ *Esercizi proposti:* 3.129, 3.130, 3.131, 3.132, 3.133, 3.134, 3.135, 3.136, 3.137, 3.138, 3.139

3.15 Esercizi

3.15.1 Esercizi dei singoli paragrafi

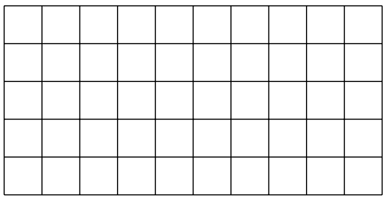
3.2 - Frazioni

3.1 (*). Da un cartoncino rettangolare quadrettato di lati rispettivamente 5 unità e 8 unità viene ritagliata la forma colorata in grigio, come mostrato nella figura di seguito riportata.



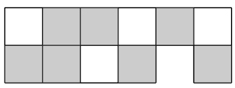
Quale frazione rappresenta il rapporto tra la forma ritagliata e il cartoncino?

3.2. Il monte-premi di una lotteria è di € 50 000. Il primo premio è di € 25 000, il secondo di € 10 000, il terzo di € 5 000, il quarto di € 4 000, il quinto e il sesto premio sono uguali. Nella figura un quadretto rappresenta € 1 000 ed il totale è il monte-premi.



a) Colora con colori diversi i quadretti che servono per rappresentare i sei premi, un colore per ogni premio;
b) quale parte del monte-premi è stata incassata da chi ha vinto il secondo premio? Esprimi questa parte con una frazione;
c) Marco ha vinto il sesto premio: quanto ha vinto?

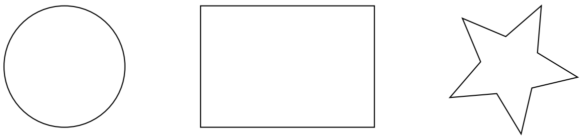
3.3 (*). La figura seguente è composta da 11 quadratini, alcuni bianchi altri grigi.



Quale frazione rappresenta la parte grigia rispetto all'intera figura? Quale frazione la parte bianca?

3.4. Di ciascuna figura colora la parte indicata dalla frazione.

$\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$



3.5. Indica se le frazioni sono proprie (P), improprie (I) o apparenti (A).

a) $\frac{3}{4}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ c) $\frac{12}{3}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ e) $\frac{5}{3}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$

b) $\frac{8}{3}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ d) $\frac{5}{2}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ f) $\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$

3.6. Trova le frazioni equivalenti completando.

a) $\frac{3}{4} = \frac{\dots}{12}$; b) $\frac{12}{16} = \frac{3}{\dots}$; c) $\frac{5}{2} = \frac{\dots}{10}$; d) $\frac{21}{35} = \frac{\dots}{5}$.

3.7. Sottolinea le frazioni equivalenti a $\frac{3}{5}$ tra le seguenti.

$$\frac{6}{10}; \quad \frac{25}{100}; \quad \frac{12}{10}; \quad \frac{5}{25}.$$

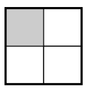
3.8. Completa le seguenti uguaglianze.

a) $\frac{3}{5} = \frac{\dots}{10}$; b) $\frac{75}{10} = \frac{\dots}{100}$; c) $\frac{7}{\dots} = \frac{1}{2}$; d) $3 = \frac{24}{\dots}$.

3.9. Indica almeno tre frazioni equivalenti a ciascuna delle seguenti.

a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{3}{5}$; c) $\frac{12}{60}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{5}{2}$.

3.10. Nella figura che segue il quadratino colorato rappresenta 1/4 del quadrato grande; costruisci una figura che rappresenti 8/4 del quadrato grande accostando opportunamente altri quadrati uguali.



3.11. Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni.

a) $\frac{4}{6}$; c) $\frac{2}{10}$; e) $\frac{3}{12}$; g) $\frac{80}{100}$; i) $\frac{9}{6}$; k) $\frac{14}{49}$;

b) $\frac{8}{2}$; d) $\frac{18}{16}$; f) $\frac{6}{20}$; h) $\frac{8}{12}$; j) $\frac{10}{15}$; l) $\frac{15}{21}$.

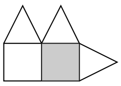


Figura 3.4

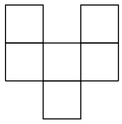


Figura 3.5

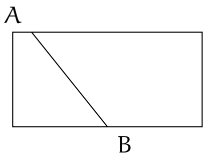


Figura 3.6

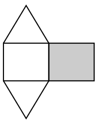


Figura 3.7

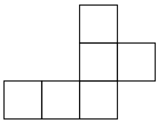


Figura 3.8

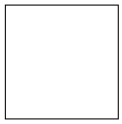


Figura 3.9

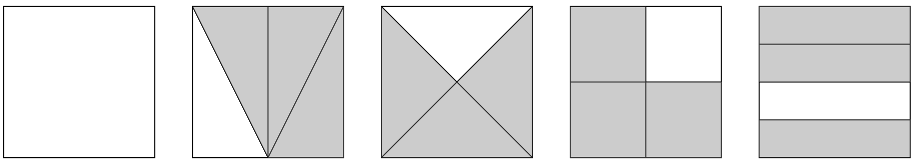
3.12. Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni.

a) $\frac{16}{6}$; b) $\frac{18}{15}$; c) $\frac{20}{12}$; d) $\frac{21}{9}$; e) $\frac{24}{30}$; f) $\frac{25}{15}$; g) $\frac{27}{21}$; h) $\frac{28}{14}$; i) $\frac{30}{16}$; j) $\frac{32}{24}$; k) $\frac{35}{10}$; l) $\frac{36}{81}$; m) $\frac{40}{6}$; n) $\frac{42}{21}$; o) $\frac{45}{27}$; p) $\frac{48}{60}$; q) $\frac{12}{30}$; r) $\frac{135}{77}$.

3.13. Si può dire che la parte colorata in grigio della figura 3.4 corrisponde a $\frac{1}{5}$ della figura stessa?

3.14. Costruisci una figura che corrisponde a $\frac{11}{6}$ della figura 3.5.

3.15. Per quali dei seguenti disegni la parte colorata in grigio rappresenta sempre la frazione $\frac{3}{4}$ del quadrato bianco?



3.16. Relativamente alla figura 3.6, quale proposizione è vera?

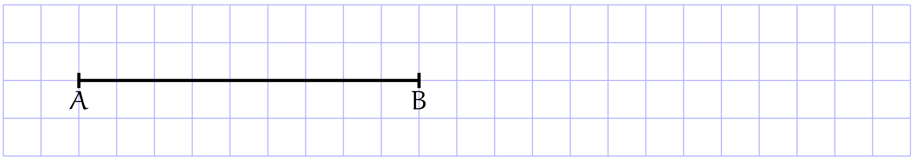
a) Il segmento AB la divide in due parti uguali;
b) il segmento AB la divide in due quadrilateri.

3.17. La parte in grigio rappresenta 1/4 della figura 3.7?

3.18. Costruisci una figura che sia gli 11/6 della figura 3.8.

3.19. Colora i 3/4 della figura 3.9.

3.20. Il segmento nel disegno rappresenta i 3/5 dell'intero.



Ti basta questa informazione per costruire l'intero? Come procederesti?

3.21. Disegna un segmento come grandezza unitaria e dimostra che la frazione 3/5 è equivalente a 6/10 ma non a 9/25.

3.3 - Dalle frazioni ai numeri razionali

3.22. Riscrivi le seguenti frazioni improprie come somma di un numero naturale e una frazione propria.

$$\frac{10}{3};\ \frac{17}{9};\ \frac{11}{2};\ \frac{25}{3};\ \frac{17}{10};\ \frac{15}{6}.$$

3.4 - La scrittura dei numeri razionali

3.23. Senza eseguire le divisioni indica quali di queste frazioni possono essere scritte come numero decimale finito (DF), quali come numero decimale periodico (DP) e quali come numero intero (I):

a) $-\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

b) $-\frac{6}{5}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

c) $\frac{2}{25}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

d) $\frac{5}{8}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

e) $\frac{5}{6}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

f) $-\frac{5}{12}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

g) $\frac{12}{6}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

h) $\frac{5}{10}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

3.24 (*). Trasforma le seguenti frazioni in numeri decimali.

a) $\frac{13}{2}$; b) $\frac{11}{3}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{15}{6}$; e) $\frac{17}{7}$;

f) $\frac{15}{8}$; g) $\frac{12}{9}$; h) $\frac{127}{10}$; i) $\frac{122}{11}$; j) $\frac{13}{12}$;

k) $\frac{35}{121}$; l) $\frac{121}{35}$; m) $\frac{12}{10}$; n) $\frac{127}{100}$; o) $\frac{122}{1\,100}$;

p) $\frac{13}{100}$; q) $\frac{35}{1\,000}$; r) $\frac{121}{10\,000}$; s) $\frac{12}{5}$; t) $\frac{13}{7}$;

u) $\frac{15}{4}$; v) $\frac{5}{8}$; w) $\frac{32}{9}$; x) $\frac{21}{20}$; y) $\frac{37}{18}$;

3.25. Trasforma le seguenti frazioni in numeri decimali.

a) $\frac{4}{12}$; b) $\frac{20}{15}$; c) $\frac{135}{1}$; d) $\frac{28}{49}$; e) $\frac{45}{9}$;
f) $\frac{8}{50}$; g) $\frac{36}{1080}$; h) $\frac{55}{6875}$; i) $\frac{54}{648}$; j) $\frac{25}{0{,}000\,000\,2}$;
k) $\frac{40}{0{,}000\,002}$; l) $\frac{45}{0{,}000\,09}$; m) $\frac{0,008}{10\times 10^{-3}}$; n) $\frac{800}{5\times 10^{4}}$; o) $\frac{8\times 10^{2}}{50\,000}$;
p) $\frac{12^{4}}{3^{3}\times 2^{6}}$; q) $\frac{8\times 10^{-3}}{0{,}005}$; r) $\frac{2^{3}\times 1\,000}{500}$; s) $\frac{2^{8}\times 5^{8}}{10^{8}}$; t) $\frac{3^{18}}{9^{9}}$.

3.26 (*). Trasforma in frazioni i seguenti numeri decimali.

a) 12,5; b) 4,2; c) 6,25; d) 3,75; e) 0,1; f) 2,5;
g) 100,100; h) 0,12; i) 1,103 0; j) 0,001 00; k) 100,001 0; l) 0,000 1;
m) 1,25; n) 0,08; o) 1,002; p) 15,675; q) 1,7; r) 1,46;
s) 0,13; t) 0,149; u) 5,015; v) 3,21; w) 2,3; x) 1,086.

3.27. Completa la tabella.

Numero decimale	Parte intera	Parte decimale	Periodo	Antiperiodo	Frazione
$1,752\,1$					
$3,\overline{75}$					
$12,1\overline{24}$					
$1,0\overline{5}$					
$0,13\overline{57}$					

3.28 (*). Trasforma i seguenti numeri decimali in frazioni.

a) $-1{,}25$; b) $0{,}03$; c) $-2{,}\overline{1}$; d) $0{,}\overline{13}$; e) $5{,}080$; f) $3{,}7\overline{52}$;
g) $-0{,}38$; h) $11{,}\overline{175}$; i) $0{,}01\overline{0\,2}$; j) $0{,}12\overline{3\,45}$; k) $100{,}\overline{100}$; l) $100{,}\overline{001}$;
m) $0{,}08$; n) $0{,}2$; o) $0{,}1$; p) $0{,}03$; q) $23{,}\overline{5}$; r) $22{,}\overline{32}$;
s) $0{,}25$; t) $31{,}\overline{02}$; u) $0{,}\overline{21}$; v) $2{,}3\overline{4}$; w) $3{,}21\overline{8}$; x) $0{,}03\overline{4}$.

3.29. Scrivi delle frazioni equivalenti ai seguenti numeri decimali.

a) $0{,}003\,55$;
b) $3{,}7$;
c) $7{,}84$;
d) $0{,}004 \cdot 10^5$;
e) $0{,}001^3$;
f) $7{,}42$;
g) $-0{,}00\overline{6}$;
h) $3 \cdot 10^{-4}$.

3.30. Scrivi la frazione generatrice di $12{,}3\overline{45}$. Qual è la 614-esima cifra decimale del numero?

3.31. Calcola $0{,}\overline{9} - 3{,}\overline{9}$. Cosa osservi?

3.32. Verifica le seguenti uguaglianze trovando la frazione generatrice.

$$\frac{1{,}\overline{7}}{1{,}\overline{3}} = 1{,}\overline{3}; \qquad \frac{2{,}\overline{7}}{1{,}\overline{6}} = 1{,}\overline{6}; \qquad \frac{1{,}\overline{16}}{2{,}\overline{3}} = 0{,}5; \qquad \frac{2{,}\overline{3}}{1{,}\overline{6}} = 1{,}4.$$

3.5 - I numeri razionali e la retta

3.33. Rappresenta su una retta orientata, dopo aver scelto una opportuna unità di misura, i seguenti gruppi di numeri razionali, ciascun gruppo su una retta.

a) $\frac{3}{4}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{6}{3}, \quad \frac{5}{6}; \quad \frac{12}{4}; \quad \frac{19}{8}; \quad \frac{16}{5},$

b) $\frac{2}{3}, \quad -\frac{3}{4}, \quad \frac{5}{2}, \quad -\frac{7}{12}, \quad \frac{3}{2}, \quad -\frac{11}{6}, \quad \frac{9}{4};$

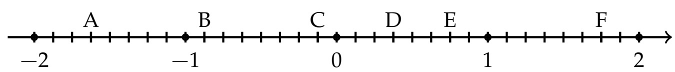
c) $\frac{0}{4}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{9}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{19}{8}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{4}{2};$

d) $\frac{10}{3}, \quad \frac{5}{3}, \quad 2, \quad \frac{0}{3}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{13}{6};$

e) $\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad -\frac{5}{4}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{8}, \quad -\frac{5}{16};$

f) $\frac{8}{5}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{10}, \quad -\frac{7}{4}, \quad -\frac{3}{5}, \quad -\frac{11}{10}.$

3.34. Scrivi i numeri razionali rappresentati dai punti segnati sulla retta nella figura.



A = . . ., B = . . ., C = . . ., D = . . ., E = . . ., F = ...

3.35. Disegna su una retta orientata i seguenti numeri decimali, ciascun gruppo su una retta diversa.

a) 0,6, 2,3, −1,2, −0,06, 0,3, 0,9;
b) 1,4, −0,3, −1,5, 0,2, −0,9, 0,15;
c) −0,8, −1,6, +4,91, −1,17, 3,5, −2,8;
d) 1,55, 2,01, −3,0, −2,10, 0,25, −0,75.

3.6 - Confronto tra numeri razionali

3.36. Inserisci tra le seguenti coppie di numeri razionali i simboli di maggiore (>), minore (<) o uguale (=).

a) $\frac{4}{5} \dots \frac{5}{7}$; c) $-1 \dots \frac{1}{12}$; e) $-\frac{1}{2} \dots -\frac{3}{4}$;

b) $-\frac{9}{5} \dots -\frac{8}{3}$; d) $\frac{2}{7} \dots \frac{6}{21}$; f) $\frac{3}{5} \dots \frac{6}{9}$.

3.37. Riscrivi in ordine crescente (dalla più piccola alla più grande) le seguenti frazioni.

a) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{12}$;

b) $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{6}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{5}$;

c) $-\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{2}{5}$, 0.

d) $-\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $-\frac{6}{5}$, $\frac{2}{5}$, -1, $\frac{5}{2}$, 0

e) $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{2}$.

3.38. Ordina dal più piccolo al più grande i seguenti valori.

a) 10,011, 10,110, 11,001, 11,100;
b) 10,01, 11,11, 10,101, 10,001;
c) 0,101, 0,011, 0,110, 0,010 1;
d) 1,010 1, 1,100 1, 1,001 1, 1,011 0.

3.39. Scrivi una frazione molto vicina a $-\frac{2}{9}$.

3.40. Scrivi una frazione compresa tra:

a) $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$; b) $\frac{5}{3}$ e $\frac{1}{7}$; c) $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$.

3.41. Quali disuguaglianze sono vere?

a) $-\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$; V F
b) $-\frac{7}{6} > +\frac{6}{7}$; V F
c) $-\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$; V F
d) $+\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$; V F
e) $+\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$; V F
f) $+\frac{7}{6} > -\frac{6}{7}$. V F

3.42. Quale dei seguenti numeri è più vicino a 1?

A 0,10 B 0,99 C 0,01 D 0,90

3.43. Quale dei seguenti numeri è più vicino alla frazione $\frac{1}{10}$?

A 0,01 B 0,90 C 1,01 D 0,19

3.44. Scrivi due numeri compresi tra:

a) $2{,}3$ e $3{,}4$;
b) $3{,}4$ e $3{,}6$;
c) $2{,}\overline{3}$ e $2{,}\overline{4}$;
d) $1{,}1\overline{3}$ e $1{,}2\overline{3}$;
e) $3{,}\overline{4}$ e $3{,}\overline{6}$;
f) $1{,}\overline{35}$ e $1{,}\overline{36}$.

3.7 - Le operazioni con i numeri razionali

3.45 (*). Calcola le seguenti somme algebriche tra frazioni.

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$;
b) $\frac{7}{11}+\frac{4}{11}$;
c) $\frac{3}{2}-\frac{5}{2}$;
d) $\frac{8}{18}+\frac{5}{9}$;
e) $\frac{6}{5}+0$;
f) $-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}$;
g) $-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$;
h) $\frac{4}{3}-\frac{6}{5}$;
i) $\frac{2}{5}+\frac{5}{8}$;
j) $\frac{5}{8}+\frac{5}{6}$;
k) $\frac{5}{6}-\frac{5}{12}$;
l) $1-\frac{3}{2}$;
m) $\frac{11}{5}+5$;
n) $\frac{7}{3}-\frac{6}{4}$;
o) $3-\frac{2}{3}$;
p) $\frac{1}{5}-1$;
q) $4+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}$;
r) $\frac{4}{3}+3-\frac{1}{2}$;
s) $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}$;
t) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$.

3.46. Calcola le seguenti somme algebriche fra numeri razionali.

a) $1{,}\overline{6}+\frac{2}{3}$;
b) $5{,}1-1{,}\overline{5}$;
c) $0{,}03+\frac{0}{3}$;
d) $0{,}1\overline{6}-1{,}\overline{45}$;
e) $50\%+\frac{1}{2}$;
f) $\frac{2}{5}-1{,}2+5\%$;
g) $-1{,}\overline{2}+25\%+\frac{5}{18}$;
h) $\frac{3}{2}-13\%+0{,}15$;
i) $1{,}\overline{2}+1{,}2+\frac{1}{2}+1{,}2\%$;
j) $7{,}989\,2+3{,}121\,8$;
k) $3{,}999+$ un centesimo.

3.47. Completa:

$$\frac{3}{4}+\ldots=1;\qquad 1-\ldots=\frac{4}{13};\qquad \frac{11}{12}\cdot\ldots=\frac{8}{55};\qquad \ldots:\frac{5}{3}=\frac{3}{5}.$$

3.48. Completa la seguente tabella.

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	-1	0	$-1{,}\overline{6}$	-5	$-0{,}21$
b	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{2}{5}$	15%	$+2{,}\overline{3}$	$+\frac{17}{3}$	$+\frac{3}{5}$
$a+b$							
$a-b$							
$b-a$							
$-a-b$							
$-a+b$							

3.49. Completa la seguente tabella.

		Sottraendo			
	$-$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{2}$
Minuendo	$\frac{23}{12}$				
	$\frac{13}{2}$				
	$\frac{9}{4}$				

3.50. Calcola a mente:

a) $0{,}1+0{,}1$;
b) $0{,}2+0{,}8$;
c) $0{,}01+0{,}9$
d) $0{,}91+0{,}19$;
e) $1{,}10+1{,}01$;
f) $0{,}999+0{,}10$;
g) $1{,}1-0{,}9$;
h) $100-0{,}99$;
i) $2-0{,}1$;
j) $3-1{,}1$;
k) $4-1{,}4$;
l) $10-0{,}10$.

3.51. Calcola i seguenti prodotti fra frazioni.

a) $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$;
b) $6\cdot\frac{5}{2}$;
c) $-\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$;
d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}$;
e) $\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$;
f) $\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\frac{5}{6}$;

3.52. Calcola i seguenti prodotti fra numeri razionali.

$$-1{,}\overline{1}\cdot\frac{18}{5};\qquad 2\%\cdot 5\%;\qquad -\frac{3}{4}\cdot(-120\%).$$

3.53. Completa la seguente tabella.

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	15%	$-1{,}\overline{6}$	$+\frac{17}{3}$	$-0{,}21$
b	$+\frac{7}{3}$		$-\frac{5}{2}$		$+2{,}\overline{3}$		$+\frac{5}{3}$
$a\cdot b$		1		-1		0	

3.54. Completa la seguente tabella.

		Primo fattore			
	$\cdot$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{4}$
Secondo fattore	$\frac{3}{4}$				
	$\frac{5}{2}$				
	$\frac{7}{3}$				
	$\frac{8}{5}$				

3.55. Calcola a mente:

a) $0{,}1 \cdot 0{,}1$;
b) $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$;
c) $0{,}1 \cdot 100$;
d) $1 \cdot 0{,}1$;
e) $2 \cdot 0{,}1$;
f) $20 \cdot 0{,}02$;
g) $0{,}01 \cdot 10$;
h) $\frac{1}{100} \cdot 10$;
i) $0{,}1 \cdot 0{,}2$;
j) $\frac{3}{10} \cdot 30$;
k) $0{,}01 \cdot 0{,}1$;
l) $1\,000 \cdot 0{,}000\,1$.

3.56. Calcola i seguenti quozienti fra frazioni.

a) $\frac{3}{2} : \frac{4}{3}$;
b) $-\frac{6}{5} : \left(-\frac{2}{3}\right)$;
c) $\frac{+3}{2} : \left(\frac{-3}{2}\right)$;
d) $\frac{2}{5} : \frac{5}{8} : \left(-\frac{5}{6}\right)$.

3.57. Calcola i seguenti quozienti fra numeri razionali.

a) $-1{,}\overline{1} : \frac{18}{5}$;
b) $2\% : 5\%$;
c) $\frac{1}{2} : 0,5$;
d) $-\frac{3}{4} : 1{,}4 : (-120\%)$.

3.58. Completa la seguente tabella.

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	-1	0	$-1{,}\overline{6}$	-5	$-0{,}21$
b	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{2}{5}$	15%	$+2{,}\overline{3}$	$+\frac{17}{3}$	$+\frac{3}{5}$
$a : b$							
$b : a$							

3.59. Calcola a mente:

a) $0{,}30 \cdot 0{,}40$;
b) $0{,}5 : 0{,}1$;
c) $0{,}5 \cdot 0{,}2$;
d) $0{,}1 \cdot 0{,}1$;
e) $0{,}4 \cdot 3$;
f) $0{,}1 : 0{,}1$;
g) $0{,}5 \cdot 20$;
h) $0{,}1 \cdot 0{,}010$.

3.60. Esegui le seguenti operazioni con le frazioni, quando è possibile.

a) $\frac{2}{3} \cdot 0$;
b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$;
c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{0}$;
d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{0}{2}$;
e) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$;
f) $\frac{2}{3} : 0$;
g) $\frac{2}{3} - 0$;
h) $1 : \frac{2}{3}$;
i) $\frac{1}{4} \cdot 4$;
j) $\frac{1}{4} : 4$;
k) $0{,}3 : 3$;
l) $1{,}5 : 1{,}\overline{5}$;
m) $1{,}5 : 1{,}5$;
n) $1{,}5^0$;
o) $(1-1)^0$;
p) $(-1)^{-1}$;
q) $3^0 : 2^0$;
r) $(-2)^{-2} : (-1)^{-1}$.

3.8 - Potenza di una frazione

3.61. Calcola il valore delle seguenti potenze.

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$;
b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$;
c) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$;
d) $\left(\frac{1}{2}-1\right)^3$;
e) $\left(-\frac{3}{5}\right)^0$;
f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^1$;
g) -2^4;
h) $(-2)^4$;
i) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$;
j) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$;
k) $-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$;
l) -2^{-4};
m) $(-2)^{-4}$;
n) $-\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$.

3.62. Indica quali proprietà delle potenze sono state applicate nelle seguenti uguaglianze.

a) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = -\frac{3^5}{2^5}$; proprietà ....
b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 : \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} = -\frac{2}{3}$; proprietà ....

c) $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^6 = +\frac{3^6}{2^6}$; proprietà ....

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^2 : \left(\frac{25}{10}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} : \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}\right)^2 = 1^2$; proprietà ....

e) $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{25}\right)^2 = \left(-\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{25}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = +\frac{3^2}{5^2}$; proprietà ....

3.63. Completa la seguente tabella.

a	a^2	a^{-2}	$-a^2$	$(-a)^3$	a^{-1}	a^0	a^3
$-\frac{2}{3}$							
$-1,\overline{6}$							
$-0,1$							
$\frac{3}{10}$							

3.64. Calcola a mente.

a) $3,4 \cdot 10^2$;
b) $3,4 : 10^2$;
c) $0,34 \cdot 10^4$;
d) $34,4 : 10^2$;
e) $0,34 \cdot 10^3$;
f) $34,10 \cdot 10^3$;
g) $3,04 \cdot 10$;
h) $0,34 : 10^2$.

3.65. Calcola le seguenti potenze prestando particolare attenzione ai segni.

a) $-(-2)^2$;
b) $[-(-1)^2]^3$;
c) $-(-2)^{-4}$;
d) $-[-(-1)^{-1}]^{-2}$;
e) $\dfrac{2^{-1}+3^{-2}}{2^{-2}+3^{-1}}$;
f) $\dfrac{2^{-2}-3^{-1}}{2^{-2}+3^{-1}}$;
g) $(-3)^3 \cdot \dfrac{2^{-2}-5^{-1}}{2^{-2}+5^2}$.

3.10 - Notazione scientifica e ordine di grandezza

3.66. Esprimere in notazione scientifica i seguenti numeri.

a) $780\,000\,000\,000\,000 = 7,8 \cdot 10^{\cdots}$;
b) $423\,000\,000\,000 = 4,23 \cdot 10^{\cdots}$;
c) $76\,000\,000\,000\,000 = \ldots \cdot 10^{\cdots}$;
d) $0,000\,000\,000\,98 = 9,8 \cdot 10^{\cdots}$;
e) $0,000\,004\,5 = 4,5 \cdot 10^{\cdots}$;
f) $0,000\,000\,987 = \ldots \cdot 10^{\cdots}$.

3.67. Quale tra i seguenti numeri non è scritto in notazione scientifica?

A $5,67 \cdot 10^{-12}$ B $4,28 \cdot 10^8$ C $10,3 \cdot 10^{-2}$ D $9,8 \cdot 10^7$

3.68. Determina in notazione scientifica l'area di una lamina di ferro quadrata avente il lato di misura 0,000 000 000 21 m.

3.69. Scrivi in notazione scientifica i seguenti numeri.

34 000; 0,000 054; 26; 0,540 00; 5; 0,000 01; 990 000; 222.

3.70. Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.

a) $0{,}000\,36 \cdot 20\,000\,000 = \ldots$;
b) $8\,400 : 42 = \ldots$;
c) $900\,000\,000 : 0{,}000\,3 = \ldots$;
d) $3 : 10\,000\,000 = \ldots$

3.71. Calcola ed esprimi il risultato in notazione scientifica.

a) $3 \cdot 10^{24} + 4 \cdot 10^{24}$;
b) $0{,}3 \cdot 10^{104} + 4 \cdot 10^{103}$;
c) $6 \cdot 10^{101} \cdot 0{,}15 \cdot 10^{101}$;
d) $12 \cdot 10^{2\,000} : 6 \cdot 10^{200}$.

3.72 (*). Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.

a) $\dfrac{(0{,}000\,02)^2 : 30\,000\,000 \cdot (0{,}1)^5}{4\,000 \cdot 0{,}02 : 0{,}000\,003}$;
b) $\dfrac{95\,000\,000 \cdot 0{,}000\,072}{(250\,000)^3 : (0{,}000\,035)^2}$;
c) $\dfrac{(3\,000)^2 : 0{,}000\,003 : 20\,000\,000}{0{,}000\,02 : 0{,}000\,000\,04}$;
d) $\dfrac{(6,3 \cdot 10^6)^2 \cdot 0{,}000\,003\,1}{(40\,000\,000)^4 : (8 \cdot 10^{-18})^4}$;
e) $\dfrac{(2\,000)^3 \cdot (0{,}000\,001)^5 : 20}{(0{,}000\,3)^2 : 3\,000\,000}$;
f) $\dfrac{4\,000^2 \cdot 0{,}000\,012}{3 \cdot 10^9 \cdot 2\,000^3}$.

3.73. Disponi in ordine di distanza dal Sole i seguenti pianeti, in base alla distanza media in km riportata tra parentesi: Mercurio ($5{,}8 \cdot 10^7$), Nettuno ($4{,}5 \cdot 10^9$), Giove ($7{,}8 \cdot 10^8$), Plutone ($6{,}1 \cdot 10^9$), Urano ($2{,}7 \cdot 10^9$), Terra ($1{,}5 \cdot 10^8$), Marte ($2{,}3 \cdot 10^8$).

3.74. Determina l'ordine di grandezza dei seguenti numeri.

a) $126\,000\,000$; b) $0{,}000\,009\,8$; c) $7\,000\,000$; d) $0{,}000\,000\,002\,7$.

3.75. Completa la seguente tabella.

Numero	26 000 000	0,000 083	490 000	0,000 008 1
Notazione scientifica				
o.d.g.				

3.76. Determina l'ordine di grandezza del risultato dei seguenti calcoli.

a) $5{,}3 \cdot 10^5 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3 - 2{,}5 \cdot 10^6$;
b) $(5 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^3)^3$.

3.11 - Problemi con le frazioni

3.77 (*). La distanza Roma - Bari è di 450km. Se ho percorso i 2/5 del tragitto quanti chilometri mancano ancora da percorrere?

3.78 (*). Lucia ha letto 3/5 di un libro e le rimangono da leggere 120 pagine. Di quante pagine è composto il libro?

3.79 (*). Una persona possiede € 525. Se spende i 3/5 della somma e poi i 2/3 della rimanente, quale somma di denaro le rimane?

3.80. Luigi ha 18 anni, cioè i 3/7 dell'età di sua madre, che a sua volta ha i 4/5 dell'età del padre. Quali sono le età del padre e della madre di Luigi?

3.12 - Le percentuali

3.81. Trasforma i seguenti numeri percentuali in numeri decimali.

$$12\%; \quad 0{,}03\%; \quad 4{,}3\%; \quad 80\%; \quad 3{,}5\%; \quad -0{,}2\%; \quad 15\%; \quad -0{,}38\%.$$

3.82. Trasforma i seguenti numeri decimali in percentuali.

$$-1{,}25; \quad 0{,}03; \quad -2{,}\overline{1}; \quad 0{,}\overline{13}; \quad 5{,}080; \quad 3{,}7\overline{52}; \quad -0{,}38.$$

3.83. Trasforma i seguenti numeri percentuali in frazioni ridotte ai minimi termini.

$$12\%; \quad 0{,}03\%; \quad 4{,}3\%; \quad 80\%; \quad 3{,}5\%; \quad -0{,}2\%; \quad 15\%; \quad -0{,}38\%.$$

3.84. Trasforma le seguenti frazioni in numeri percentuali.

$$-\frac{3}{2}; \quad \frac{4}{3}; \quad -\frac{6}{5}; \quad \frac{2}{25}; \quad \frac{5}{8}; \quad \frac{5}{6}; \quad -\frac{5}{12}.$$

3.85. A una scuola di ballo si sono iscritte 120 persone delle quali il 20% frequenta i corsi di ballo liscio. In quanti frequentano i corsi di liscio?

3.86. Una scuola attiva dei corsi di lingue. 32 studenti si iscrivono al corso di inglese, 24 al corso di francese e 16 al corso di tedesco. Qual è la percentuale degli alunni iscritti al corso di inglese, rispetto al totale degli iscritti?

3.87. A una scuola di ballo sono iscritte 120 persone e di queste il 68% sono donne. Quanti sono gli uomini?

3.88. Il prezzo di listino di una bici è di € 175. Se viene venduta con uno sconto del 10% quanto viene a costare?

3.89 (*). Una canna da pesca da € 125 è in vendita promozionale a € 70. Qual è la percentuale di sconto applicata?

3.90 (*). Per l'acquisto di un armadio, Maria è riuscita a spuntare, dopo lunghe discussioni con il venditore, uno sconto del 25%, risparmiando ben € 120. Qual era il prezzo dell'armadio prima dello sconto?

3.91. Completa la seguente tabella.

Prezzo di listino (€)	Sconto (€)	sconto (%)	Prezzo scontato (€)
120	12	10	108
250	10		
125	5		
170		10	
1 100		15	
220			20
12 000			700
	15	15	
	30		50
		25	140
	120	30	

3.92. Calcola:

a) il 10% di 100;
b) il 30% di 700;
c) il 20% di 500;
d) il 15% di 150;
e) il 25% di 1 250;
f) il 16% di 120.

3.93. Quale percentuale è:

a) 10 bocciati su 120 alunni: la percentuale di bocciati è circa 8, 3%;
b) 15 alunni su 45 giocano a calcio: la percentuale di alunni che giocano a calcio è ......;
c) 10 alunni su 28 suonano il piano: la percentuale di alunni che suonano il piano è ......;
d) 20 alunni su 120 frequentano il corso di teatro: la percentuale di alunni che fanno teatro è ......

3.94. Se il prezzo aumenta:

a) un chilo di pane lo scorso anno costava € 1,20 e quest'anno è aumentato del 3%, allora costa ......;
b) un litro di benzina lo scorso anno costava € 1,514, mentre quest'anno costa € 1,629, quindi è aumentata del ...... %;
c) un litro di latte lo scorso anno costava € 1,25 e quest'anno è aumentato di 0,05%, quindi costa € ......;
d) un chilo di formaggio parmigiano lo scorso anno costava € 23,50 e quest'anno costa € 25,80 pertanto è aumentato del ...... %.

3.95. Se il prezzo diminuisce:

a) un chilo di pomodori lo scorso anno costava € 1,20 e quest'anno è diminuito del 5%, allora costa € ......;
b) un chilo di peperoni lo scorso anno costava € 2,10, mentre quest'anno costa € 1,80 quindi è diminuito del ...... %;
c) un chilo di cicoria lo scorso anno costava € 0,80 e quest'anno due chili costano € 1,20, pertanto la cicoria è diminuita del ...... %;
d) un chilo di arance lo scorso anno costava € 1,40, quest'anno le arance sono diminuite del 15%, quindi al chilo costano € ......

3.96. Dato il costo di un oggetto IVA esclusa, calcola il prezzo IVA inclusa.

Costo IVA esclusa (€)	IVA (%)	Costo IVA inclusa (€)
130	22	
1 250	22	
17,40	4	
	10	170
	22	12 240
101,00		105,60

3.97. Dati imponibile (costo senza IVA) e IVA, determina il costo comprensivo di IVA e viceversa.

Imponibile (€)	IVA (%)	IVA (€)	Totale
100	21	21	121
1 100	21		
1	23		1 100
1 000			1 100
	21	141	
1 100		100	

3.98. La seguente tabella riporta i dati relativi alla provenienza degli alunni di una prima classe di una scuola secondaria.

	Scuola di provenienza			
Sesso	Scuola A	Scuola B	Scuola C	Altre scuole
M	6	4	4	2
F	5	3	4	2

a) Qual è la percentuale di alunni provenienti dalla Scuola A?
b) Qual è la percentuale di maschi provenienti dalla Scuola C?
c) Qual è la percentuale di alunni che non provengono dalle scuole A o B o C?
d) Qual è la percentuale di alunni che provengono dalle scuola A o C?

3.99 (*). Agli esami di stato, un gruppo di allievi (A) ha riportato i seguenti punteggi (P) in centesimi.

P	60	68	70	74	75	80	83	84	85	86	87	88	89	90	94	98	100
A	2	1	3	4	2	3	2	3	4	1	3	2	1	3	4	6	8

Per poter partecipare a un concorso occorre aver conseguito il diploma con un punteggio superiore a 75. Quale percentuale di diplomati potrà partecipare al concorso? Se solo il 10% di quelli che si sono presentati al concorso lo hanno superato, quanti degli allievi hanno superato il concorso?

3.100. Tra i dipendenti di un'azienda si effettua un sondaggio per decidere se è opportuno introdurre un nuovo tipo di turno di lavoro. Nella tabella sono riportati i risultati del sondaggio.

lavoratori	favorevoli	contrari
uomini	75	49
donne	81	16

a) Tra le donne, qual è la percentuale di lavoratrici favorevoli al nuovo turno?
b) qual è la percentuale di lavoratori (uomini e donne) che non sono favorevoli al nuovo turno?

3.101. Sapendo che $\overline{AB} = 12\text{cm}$ e che $\overline{BC} = \frac{3}{4}\overline{AB}$, calcola la lunghezza di $\overline{BC}$.

3.102. Sapendo che $\overline{AB} = 36\text{cm}$ e che $\overline{AB} = \frac{6}{5}\overline{BC}$, calcola la lunghezza di $\overline{BC}$.

3.103. Sapendo che $\overline{AB} + \overline{BC} = 15\text{cm}$ e che $\overline{AB} = \frac{2}{3}\overline{BC}$, calcola le lunghezze di $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

3.104. Sapendo che $\overline{AB} - \overline{BC} = 4\text{cm}$ e che $\overline{AB} = \frac{4}{3}\overline{BC}$, calcola le lunghezze di $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

3.105. Determina le ampiezze di due angoli complementari sapendo che uno è la metà dell'altro.

3.106. Determina le ampiezze di due angoli supplementari sapendo che uno è i 2/3 dell'altro.

3.107. Determina le misure dei due lati di un rettangolo sapendo che ha perimetro di 128cm e che l'altezza è 3/2 della base.

3.108. La superficie della Toscana è divisa tra le seguenti provincie delle quali è fornita tra parentesi l'estensione in km^2, calcola per ciascuna di esse la percentuale del territorio posseduta: Arezzo (3 235), Firenze (3 514), Grosseto (4 504), Livorno (1 211), Lucca (1 773), Massa e Carrara (1 156), Pisa (2 444), Pistoia (965), Prato (365), Siena (3 821).

3.109 (*). La superficie della Terra è per il 70% ricoperta di acqua e per il 30% di terraferma. Per 1/5 la terraferma è coperta da ghiaccio e deserto, per 2/3 da foreste e montagna. La parte rimanente è terreno coltivato. Qual è in percentuale la parte della superficie terrestre coltivata?

3.110 (*). In 30kg di sapone concentrato al 30% quanta acqua e quanto sapone ci sono?

3.111. Una succo di frutta di 6kg contiene il 45% di frutta. Quanta frutta devo aggiungere per avere una nuova soluzione di succo di frutta al 60%.

3.112. Quanta acqua bisogna aggiungere a una soluzione di 2kg concentrata al 12% per ottenere una nuova soluzione concentrata al 10%?

3.113. Si hanno due soluzioni delle stesse sostanze, una concentrata al 10% e l'altra al 30%. In quale proporzione occorre miscelare le due soluzioni in modo da ottenere 6kg di soluzione concentrata al 15%?

3.114. Una società ha acquistato dei PC nuovi per i propri dipendenti. Pagandoli in contanti ha ottenuto uno sconto dell'8%, versando di conseguenza l'importo di € 24 500. Qual era il valore iniziale della merce acquistata?

3.115. Una persona paga un tappeto € 1 200, lo stesso tappeto l'anno precedente costava € 900. Quanto è stato l'aumento percentuale da un anno all'altro?

3.116. Quanto vale il 2 012% di 2 012?

3.13 - Proporzioni

3.117. Verifica quale delle seguenti scritture formano una proporzione.

a) $10 : 11 = 12 : 13$
b) $7 : 14 = 21 : 42$
c) $64 : 48 = 8 : 6$
d) $18 : 15 = 12 : 10$
e) $10 : 6 = 5 : 3$
f) $1{,}2 : 1{,}4 = 3{,}6 : 4{,}2$

3.118. Disponi opportunamente i numeri in modo che formino una proporzione.

a) 7 5 20 28;
b) 8 3 2 12;
c) 5 6 2 15;
d) 3 5 9 15;
e) 6 7 2 21;
f) 3 8 6 16.

3.119. Completa la seguente tabella.

1° termine	2° termine	Antecedente	Conseguente	Rapporto	Rapp. inverso
32	8	32	8	$32 : 8 = 4$	$\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
12	13				
$\frac{3}{5}$	3				
				$\frac{1}{4} : \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$	
					$\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$

3.120. Completa la seguente tabella.

Proporzione	Antecedenti	Conseguenti	Medi	Estremi	Valore rapporto
$3 : 5 = 21 : 35$	3 e 21	5 e 35	5 e 21	3 e 35	0,6
$54 : 12 = 36 : 8$					
$7 : 21 = 9 : 27$					
$\frac{5}{4} : \frac{15}{8} = 4 : 6$					

3.121. Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.

a) $2\,692 : 24 = 3 : x$;

b) $x : 0{,}\overline{6} = 0{,}8 : 1{,}\overline{3}$;

c) $\frac{7}{3} : x = \frac{4}{3} : \frac{8}{35}$;

d) $\left(1 - \frac{5}{12}\right) : \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) = x : \left(\frac{9}{8} - \frac{5}{8}\right)$.

3.122. Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.

a) $\left(\frac{3}{20} + \frac{3}{8}\right) : x = \left(1 - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{11}{3} + \frac{1}{7}\right)$;

b) $\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) : \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{2}\right) : x$;

c) $\left(\frac{4}{5} + 1\right) : \left(3 - \frac{1}{5}\right) = x : \left(2 + \frac{1}{3}\right)$.

3.123 (*). Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.

a) $\left(\frac{5}{3} + \frac{8}{3} - 3\right) : x = x : \left(1 + \frac{5}{16} + \frac{3}{8}\right)$;

b) $\left\{\frac{5}{2} : \left[\frac{1}{2} \cdot \left(3 + \frac{1}{3} : \frac{5}{3} - \frac{14}{5}\right)\right]\right\} : x = x : \left\{\frac{3}{11}\left[\left(5 - \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{2}{21} + \frac{3}{2}\right]\right\}$;

c) $(70 - x) : 6 = x : 8$;

d) $\left(\frac{5}{6} - x\right) : \left(1 - \frac{1}{2}\right) = x : \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)$.

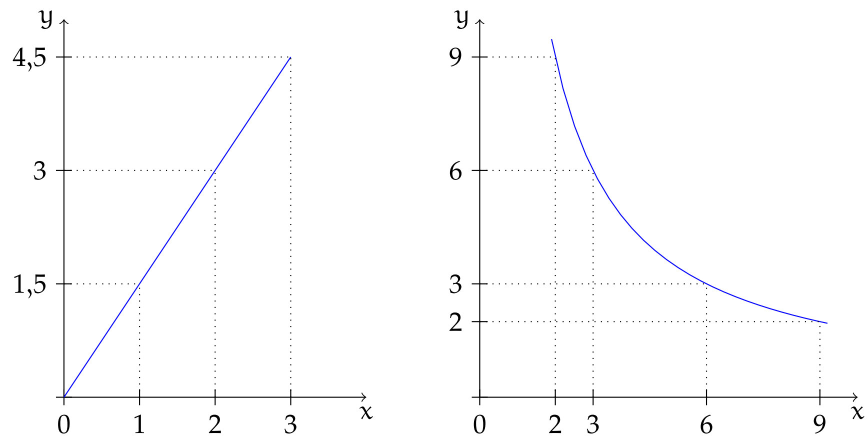
3.124 (*). Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.

a) $x : y = 5 : 3,\ \text{con } x + y = 24;$
b) $\left(6 + \frac{3}{5}\right) : y = \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{15}\right) : x,\ \text{con } x + y = \frac{13}{4};$
c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{20}\right) = x : y,\ \text{con } x - y = \frac{1}{3};$
d) $x : \frac{2}{7} = y : \frac{1}{2} = z : \frac{3}{14},\ \text{con } x + y + z = \frac{1}{2}.$

3.125. Per ciascuna funzione costruisci la tabella dei valori (almeno 5) e stabilisci se sono riferite a grandezze direttamente proporzionali, inversamente proporzionali o nessuno dei due casi.

a) $y = 5x;$
b) $y = \frac{1}{2x};$
c) $y = \frac{2}{3}x;$
d) $y = \frac{1}{x} + 3;$
e) $y = 6x + 1;$
f) $y = \frac{24}{x};$
g) $y = 4x;$
h) $y = \frac{18}{x};$
i) $y = \frac{1}{2}x;$
j) $y = \frac{6}{x};$
k) $y = 5 + x;$
l) $y = 3x + 2;$
m) $y = \frac{2}{x};$
n) $y = 2x;$
o) $y = 2x - 1;$
p) $y = \frac{1}{2x} + 1;$
q) $y = 2x - 2.$

3.126. Osserva i grafici e rispondi alle domande:



a) quale grafico rappresenta una funzione di proporzionalità diretta e quale di proporzionalità inversa?
b) qual è il coefficiente di proporzionalità? Del primo grafico è ...... del secondo è ......
c) qual è la funzione? Del primo grafico è .... del secondo grafico è ....

3.127. La tabella seguente riporta alcuni valori che esprimono il variare della grandezza y al variare di x:

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y			8		4		2	1

a) Completa la tabella sulla base dei valori noti;
b) si tratta di grandezze direttamente o inversamente proporzionali?
c) qual è la legge che lega y a x?
d) rappresenta su un piano cartesiano questa relazione.

3.128. La tabella seguente riporta alcuni valori che esprimono il variare dello spostamento s (espresso in km) in funzione del tempo t (espresso in ore) relativo a un corpo che si muove con velocità costante.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
s	7		21		35		49	56

a) Completa la tabella sulla base dei valori noti;
b) si tratta di grandezze direttamente o inversamente proporzionali?
c) qual è la legge che lega s a t?
d) rappresenta su un piano cartesiano questa relazione.

3.14 - Espressioni con le frazioni

3.129 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni con addizioni e sottrazioni.

a) $\frac{7}{12} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right)$;
b) $\frac{5}{16} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\right)$;
c) $\frac{4}{3} - \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{6}\right)$;
d) $\frac{6}{7} + \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{14}\right)$;
e) $\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) - \frac{1}{4}$;
f) $\frac{7}{4} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right)$.

3.130 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni con addizioni e sottrazioni.

a) $\frac{7}{15} + \left(\frac{1}{4} - \frac{13}{5}\right) + \left(2 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{3} - \frac{13}{12}\right)$;
b) $\frac{4}{5} - \left[\frac{3}{5} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\right] - \left(\frac{8}{20} + \frac{1}{5}\right)$;
c) $\frac{3}{2} - 1 + \left\{2 + \left[\frac{1}{2} + 5 - \left(\frac{4}{3} + 1\right)\right] + \frac{1}{10}\right\} + 1 + \frac{7}{2}$;
d) $\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{5} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{21}{9} - \frac{8}{6}\right) + \left(\frac{9}{5} - \frac{10}{15}\right) - \left(\frac{9}{5} - \frac{10}{6}\right) - \frac{4}{5}$;
e) $\frac{1}{2} + \left[\left(7 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} - \frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right) + \frac{9}{4}\right] - \frac{1}{4}$.

3.131 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni con addizioni e sottrazioni.

a) $\frac{2}{3}-\left[\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)\right]-2-\left\{-\frac{5}{2}-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{3}-1\right)-2\right]\right\}$;

b) $\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{6}+\frac{1}{5}\right)+\frac{121}{60}\right]-\left[\frac{179}{40}-\left(\frac{7}{6}-\frac{3}{8}+1\right)\right]+\frac{16}{10}-\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{6}\right)$.

c) $-\frac{5}{2}+\left\{-\frac{3}{2}+\left[\frac{7}{5}+\frac{13}{90}+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{15}\right)+\left(4-\frac{10}{9}\right)\right]\right\}$;

d) $\left[\frac{5}{2}+\left(\frac{3}{4}+\frac{6}{5}\right)\right]-\left(6-\frac{7}{20}\right)+\left\{3+\left[\frac{7}{20}+\left(\frac{9}{20}+5\right)\right]\right\}$;

e) $\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{11}{4}+3\right)-\frac{5}{12}\right]+\left\{\left(\frac{1}{15}-\frac{9}{10}+\frac{1}{2}\right)+\left[\frac{5}{2}-\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{8}\right)-2\right]\right\}$.

3.132 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(-1+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\right)$;

b) $\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)$;

c) $\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right):\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)$;

d) $\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)+\frac{3}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{7}{30}-\frac{4}{5}\right)+\frac{5}{6}\right]$.

3.133 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left[\frac{4}{5}:\left(-\frac{1}{5}\right)\right]\cdot\left[\frac{5}{12}:\left(-\frac{4}{3}\right)\right]$;

b) $\left[\left(-\frac{3}{4}-\frac{13}{8}\right)\left(1-\frac{9}{23}\right)+\left(-\frac{7}{2}-1\right)\left(-1-\frac{1}{23}\right)\right]\left(-3+\frac{5}{2}\right)$;

c) $\left[\frac{2}{5}\left(3-\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{4}\right)\right]\cdot\left[\left(5-\frac{3}{4}\right):\frac{17}{15}-\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right):\frac{14}{5}\right]$;

d) $\left[\left(\frac{3}{16}+\frac{1}{24}\right)\cdot 2-\left(1-\frac{3}{8}\right):3\right]:\left[\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right)\cdot 3+\frac{12}{5}:4\right]$.

3.134 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{5}+\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{12}{7}-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{6}\right]$;

b) $\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{5}-\frac{3}{4}:\left[0{,}75-\frac{5}{6}\right]$;

c) $\frac{1}{3}:\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{6}-\frac{1}{15}$;

d) $-\left(\frac{3}{4}+1{,}4\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\right)+\frac{6}{5}$.

3.135 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{6}\right)-\left(1+\frac{5}{6}\right):\left(2-\frac{1}{3}\right)$;

b) $\left(\frac{5}{3}-\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}+\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right)\cdot\frac{5}{2}\right]^2$;

c) $\frac{63}{55}\cdot\frac{44}{45}+\frac{14}{75}\cdot\frac{15}{35}+\frac{2}{25}\cdot 10-\frac{16}{25}:\frac{3}{5}+\frac{1}{15}$;

d) $\left\{\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{12}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right]:\frac{1}{4}\right\}-\frac{2}{3}\cdot(-0{,}6)$.

3.136 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{3}{2}-2-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\right)$;

b) $\left(\frac{1}{3}-3\right)-\left[\left(-\frac{1}{2}+2\right)+\left(\frac{9}{2}-1\right)\right]$;

c) $\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{20}-\frac{1}{10}\right)$;

d) $\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{8}\right)\frac{4}{3}+\frac{1}{4}$.

3.137 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left[\left(3-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)\right]\left[\left(1+\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2}\right]$;

b) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)$;

c) $\left(6-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right):\left(\frac{2}{3}-1-\frac{1}{5}\right)$;

d) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}+1\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\right]:\left(\frac{4}{3}-1\right)$.

3.138 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\frac{4}{5}-\frac{27}{7}\cdot\frac{1}{12}+\frac{8}{21}:\frac{8}{6}+\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{7}-\frac{9}{14}+\frac{1}{7}-\frac{12}{25}:\frac{3}{5}$;

b) $\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{7}{2}-\left(\frac{10}{18}-\frac{7}{15}\right):\frac{2}{9}\right]:\frac{14}{15}\cdot\frac{1}{4}+1$;

c) $\left[\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{10}\right):\frac{37}{5}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\right]^2:\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{12}\right)^2\right]$;

d) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{7}{5}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{7}\right):\frac{2}{14}-\frac{1}{400}$.

3.139 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(3-\frac{18}{5}-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)-\frac{2^2}{3}+\frac{1}{60}$;

b) $\left(\frac{3}{5}-1\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{5}-\frac{17}{20}\right)+\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{5}\right):\frac{4}{15}-\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}:\frac{1}{5}\right):\frac{22}{17}-\frac{3}{10}$;

c) $\frac{19}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{2}-2\right):\left(\frac{3}{10}-1{,}25\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-1\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^2$;

d) $\left[\left(1+\frac{1}{2}\right):3-\left(2+\frac{3}{2}\right)+1\right]+\left(3-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)-1\left(-2+\frac{3}{2}\right)^2$.

3.140 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right)\right]-\left[\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\right]$;

b) $2-\left[3+1-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]-\left(-2-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$;

c) $\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{6}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)+\frac{10}{8}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\frac{1}{6^2}$;

d) $\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left[\left(\frac{2}{5}\right)^8:\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^2\right\}^2:\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^4$.

3.15.2 Esercizi riepilogativi

3.141 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{4}{5}:\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{3}{2}+\frac{3}{4}:\left[\frac{5}{8}+\frac{1}{3}:\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)\right]-\frac{1}{4}:\frac{1}{2}$;

b) $\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{15}\right):\left(2+\frac{1}{5}\right)+\left(1-\frac{7}{36}\right):\left(2-\frac{7}{18}\right)+\left[1-\frac{1}{3}-\left(1-\frac{9}{14}\right):\frac{10}{7}\right]:\frac{5}{2}$;

c) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}\right)\frac{5}{14}-\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{3}\right):\frac{4}{5}-\frac{1}{8}+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)\frac{5}{18}$;

d) $\left\{-\frac{2}{3}\left[-\frac{4}{5}\left(-1-\frac{1}{4}\right)\right]\right\}-\left(-2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left\{-\frac{2}{3}\left[-\frac{5}{4}\left(-1+\frac{1}{5}\right)\right]\right\}\left(1+\frac{1}{2}\right)$.

3.142 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(-2+\frac{3}{7}+8\right)\left[3-\left(6+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\frac{1}{9}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{7}+3\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$;

b) $\left[\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{5}\right)\left(-1+\frac{8}{13}\right)+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right]\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$;

c) $\left\{\frac{5}{6}-\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{2}{3}-3\right)+\frac{2}{3}-2\right]\right\}:\left\{\frac{3}{4}-\left[-\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}-1\right)+\frac{3}{8}\right]\right\}$;

d) $1+\frac{3}{4}\left\{-\frac{2}{3}-\left[\frac{5}{6}+\left(\frac{3}{2}-1\right):\left(\frac{1}{2}+2\right)-\frac{3}{2}\right]:\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\left(1+\frac{1}{3}\right)$;

e) $15\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right):\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]-17\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{10}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]$.

3.143 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $1-\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2:\left(\frac{3}{2}\right)^4-\left(\frac{4}{5}\right)^3:\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4:\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]$;

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\frac{2^2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}-\frac{(-2)^{-2}}{5}-2^4$;

c) $\left\{\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}:\left(\frac{6}{8}+1-\frac{3}{4}\right)\right]^3\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{5}\right\}:\frac{1}{5}$;

d) $\left\{\frac{1}{2}+\frac{15}{2}:\left[\frac{1}{2}:\left(1-\frac{3}{4}\right)+1\right]\right\}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5:\left(\frac{1}{3}\right)^4\right]^2.$

3.144 (*)**.** Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left[\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2:\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3;$

b) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\left(-\frac{1}{5}\right)^2\right]:\left(-\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)^2;$

c) $\left[\left(2-\frac{2}{3}\right)^2:(-3)^3\right]:\left(-\frac{1}{16}\right)-\frac{13}{3^5};$

d) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\right]^2:\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2;$

e) $\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^5\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^2:\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]^3\right\}^4;$

f) $\left[\frac{\left(-\frac{1}{5}\right)^5}{\left(-\frac{1}{5}\right)^2}\right]^4:\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^3\left(-\frac{1}{5}\right)^2\right]^2.$

3.145 (*)**.** Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left\{\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right)\cdot\frac{4}{5}\right]\cdot\frac{1}{14}\right\}^2:\left(1-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{10}\right)^2;$

b) $\left[(0{,}4-1)^2:0{,}01-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4};$

c) $\frac{7}{15}\left\{\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{11}{16}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right):\left[\left(\frac{4}{7}+\frac{5}{4}\right):\frac{17}{7}\right]\right\}\cdot\frac{9}{5};$

d) $\left(2+\frac{1}{2}\right)^2:\left(2-\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left[\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}.$

3.146 (*)**.** Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left[\left(3+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]:\left\{\frac{3}{2}-\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{11}+\frac{5}{22}+\frac{7}{33}\right):\frac{82}{33}+\frac{1}{12}\right]^5\right\}^3:\frac{1}{4};$

b) $\left\{\left[\left(\frac{8}{3}\right)^{10}:\left(\frac{8}{3}\right)^6\right]^2\cdot\left[\left(\frac{8}{3}\right)^8:\left(\frac{8}{3}\right)^3\right]\right\}:\left(\frac{8}{3}\right)^{11};$

c) $\left(1+\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(2-\frac{5}{2}\right)^{-2}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2};$

d) $\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{6}{5}-\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{5}\right)\cdot 3-\frac{1}{30}.$

3.147 (*)**.** Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\dfrac{\left(1+\frac{2}{3}\right):5+\left(2-\frac{2}{3}\right)}{3+\left(\frac{1}{2}-1\right)}:\dfrac{\left(5-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{7}{3}-\frac{2}{35}\right)}{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(3-\frac{1}{3}\right)};$

b) $8{,}75 \cdot \left(\frac{2}{5} - 0{,}2\right) \cdot \left\{\left[2 - 1{,}\overline{6} - \left(0{,}2 + \frac{2}{3}\right)\right] \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{17}{4}\right)\right\} - \frac{2}{3} \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) + 7{,}5 - 0{,}\overline{3}$;

c) $\left[\left(\frac{7}{5} - \frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \left(1 + \frac{2}{3} - 2\right)^2\right]^2 : \left(\frac{10}{9}\right)^2 - \left(1 + \frac{8}{5} - \frac{1}{25}\right)$;

d) $\left(\frac{1}{6} + 0{,}1\right) \cdot 0{,}16 \cdot (1 - 1{,}0\overline{1})^{-1}$.

3.148 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\dfrac{\left\{\left[\frac{1}{2} - \left(2 - \frac{11}{4}\right)\right] : (-3{,}5)\right\} \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) : 7^{-2}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} (-3)^2(-1)^2 : (-3)^2}$;

b) $\left(\frac{4}{3} - 2\right)\left(-\frac{1}{2}\right) : \left[\frac{5}{7}\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(2 + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right)\right] : \frac{11}{6}$;

c) $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2} : \left(\frac{5}{2} - 2\right)^{-3}$.

3.149 (*). Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left\{\left[\left(1 - \frac{3}{5}\right)^3 : \left(\frac{2}{5}\right)^4\right] : \left(\frac{3}{5} - 1\right)^2\right\}^6 : \\ : \left\{\left[\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{5} - 1\right)^2\right]^2 \cdot \left[\left(1 - \frac{3}{5}\right)^5 : \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)^4\right]^2\right\}^2.$$

3.150 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{2}{5}\right) : \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2\right] : \left[\left(2 + \frac{2}{5}\right) : \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) : 3\right]$;

b) $\left[\frac{3}{16}\left(5 - \frac{3}{2}\right) : \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right)\right] \cdot \frac{4}{7}\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}$;

c) $(-1)^2 - 2^2 + 2\left\{\left[-\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 : \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^3\right\}$;

d) $\left[\left(\frac{8}{3} - \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{6}{5} - \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{9}{4}\right)\left(\frac{11}{6} - \frac{13}{30} : \frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)^2\right] : \frac{3}{2} + \frac{23}{30}$.

3.151 (*). Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left[\left(\frac{2}{5} - \frac{25}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{3}{4} : \frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{77}{6} : \frac{11}{3} + \frac{7}{5}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 : \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3\right] : \\ : \left\{\left[\left(\frac{1}{10} - \frac{3}{20} + \frac{2}{25}\right) : \frac{2}{5} + \left(\frac{8}{35} - \frac{1}{4}\right)\frac{7}{3}\right] : \frac{3}{20} \cdot \frac{7}{3}\right\}.$$

3.152 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)\left(-1-\frac{1}{3}\right)+\left[\left(1+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(4-\frac{9}{2}\right)\right]\cdot\frac{3}{4}+3-\left(\frac{2}{27}\cdot\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\right)-\frac{9}{40}$;

b) $\left[0{,}625+4{,}5\cdot(0{,}75-0{,}\overline{6})\right]:\left[0{,}875+0{,}75\cdot(2{,}5-2{,}\overline{3})\right]$;

c) $\left\{3-\left[0{,}\overline{6}-\left(0{,}1\overline{6}+\frac{5}{12}\right)\right]:0{,}25\right\}^2\cdot(0{,}\overline{6}-0{,}625)$;

d) $\left(\frac{12}{9}-1\right)^2\cdot\left(\frac{2}{81}:3\right)^{-1}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{7}{4}\right)^3\cdot\left[-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{49}-\frac{3}{147}\right)\right]-\frac{1}{(-4)^2}$.

3.153 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\dfrac{\left[\left(\frac{9}{12}+\frac{10}{4}\right):\frac{26}{4}+\left(\frac{10}{8}-\frac{21}{18}\right):\frac{10}{12}\right]\left[\left(\frac{9}{15}+2-\frac{10}{6}\right):\frac{35}{45}\right]}{\left[\left(\frac{15}{25}-\frac{2}{6}\right)\frac{9}{12}+\left(\frac{4}{15}-\frac{11}{45}\right)5\right]:\frac{7}{9}}$;

b) $\dfrac{\left(\frac{5}{9}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{4}:\frac{15}{3}\right):\left[\left(\frac{4}{7}\right)^3:\left(\frac{4}{7}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}{\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\frac{1}{3}:\frac{5}{2}+1\right]:\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{7}{3}-2\right)}$;

c) $\dfrac{\left[1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}:\left(1-\frac{1}{6}\right)\right]\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left[\frac{3}{2}+\frac{6}{5}-\left(1-\frac{4}{5}\right)\right]\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}$;

d) $\dfrac{\frac{1}{6}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\right]+\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\right]}{\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^2-\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\right]\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2-\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}$.

3.154 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}-\dfrac{\left(\frac{1}{3}+0{,}5\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}-0{,}5\right)^{-2}}+\left(\dfrac{0{,}5-0{,}1}{1-0{,}5}\right)^{-2}-4^{-2}$;

b) $\left[0{,}1\overline{6}+(0{,}1\overline{36}+0{,}41\overline{6}-0{,}2\overline{27}):0{,}3\overline{90}\right]:\left[0{,}\overline{36}+2{,}25\cdot(0{,}\overline{5}-0{,}\overline{27})\right]$;

c) $\dfrac{1{,}6-0{,}5\cdot(0{,}\overline{6}-0{,}5):(1-0{,}\overline{6})^2-0{,}7}{3\cdot(1-0{,}5)^2+0{,}875-(1-0{,}5)^2:0{,}2-0{,}6\cdot0{,}5}$;

d) $0{,}1\overline{6}^2+\left[1{,}5:1{,}5^2+(1{,}\overline{6}-0{,}5):(2-0{,}\overline{3})+(0{,}\overline{6}+0{,}5-0{,}2)\cdot0{,}75:5{,}8\right]\cdot0{,}\overline{6}$.

3.155 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left\{0{,}8\overline{3}-\left[0{,}\overline{6}+(0{,}75-0{,}\overline{6}^{2}-(1-2{,}\overline{3}\cdot 0{,}25))\right]+0{,}\overline{6}:0{,}\overline{8}\right\}:1{,}02\overline{7}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{13^2-12^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{24}}$;

c) $\sqrt{20-2\cdot(2+3)+(2+1)\cdot 5}+\sqrt{48:6-3\cdot 2+10:5}$;

d) $\sqrt{\dfrac{1}{9}\cdot\left\{\left[\dfrac{11}{3}-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)\right]:\left[\left(2-\dfrac{7}{4}\right)+\dfrac{10}{3}\right]\right\}}$.

3.156 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\sqrt{\left\{\left[\left(\dfrac{5}{4}\right)^2:\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right]\left[\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{20}\right)\cdot\dfrac{4}{5}\right]\cdot\dfrac{1}{4}\right\}^2:\left(1-\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{3}{10}\right)^2}$;

b) $\left(1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}\right)^{-2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}\right)^{2}\cdot\left(4-\dfrac{9}{2}\right)^{-3}$.

3.157 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left[\left(2+\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}-\frac{5}{3}}-\dfrac{1}{8}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{10}\right)^{-2}\right]^{-2}$;

b) $\dfrac{\left[-\left(\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{5}\right)-\dfrac{1}{20}\right]\cdot\left(\dfrac{11}{4}-\dfrac{5}{2}\right)}{1-\left[1-\left(-\dfrac{17}{7}\right)\right]-\left(-1+\dfrac{2}{7}-\dfrac{1}{14}\right)}-\left[\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{33}{21}\right)-\left(1-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{7}\right)\right]$.

3.158 (*). Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left(\frac{7}{6}-\frac{5}{4}\right):\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{10}+\left\{\left[2-\left(2+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot 2-\frac{7}{10}\right\}\cdot$$
$$\cdot\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left[\frac{1}{3}+\left(1-\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{9}{2}\right)+\frac{1}{15}\right].$$

3.159 (*). Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}+1\right)+\left(\frac{3}{4}-2\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}-2\right)\cdot\frac{4}{11}+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+$$
$$-\left[\frac{1}{9}-\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{9}{4}+1+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{3}:\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{1}{3}\right)\right]+\left(\frac{7}{6}-1\right)^2.$$

3.160 (*)**.** Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left[-\left(-\frac{1}{5}\right)^2:\left(\frac{3}{5}-1\right)^{-2}\right]\cdot\left(-1-\frac{1}{5}\right)^{-2}\cdot\left(-2\right)^{-2}\cdot 30^2+$$
$$-\left\{-\left[\left(-3-\frac{1}{4}+\frac{13}{4}\right)^2:(-4)^{-2}\right]\right\}.$$

3.161 (*)**.** Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left[-(-1)^3+\left(\frac{2}{3}-1\right)^{-2}\right]\cdot\left(-1-\frac{1}{7}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)^2+$$
$$+\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\left(-1-\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{3}{2}-1\right)^2\right]^{-1}:(-5)^{-2}\right\}^2.$$

3.162 (*)**.** Calcola il valore della seguente espressione.

$$1-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)^2-\left[\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)^3-1+\frac{4}{5}\right]:\left[-\left(\frac{4}{5}\right)^0-\left(\frac{7}{5}-2\right)^2\right]+$$
$$-\frac{3}{2}+\left[\left(-\frac{4}{5}\right)^{-3}\right]^2:\left(-\frac{4}{5}\right)^{-5}.$$

3.163 (*)**.** Calcola il valore della seguente espressione.

$$\frac{\left[\left(\frac{20^4}{2^4}\right)\cdot 3^4\right]^2}{30^6}-\left[\frac{3^4}{\left(\frac{3^5}{3^4}\right)^2}\right]^3.$$

3.164. Calcola il valore dell'espressione $E = A - B$, dove

$$A=\left(\left(\left(-\frac{3}{7}\right)^4:\left(-\frac{7}{3}\right)^{-2}\right)\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right)^{-2},\qquad B=\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{-6}\cdot\left(1-\frac{4}{7}\right)^5\right)^2.$$

3.165 (*)**.** L'età di Paolo è i 5/11 di quella della madre che ha 44 anni. Quanti anni ha Paolo?

3.166 (*)**.** L'età di Marco è 1/2 di quella di Paolo che è 1/3 di quella del padre che ha 54 anni. Quanti anni ha Marco?

3.167 (*)**.** I 2/5 del libro che stiamo leggendo è la parte più noiosa. Le rimanenti 63 pagine sono invece le più avvincenti. Di quantepagine è formato il libro?

3.168 (*)**.** Gli alunni del primo e del secondo anno di una scuola media sono rispettivamente i 3/7 e i 2/7 del totale. Sapendo che gli alunni che frequentano la terza media sono 54, quanti sono tutti gli alunni della scuola?

3.169 (*)**.** Al supermercato ho speso 7/10 della somma di denaro che possedevo; successivamente ho incassato un credito uguale ai 13/20 della somma iniziale e ho speso 2/15 sempre della somma iniziale per un rifornimento di benzina. Sapendo che sono rimasto con 220,50 euro, quale somma di denaro possedevo inizialmente?

3.170 (*)**.** In una fattoria ci sono vitelli, capre e animali da cortile per un totale di 75 capi. I vitelli sono i 2/5 di tutti gli animali, mentre le capre sono i 2/3 degli animali da cortile. Quanti vitelli, capre e animali da cortile ci sono?

3.171 (*). Tre casse pesano complessivamente 220kg; la seconda pesa 1/2 della prima e la terza pesa 1/3 della seconda. Calcola il peso di ciascuna cassa.

3.172 (*). Tre operai devono eseguire un lavoro. Il primo da solo lo farebbe in 12 giorni, il secondo in 18 giorni e il terzo in 36 giorni. Lavorando insieme, in quanti giorni i tre operai potrebbero eseguire tutto il lavoro?

3.173 (*). Un collezionista vende i 3/7 della sua collezione costituita da 385 pezzi. Quanti pezzi gli rimangono?

3.174 (*). In un terreno agricolo sono stati piantati ulivi e mandorli per 266 alberi complessivi. Se gli ulivi sono i 4/10 degli alberi di mandorle, quanti sono gli ulivi e i mandorli

3.175 (*). Il prezzo di copertina di un libro è di 29 euro; quanto verrà pagato con uno sconto del 15%?

3.176 (*). Su 1020 alunni di una scuola, 153 sono stati respinti; qual è la percentuale dei promossi?

3.177 (*). In una classe gli alunni biondi sono il 40% del totale, mentre i restanti sono castani. Tra tutti gli alunni biondi, il 75% sono femmine. Sapendo che nella classe il numero di femmine è uguale al numero dei maschi, qual è la percentuale di maschi castani sul totale degli alunni della classe?[4]

3.178 (*). Al 22 novembre 2012 il prezzo della benzina è dato per il 35% dal costo del prodotto, che è formato a sua volta da diverse voci (petrolio, raffinazione, costi di distribuzione, ecc.); il costo del petrolio costituisce oggi il 24% del costo del prodotto. Sapendo che il primo gennaio 2013 il prezzo del petrolio aumenterà del 10% e gli altri costi rimarranno invariati, di quanto aumenterà il prezzo della benzina in tale data?[5]

3.179 (*). I 4/5 degli alunni di una classe sono stati promossi senza debiti formativi. Sapendo che gli alunni promossi con debito formativo sono 1/6 dei promossi senza debiti,la frazione dei non promossi rispetto all'intera classe è ...[6]

3.180 (*). Se aumentiamo la lunghezza della base di un rettangolo del 30% e quella dell'altezza del 50% l'area aumenta del ...[7]

3.181 (*). La differenza di età fra Marco e Antonio è di 18 anni e l'età di Marco è i 7/4 di quella di Antonio. Quanti anni hanno Marco e Antonio?

3.182. Un oggetto è costituito da una lega di zinco e rame. Il suo peso è di 280g e la percentuale di rame è il 20%. Quanti grammi di zinco contiene?

3.183 (*). Mario va in pizzeria e, nell'attesa di essere servito, conta le persone che vi si trovano: gli uomini sono i 5/9 delle donne, queste superano gli uomini di 8 unità, infine vi sono 17 bambini. Quante persone ci sono in tutto? Quanti sono gli uomini e le donne?

3.184 (*). Gino compra un'auto da € 5 400. Paga i 4/9 in contanti ed il resto in 5 rate. Qual è l'ammontare di ogni rata? A quale frazione corrisponde ogni rata?

3.185 (*). Il serbatoio di una macchina contiene benzina per i 3/4 della sua capacità. Dopo aver consumato i 2/3 della benzina che c'è, si fa un pieno aggiungendone 66 litri. Qual è la capacità del serbatoio?

3.186. Un misurino contiene 1/8 di kg di farina. Quanti misurini di farina sono necessari per riempire un sacchetto di 5kg?

[4]Olimpiadi della Matematica 2012.
[5]Olimpiadi della Matematica 2012.
[6]Olimpiadi della Matematica 1999.
[7]Olimpiadi della Matematica 2000.

3.187 (*). Due gruppi di scavatori scavano una galleria, ciascun gruppo comincia da una delle due parti opposte; se fino a oggi hanno scavato rispettivamente 5/9 e 3/7 dell'intera galleria e restano ancora da scavare 2m, quanto è lunga l'intera galleria?

3.188 (*). L'aria è composta per 39/50 di azoto e per 21/100 di ossigeno, la parte rimanente è composta da gas diversi. Quale frazione di aria occupano tutti gli altri gas?

3.189 (*). Luca ha pagato la tassa scolastica in ritardo, ha pagato € 56,16 compresa la mora del 4% per il ritardo nel pagamento. Quanto avrebbe dovuto pagare senza mora?

3.190. In un'azienda 3/10 degli impiegati sono addetti contabilità. Qual è la percentuale degli addetti contabilità rispetto a tutti gli impiegati azienda?

3.191. A un gruppo di 200 intervistati è stato chiesto quale quotidiano leggono. Le risposte sono state le seguenti:

- 90 leggono "La Repubblica";
- 70 leggono "Il Corriere della sera";
- 30 leggono "La stampa";
- 10 leggono "La gazzetta dello sport".

Trasforma in percentuali i dati ottenuti.

3.192. A un concorso si sono presentati 324 candidati. 22 hanno superato il concorso. Qual è stata la percentuale dei candidati che non hanno superato il concorso?

3.193 (*). Un'auto usata è stata acquistata a € 11 800 in questo modo: il 5% come caparra per la prenotazione, il 20% al momento della consegna e il resto in 12 rate di pari importo. Qual è l'importo della rata?

3.194 (*). Un gestore di un bar acquista i cornetti a € 0,60 e li rivende a € 0,75. Qual è la percentuale di guadagno sul prezzo di acquisto?

3.195. In un supermercato si vende il pomodoro pelato a € 0,60 in confezioni da 250g e a € 1,00 in confezioni da 500g. Qual è la percentuale di sconto che usufruisce chi compra la confezione da mezzo chilo?

3.196 (*). In una piscina contenente 2 800 m^3 di acqua si devono aggiungere 15 litri di cloro. Quanto cloro occorre per 1 000 m^3 di acqua?

3.197 (*). La somma di due segmenti misura 34cm, sapendo che le loro lunghezze sono in proporzione con 3/2, calcola la loro lunghezza.

3.198 (*). Gli angoli interni di un triangolo hanno misure proporzionali ai numeri 1, 3, 5. Ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo misura 180°, calcola le misure degli angoli.

3.199. Un televisore a 16/9 ha la base di 18 pollici. Quanti pollici misura l'altezza?

3.200. Per preparare una torta bisogna mettere 3 parti di zucchero ogni 4 parti di farina. Se si utilizzano 500g di farina, quanto zucchero bisogna utilizzare?

3.201 (*). Un negoziante, durante il periodo di Natale, aumenta tutti i prezzi del 10%. Se il prezzo iniziale di un paio di scarpe era di € 70,00 qual è ora il suo prezzo? Dopo le feste, il negoziante abbassa i i prezzi del 10%. Quanto costano ora le scarpe?

3.202 (*). Al cinema "Pegaso" hanno deciso di aumentare il biglietto del 10%; il numero degli spettatori è calato, però, del 10%. È stato un affare? Spiega perché.

3.203. Anna entra in una cartoleria e compra due penne, di cui una costa il doppio dell'altra; riceve lo sconto 15% sulla penna più costosa e del 40% su quella meno costosa. Qual è lo sconto che riceve complessivamente?

3.204 (*). Pierino oggi ha incrementato il suo capitale del 10%. Se anche domani l'incremento sarà del 10%, quanto sarà l'incremento totale in percentuale?

3.205. Tizio ha perso il 20% dei suoi soldi; quanto dovrà guadagnare, in percentuale, per recuperare?

3.206 (*). Un paio di scarpe scontato del 20% costa € 40. Quanto costava prima dello sconto?

3.207 (*). Per pavimentare una piazza 8 operai impiegano 10 giorni lavorando 8 ore al giorno; quanti giorni impiegherebbero 5 operai se lavorassero 6 ore al giorno?

3.208. Pierino si reca in un negozio di giocattoli, dove ne acquista uno. A Pierino vengono offerti due tipi di sconti, uno del 10% e uno del 35%. In quale ordine converrà ricevere i due sconti? Spiega il motivo.

3.209 (*). Una tariffa telefonica ha un costo di 10 cent al minuto per i primi 5 minuti di conversazione. Per i minuti successivi aumenta del 5%. Dopo 15 minuti di conversazione aumenta del 20% del costo iniziale. Quanto si spende se si effettua una telefonata di 20 minuti?

3.210. Un ingegnere incassa per la realizzazione di un progetto una certa somma. Di essa il 20% deve essere restituita allo stato come IVA e della parte rimanente il 40% deve essere pagata come tasse. Qual è la percentuale della somma che rimane all'ingegnere?

3.211 (*). Nel paese di Vattelapesca il 20% degli abitanti è europeo il restante 80% è asiatico. La lingua inglese è parlata dal 50% degli europei e dal 40% degli asiatici. Se a Vattelapesca np5930 persone parlano inglese, quanti sono gli abitanti di Vattelapesca?

3.212. Un liquido viene filtrato con un primo filtro che toglie il 40% delle impurità. Successivamente viene filtrato con un secondo filtro che toglie il 30% delle impurità. Infine viene filtrato con un terzo filtro che elimina il 50% delle impurità. Quale percentuale complessiva delle impurità è stata eliminata?

3.213. Una prova di ammissione consiste di due test. Solo i 2/3 dei candidati superano il primo test e 1/5 di quelli che hanno superato il primo test superano anche il secondo. Qual è la percentuale di candidati che hanno superato tutti e due i test?

3.214. L'acquisto di un'auto può essere fatto con due tipi di pagamento: pagando l'intero importo di € 23 000 all'acquisto il 1° gennaio 2011; oppure dividendo il pagamento in tre rate annuali da € 8 000, da pagare il 1° gennaio 2011, il 1° gennaio 2012 e il 1° gennaio 2013. Avendo tutto il denaro su un conto corrente bancario a un interesse annuo del 3% quale forma di pagamento è più vantaggiosa? Di quanto?

3.215. Una forte influenza ha colpito il 60% dei bambini di età inferiore o uguale a 10 anni e il 15% delle persone di età maggiore. Se la percentuale di persone che si sono ammalate di questa influenza è stata del 20%, qual è la percentuale di bambini in quella popolazione?

3.216 (*). Una maglietta costava 65 000 lire prima dell'entrata in vigore dell'euro e dopo costava € 40. Di quanto è aumentato in %, il prezzo della maglietta? Si tenga conto che 1 euro valeva 1 936,77 lire.

3.217. Una ragazza, di 46kg, va dal dietologo, che le consiglia di restare entro il 5% del peso attuale. Tra quali valori può oscillare il suo peso?

3.218. Per raccogliere le foglie cadute nel cortile della scuola, Mario impiega 6 ore, Marco 10 ore, Matteo 15 ore. Se i tre si mettessero a lavorare insieme, in quante ore pulirebbero il cortile?

3.219. Una certa bevanda è ottenuta mescolando 1 parte di sciroppo con 5 parti di acqua. Per errore Adolfo ha mescolato 5 parti di sciroppo con 1 di acqua, ottenendo 3 litri di miscuglio. Aggiungendo una opportuna quantità di acqua, Adolfo può ottenere una bevanda in cui sono rispettate le proporzioni stabilite? Quanti litri di acqua deve aggiungere?

3.15.3 Risposte

3.1. 12/40 oppure 3/10.

3.3. 7/11, 4/41.

3.24. k) $0,\overline{2892561983471074380165}$.

3.26. a) 25/2, b) 21/5, c) 25/4, d) 15/4, e) 1/10, f) 5/2.

3.28. a) 5/4, c) −19/9, f) 743/198, g) −19/50, j) 4 111/33 300.

3.45. q) 19/4, r) 23/6, s) −1/4, t) −7/12.

3.72. a) $5 \cdot 10^{-30}$, b) $5{,}4 \cdot 10^{-22}$, c) $3 \cdot 10^{2}$, d) $1{,}2 \cdot 10^{46}$, e) $1{,}3 \cdot 10^{-8}$, f) $8 \cdot 10^{-18}$.

3.77. 270.

3.78. 300.

3.79. 70.

3.89. 44%.

3.90. 480.

3.99. 77%, 4.

3.109. 4%.

3.110. 21kg, 9kg.

3.123. a) $\pm\frac{3}{2}$, b) $\pm\frac{5}{2}$, c) 40, d) $\frac{25}{48}$.

3.124. a) $x = 15; y = 9$, b) $x = \frac{1}{2}; y = \frac{11}{4}$, c) $x = \frac{5}{6}; y = \frac{1}{2}$, d) $x = \frac{1}{7}; y = \frac{1}{4}; z = \frac{3}{28}$.

3.129. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{59}{300}$, d) $\frac{19}{14}$, e) $\frac{4}{3}$, f) $\frac{9}{8}$.

3.130. a) $\frac{11}{30}$, b) $\frac{1}{10}$, c) $\frac{154}{15}$, d) 2, e) $\frac{25}{4}$.

3.131. a) $-\frac{1}{12}$, b) $\frac{13}{60}$, c) $\frac{19}{15}$, d) $\frac{38}{5}$, e) $-\frac{1}{8}$.

3.132. a) $-\frac{2}{11}$, b) $\frac{1}{24}$, c) $\frac{5}{6}$, d) $-\frac{3}{20}$.

3.133. a) $\frac{5}{4}$, b) $-\frac{13}{8}$, c) $\frac{13}{20}$, d) $\frac{1}{8}$.

3.134. a) $-\frac{673}{1\,680}$, b) $\frac{31}{3}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{55}{96}$.

3.135. a) $-\frac{8}{5}$, b) $-\frac{46}{45}$, c) 1, d) $\frac{13}{5}$.

3.136. a) 0, b) $\frac{15}{2}$, c) $-\frac{1}{80}$, d) 0.

3.137. a) $\frac{56}{15}$, b) 0, c) $-\frac{83}{8}$, d) $\frac{11}{10}$.

3.138. a) $\frac{11}{28}$, b) $\frac{15}{14}$, c) $\frac{1}{50}$, d) $-\frac{1}{6}$.

3.139. a) $\frac{5}{6}$, b) 10, c) $\frac{13}{15}$, d) $\frac{11}{6}$.

3.140. a) $\frac{1}{3}$, b) $-\frac{1}{12}$, c) $\frac{139}{40}$, d) 1.

3.141. a) 0, b) $-\frac{5}{12}$, c) 6, d) $\frac{1}{45}$, e) 0.

3.142. a) 2, b) $\frac{11}{6}$, c) $\frac{1}{144}$, d) $-\frac{13}{6}$.

3.143. a) $\frac{1}{6}$, b) $\frac{9}{20}$, c) $\frac{10}{3}$, d) $\frac{1}{3}$.

3.144. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{242}$, c) 1, d) $\frac{1}{4}$, e) 1, f) $\frac{1}{25}$.

3.145. a) $\frac{1}{144}$, b) 540, c) $\frac{77}{50}$, d) $\frac{46}{9}$.

3.146. a) $\frac{44}{3}$, b) $\frac{64}{9}$, c) 400, d) $-\frac{2}{3}$.

3.147. a) $\frac{100}{303}$, b) 10, c) -2, d) -4.

3.148. a) $-\frac{2}{27}$, b) $-\frac{60}{11}$, c) $\frac{8}{81}$.

3.149. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-46}$.

3.150. a) $\frac{1}{20}$, b) 2, c) $-\frac{5}{2}$, d) $\frac{31}{36}$.

3.151. 1.

3.152. a) 2, b) 1, c) $\frac{8}{27}$, d) $\frac{25}{4}$.

3.153. a) $\frac{9}{5}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $\frac{3}{2}$, d) $\frac{35}{19}$.

3.154. a) $-\frac{9}{2}$, b) 1, c) 2, d) $\frac{38}{45}$.

3.155. a) $\frac{40}{37}$, b) $\frac{1}{15}$, c) 7, d) $\frac{1}{3}$.

3.156. a) $\frac{7}{3}$, b) $-\frac{8}{81}$.

3.157. a) 100, b) $-\frac{1}{2}$.

3.158. $-\frac{5}{3}$.

3.159. $\frac{5}{9}$.

3.160. -1.

3.161. $\frac{199}{10}$.

3.162. $-\frac{3}{2}$.

3.163. 171.

3.165. 20.

3.166. 9.

3.167. 105.

3.168. 189.

3.169. 270.

3.170. 30, 18, 27.

3.171. 132, 66, 22.

3.172. 6.

3.173. 220.

3.174. 76, 190.

3.175. € 24,65.

3.176. 85%.

3.177. 40%.

3.178. 0,84%.

3.179. 1/15.

3.180. 95%.

3.181. 42, 24.

3.183. 45, 10, 18.

3.184. € 600, 1/9.

3.185. 88.

3.187. 126.

3.188. 1/100.

3.189. € 54.

3.193. € 737,50.

3.194. 25%.

3.196. 5,36 l.

3.197. 13,6 cm, 20,4 cm.

3.198. 20°, 60°, 100°.

3.201. € 77; € 69,30.

3.202. No, perde l'1% dei ricavi.

3.204. 21%.

3.206. € 50.

3.207. 21 giorni e 2 ore.

3.209. € 2,15.

3.211. 141/9.

3.216. 19,19%.