II Insiemi, Logica e Relazioni

"Stonehenge"
Foto di radical.librarian
http://www.flickr.com/photos/radical_librarian/3564677324

Insiemi 5

5.1 Insiemi ed elementi

In matematica usiamo la parola *insieme* per indicare un raggruppamento, una collezione, una raccolta di oggetti, individui, simboli, numeri, figure che sono detti *elementi* dell'insieme e che sono ben definiti e distinti tra di loro.

La nozione di insieme e quella di elemento di un insieme in matematica sono considerate nozioni primitive, nozioni che si preferisce non definire mediante altre più semplici.

Esempio 5.1. Sono insiemi:

a) l'insieme delle lettere della parola RUOTA;
b) l'insieme delle canzoni che ho ascoltato la settimana scorsa;
c) l'insieme delle città della Puglia con più di 15 000 abitanti;
d) l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano;
e) l'insieme dei numeri 1, 2, 3, 4, 5;
f) l'insieme delle montagne d'Italia più alte di 1 000 metri.

Per poter assegnare un insieme occorre soddisfare le seguenti condizioni:

➡ bisogna poter stabilire con certezza e oggettività se un oggetto è o non è un elemento dell'insieme;
➡ gli elementi di uno stesso insieme devono essere differenti tra loro, cioè un elemento non può essere ripetuto più volte nello stesso insieme.

Non possono essere considerati insiemi:

➡ i film interessanti (non c'è un criterio oggettivo per stabilire se un film è interessante oppure no, uno stesso film può risultare interessante per alcune persone e non interessante per altre);
➡ le ragazze simpatiche di una classe (non possiamo stabilire in maniera oggettiva se una ragazza è simpatica);
➡ le montagne più alte d'Italia (non possiamo dire se una montagna è tra le più alte poiché non è fissata un'altezza limite);
➡ l'insieme delle grandi città d'Europa (non c'è un criterio per stabilire se una città è grande);

✍ *Esercizio proposto:* 5.1

In generale, gli insiemi si indicano con lettere maiuscole $A, B, C, \dots$ e gli elementi con lettere minuscole $a, b, c, \dots$

Se un elemento a sta nell'insieme A si scrive $a \in A$ e si legge "a appartiene ad A". Il simbolo "$\in$" si chiama simbolo di *appartenenza*.

Se un elemento b non sta nell'insieme A si scrive $b \notin A$ e si legge "b non appartiene ad A". Il simbolo "$\notin$" si chiama simbolo di *non appartenenza*.

Il criterio che stabilisce se un elemento appartiene a un insieme si chiama *proprietà caratteristica* dell'insieme.

Un altro modo per definire un insieme, oltre a quello di indicare la sua proprietà caratteristica, è quello di elencare i suoi elementi separati da virgole e racchiusi tra parentesi graffe. Ad esempio: $A = \{a, b, c, d\}$.

Per indicare alcuni insiemi specifici vengono utilizzati simboli particolari:

- $\mathbb{N}$ si utilizza per indicare l'insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;
- $\mathbb{Z}$ si utilizza per indicare i numeri interi relativi: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\}$;
- $\mathbb{Q}$ si utilizza per indicare i numeri razionali: $\mathbb{Q} = \{\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{1}, -\frac{4}{17}, 12{,}34, 8, 0{,}\overline{25}, \ldots\}$.

Esempio 5.2. Indica con il simbolo opportuno quali dei seguenti elementi appartengono o non appartengono all'insieme A dei giorni della settimana: lunedì, martedì, gennaio, giovedì, dicembre, estate.

Gennaio e dicembre sono mesi dell'anno, perciò scriviamo:

$$\text{lunedì} \in A, \quad \text{martedì} \in A, \quad \text{gennaio} \notin A, \quad \text{giovedì} \in A, \quad \text{dicembre} \notin A, \quad \text{estate} \notin A.$$

Consideriamo l'insieme $A = \{r, s, t\}$ e l'insieme B delle consonanti della parola "risate". Possiamo osservare che A e B sono due insiemi costituiti dagli stessi elementi; diremo che sono *insiemi uguali*.

Definizione 5.1. Due insiemi A e B si dicono *uguali* se sono formati dagli stessi elementi, anche se disposti in ordine diverso. In simboli si scrive $A = B$. Altrimenti i due insiemi si dicono *diversi*, in simboli $A \neq B$.

✍ *Esercizi proposti:* 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8

5.2 Insieme vuoto, insieme universo, cardinalità

Consideriamo l'insieme $A = \{\text{consonanti della parola "AIA"}\}$. Poiché la parola "AIA" non contiene consonanti, l'insieme A è privo di elementi.

Definizione 5.2. Un insieme privo di elementi si chiama *insieme vuoto* e lo si indica con il simbolo $\emptyset$ o $\{\}$.

❑ **Osservazione** $\{\} = \emptyset$ ma $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ dato che la scrittura $\{\emptyset\}$ rappresenta un insieme che ha come unico elemento l'insieme vuoto, quindi non è vuoto.

Esempio 5.3. Alcuni insiemi vuoti.

a) L'insieme dei numeri negativi maggiori di 5 è vuoto;

b) l'insieme delle capitali europee con meno di 50 abitanti è vuoto;

c) l'insieme dei numeri naturali minori di 0 è vuoto.

La frase «l'insieme degli studenti che vengono a scuola con il motorino» non definisce un insieme particolare. Occorre definire il contesto, l'ambiente che fa individuare gli elementi dell'insieme. Se l'ambiente è la classe 1ªC gli elementi considerati saranno certamente diversi, e probabilmente meno numerosi, di quelli che compongono l'ambiente di un'intera scuola o di un'intera città. Quando si identifica un insieme, occorre indicare anche l'ambiente di riferimento da cui trarre gli elementi che appartengono al nostro insieme. Questo insieme si chiama *insieme universo* e rappresenta il contesto, l'ambiente su cui faremo le nostre osservazioni. In generale l'insieme universo per un insieme A è semplicemente un insieme che contiene A. Solitamente l'insieme universo viene indicato con U.

5.2.1 Cardinalità

Definizione 5.3. Si definisce *cardinalità* (o *potenza*) di un insieme finito il numero degli elementi dell'insieme. Essa viene indicata con uno dei seguenti simboli $|A|$, $\#(A)$ o $\text{card}(A)$.

Per poter parlare di cardinalità di un insieme qualsiasi, che comprenda anche insiemi infiniti come gli insiemi numerici, occorre una definizione più complessa che qui non daremo.

Esempio 5.4. Esempi di cardinalità.

a) L'insieme A delle vocali dell'alfabeto italiano ha 5 elementi, quindi $\text{card}(A) = 5$;
b) l'insieme B dei multipli di 3 minori di 10 ha 3 elementi, quindi $\text{card}(B) = 3$.

✍ *Esercizi proposti:* 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14

5.3 Rappresentazione degli insiemi

Esistono diversi modi per rappresentare un insieme e quindi per indicare con precisione i suoi elementi.

5.3.1 Rappresentazione tabulare

La rappresentazione tabulare è la descrizione più elementare di un insieme; consiste nell'elencare tutti gli elementi dell'insieme separati da virgole e racchiusi tra le parentesi graffe.

Per esempio, definiamo un insieme X con la scrittura: $X = \{1, 2, 3, 5\}$. Non è importante l'ordine in cui vengono scritti gli elementi, cioè

$$X = \{1, 2, 3, 5\} = \{2, 1, 5, 3\}.$$

È invece necessario che ogni elemento dell'insieme compaia una sola volta. Ad esempio, per rappresentare l'insieme Y delle lettere della parola "autunno", scriviamo

$$Y = \{a, u, t, n, o\}.$$

Si può utilizzare questa rappresentazione anche per insiemi numerosi e addirittura infiniti. In questi casi si elencano i primi elementi dell'insieme e in fondo all'elenco si mettono tre punti di sospensione lasciando intendere come continuare la serie.

Per esempio, l'insieme dei multipli di 3 si può indicare con la seguente rappresentazione tabulare:

$$X = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots\}.$$

Esempio 5.5. Rappresentazione degli insiemi:

a) l'insieme G dei primi 3 giorni della settimana si indica: G = {lunedì, martedì, mercoledì};
b) l'insieme A delle lettere della parola "associazione" si indica: $A = \{a, s, o, c, i, z, n, e\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 5.15, 5.16, 5.17, 5.18

5.3.2 Rappresentazione per proprietà caratteristica

Per quegli insiemi i cui elementi soddisfano una certa proprietà che li caratterizza, possiamo usare proprio questa proprietà per descrivere più sinteticamente l'insieme che li contiene.

Per esempio, l'insieme Y dei divisori di 10 può essere definito come:

$$Y = \{x \mid x \text{ è un divisore di } 10\}$$

e si legge "Y è l'insieme degli elementi x tali che x è un divisore di 10".

In questa scrittura si mette in evidenza la caratteristica degli elementi dell'insieme. La rappresentazione tabulare dello stesso insieme è $Y = \{1, 2, 5, 10\}$. L'espressione "tale che", che è stata rappresentata per mezzo del simbolo "|", può essere indicata anche per mezzo del simbolo ":".

La rappresentazione per caratteristica dell'insieme X dei naturali minori di 15 è:

$$X = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 15\}$$

e si legge "X è l'insieme dei numeri naturali x tali che x è minore di 15".

L'insieme che viene indicato nella prima parte della rappresentazione (nell'ultimo esempio è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$) è l'*insieme universo* (sezione 5.2) al quale si fa riferimento. Questo metodo è particolarmente utile quando l'insieme da rappresentare contiene molti elementi.

Esempio 5.6. Esempi di definizioni di insiemi per mezzo della loro proprietà caratteristica:

a) l'insieme A delle rette incidenti a una retta t assegnata si può rappresentare come:

$$A = \{r \mid r \text{ è una retta incidente a } t\}$$

b) l'insieme B dei numeri naturali maggiori di 100 può essere rappresentato come:

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 100\}$$

c) l'insieme P dei numeri pari può essere rappresentato come:

$$P = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2 \cdot m, \text{ con } m \in \mathbb{N}\}$$

d) l'insieme C dei numeri interi relativi compresi tra -10 e $+100$, estremi inclusi:

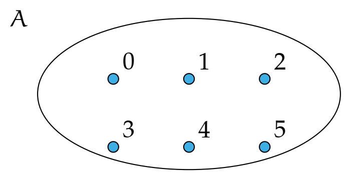
$$C = \{n \in \mathbb{Z} \mid -10 \leqslant n \leqslant 100\}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 5.19, 5.20, 5.21, 5.22, 5.23, 5.24, 5.25, 5.26, 5.27, 5.28, 5.29,5.30, 5.31, 5.32

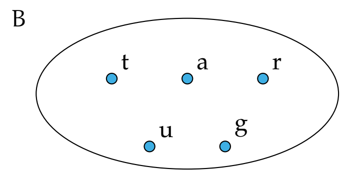
5.3.3 Rappresentazione grafica (Diagramma di Eulero-Venn)

In questa rappresentazione grafica, detta anche *rappresentazione di Eulero-Venn*[1] si disegna una linea chiusa all'interno della quale gli elementi dell'insieme si indicano con dei punti. Solitamente si scrive all'esterno il nome dell'insieme e vicino ad ogni punto il valore ad esso associato.

Esempio 5.7. A è l'insieme dei numeri naturali minori di 6, cioè $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. La sua rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn è la seguente



Esempio 5.8. B è l'insieme delle lettere della parola "TARTARUGA", $B = \{t, a, r, u, g\}$. La sua rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn è la seguente



Un insieme può essere rappresentato con una qualsiasi delle rappresentazioni indicate. Se un insieme è infinito o è costituito da un numero elevato di elementi la rappresentazione più pratica è quella per caratteristica.

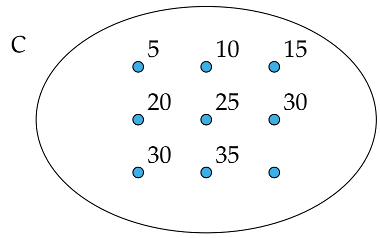
[1] in onore del matematico svizzero Leonhard Euler, noto in Italia come Eulero, (1707 - 1783) e del matematico e statistico inglese John Venn (1834 - 1923).

Esempio 5.9. Rappresentare l'insieme C dei multipli di 5.

Per caratteristica: $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è multiplo di } 5\}$ oppure $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 5 \cdot m, m \in \mathbb{N}\}$

Tabulare: $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \ldots\}$. I puntini di sospensione indicano che l'elenco continua.

Rappresentazione con diagramma di Eulero-Venn:



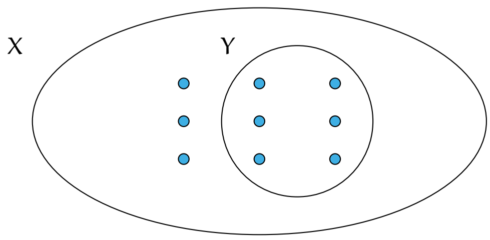
✍ *Esercizi proposti:* 5.33, 5.34, 5.35, 5.36, 5.37, 5.38, 5.39, 5.40

5.4 Sottoinsieme

Consideriamo l'insieme A degli abitanti di Milano e l'insieme B degli abitanti di Milano con età superiore ai 40 anni. Gli abitanti ultra quarantenni di Milano fanno parte della popolazione di Milano, cioè tutti gli elementi dell'insieme B sono anche elementi di A: si dice che B è sottoinsieme di A e si scrive $B \subseteq A$.

Definizione 5.4. Dati due insiemi X e Y, si dice che Y è un *sottoinsieme* di X se ogni elemento di Y è anche elemento di X. In simboli: $Y \subseteq X$, che si legge "Y è incluso in X" o "Y è sottoinsieme di X".

La rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn è la seguente:



Se a è un elemento del sottoinsieme Y, allora lo sarà anche dell'insieme X:

$$\text{se } a \in Y \text{ e } Y \subseteq X, \text{ allora } a \in X \qquad \text{oppure} \qquad a \in Y \text{ e } Y \subseteq X \Rightarrow a \in X.$$

Dalla stessa definizione, si deduce che ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, in simboli $X \subseteq X$.

Nel caso in cui tutti gli elementi di Y siano elementi di X e tutti gli elementi di X siano elementi di Y si ha che $X = Y$, e Y si dice *sottoinsieme improprio* di X. Se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, allora $Y = X$.

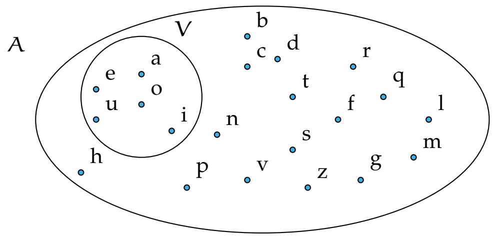
Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto. Cioè, qualunque sia l'insieme X risulta $\emptyset \subseteq X$. Quindi l'insieme vuoto è considerato un sottoinsieme improprio di qualunque insieme.

Se Y è un sottoinsieme non vuoto di X e X ha altri elementi oltre a quelli di Y si dice che Y è un *sottoinsieme proprio* di X e si scrive $Y \subset X$.

La scrittura $Y \subseteq X$ si usa quando non si sa in modo certo se $Y = X$ o meno.

Esempio 5.10. Consideriamo l'insieme $X = \{$lettere della parola "autunno"$\}$ e l'insieme $Y = \{$lettere della parola "notaio"$\}$; possiamo affermare che ogni elemento di Y è anche elemento di X? La risposta è negativa, infatti $i \in Y$ ma $i \notin X$ quindi Y non è sottoinsieme di X e si scrive $Y \not\subset X$.

Esempio 5.11. Sia A l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano e V l'insieme delle vocali, allora si può scrivere $V \subset A$; cioè V è un sottoinsieme proprio di A, come si può anche vedere dalla rappresentazione grafica.



Esempio 5.12. Sia $C = \{1\}$, allora C non ha sottoinsiemi propri; mentre i suoi sottoinsiemi impropri sono $C = \{1\}$ e l'insieme vuoto $\emptyset$.

Esempio 5.13. Sia A l'insieme delle auto esposte in un autosalone e U l'insieme delle auto usate esposte nello stesso autosalone. Si ha che U è un sottoinsieme di A, ma senza avere ulteriori informazioni non possiamo escludere che tutte le auto esposte siano usate, dobbiamo perciò scrivere $U \subseteq A$. Se invece sappiamo che nessuna auto esposta è usata, allora $U = \emptyset$.

✍ *Esercizi proposti:* 5.41, 5.42, 5.43, 5.44, 5.45, 5.46

5.5 Insieme delle parti

Consideriamo l'insieme A dei numeri naturali compresi tra 0 e 100. A partire da questo insieme possiamo formare gruppi costituiti dai soli numeri multipli di 10, dai numeri pari, da quelli dispari, da quelli divisibili per 7 e così via. Quindi con gli elementi dell'insieme A possiamo formare molti altri insiemi che sono sottoinsiemi di A.

Esempio 5.14. Determinare tutti i sottoinsiemi di $A = \{1, 2, 3\}$.

$\emptyset \subseteq A$, infatti l'insieme vuoto è un sottoinsieme improprio di qualunque insieme.

Elenchiamo tutti i sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$. Elenchiamo ora tutti i sottoinsiemi costituiti da due elementi: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$. L'unico sottoinsieme costituito da tre elementi è A stesso, possiamo scrivere: $\{1, 2, 3\} \subseteq A$. In tutto si hanno 8 sottoinsiemi.

Definizione 5.5. Dato un insieme A, si chiama *insieme delle parti* o (*insieme potenza*) di A l'insieme $\wp(A)$ che ha come elementi tutti i sottoinsiemi propri ed impropri di A.

L'insieme delle parti di un insieme A ha sempre come elementi $\emptyset$ e A, quindi $\emptyset \in \wp(A)$ e $A \in \wp(A)$. Il numero degli elementi di $\wp(A)$, cioè dei suoi possibili sottoinsiemi, propri e impropri, dipende dal numero degli elementi di A.

Esempio 5.15. L'insieme vuoto ha come unico sottoinsieme se stesso, quindi $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Esempio 5.16. Dato l'insieme $A = \{a\}$, i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{a\}$; allora $\wp(A) = \{S_1, S_2\}$.

Esempio 5.17. Dato l'insieme $B = \{\text{matita}, \text{penna}\}$ i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = B = \{\text{matita}, \text{penna}\}$, $S_3 = \{\text{matita}\}$, $S_4 = \{\text{penna}\}$; allora $\wp(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$.

Esempio 5.18. Dato l'insieme $B = \{1, 2, 3\}$, i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = B = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{1\}$, $S_4 = \{2\}$, $S_5 = \{3\}$, $S_6 = \{1, 2\}$, $S_7 = \{1, 3\}$, $S_8 = \{2, 3\}$; allora $\wp(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8\}$.

Riassumendo:

- se $A = \emptyset$ l'insieme delle parti ha 1 solo elemento;
- se A ha 1 elemento allora l'insieme delle parti ha 2 elementi;
- se A ha 2 elementi, l'insieme delle parti ne ha 4;
- se A ha 3 elementi, l'insieme delle parti ne ha 8.

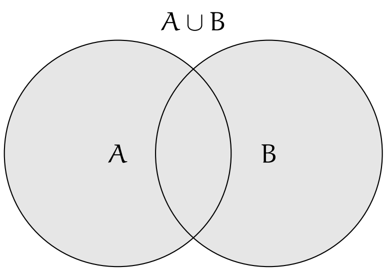
Generalizzando, se A ha n elementi, l'insieme delle parti $\wp(A)$ ne ha 2^n.

✍ *Esercizi proposti:* 5.47, 5.48, 5.49, 5.50, 5.51

5.6 Insieme unione

Prendiamo l'insieme P dei numeri pari e l'insieme D dei numeri dispari; allora l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è dato dall'unione dei due insiemi P e D.

Definizione 5.6. Dati due insiemi A e B, si dice *insieme unione* l'insieme C, composto da tutti gli elementi appartenenti ad A o a B o a entrambi. In simboli: $C = A \cup B$ e si legge "A unito a B" o "A unione B".



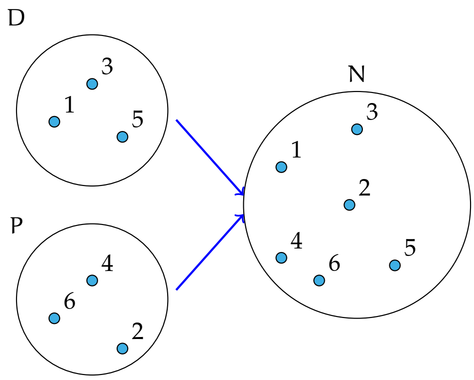
Mediante la proprietà caratteristica si scrive: $C = A \cup B = \{x \mid (x \in A) \text{ o } (x \in B)\}$.

5.6.1 Proprietà dell'unione tra insiemi

a) $A \cup B = B \cup A$: proprietà *commutativa* dell'unione;
b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$: proprietà *associativa* dell'unione;
c) se $B \subset A$, allora $A \cup B = A$;
d) $A \cup \emptyset = A$;
e) $A \cup A = A$: proprietà di *idempotenza* dell'unione;
f) $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

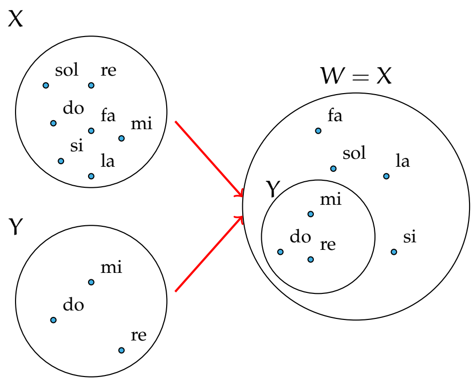
Esempio 5.19. Siano $D = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{2, 4, 6\}$ allora

$$N = P \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$



Esempio 5.20. Siano $X = \{\text{do, re, mi, fa, sol, la, si}\}$ e $Y = \{\text{do, re, mi}\}$, allora, poiché $Y \subset X$,

$$W = X \cup Y = X = \{\text{do, re, mi, fa, sol, la, si}\}.$$



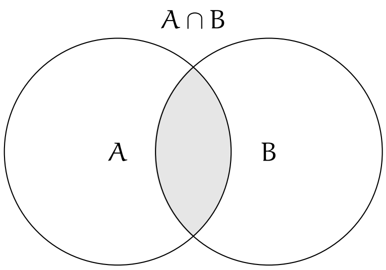
✍ *Esercizi proposti:* 5.52, 5.53, 5.54, 5.55

5.7 Insieme intersezione

Definizione 5.7. Dati due insiemi A e B, si dice *insieme intersezione* di A e B, l'insieme C composto da tutti gli elementi appartenenti contemporaneamente ad A e a B, ossia comuni a entrambi. In simboli: $C = A \cap B$, che si legge "A intersecato a B" o "A intersezione B".

Esempio 5.21. Se A è l'insieme delle lettere della parola "matematica" e B è l'insieme delle lettere della parola "materia". Quali elementi di A stanno in B? Quali elementi di B stanno in A? Quali sono gli elementi che stanno in entrambi gli insiemi?

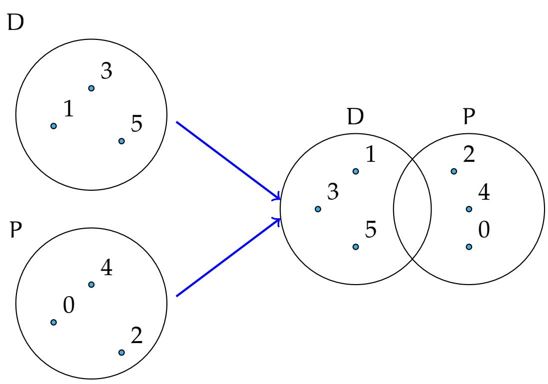
- L'insieme degli elementi di A che stanno in B è $\{m, a, t, e, i\}$;
- l'insieme degli elementi di B che stanno in A è $\{m, a, t, e, i\}$;
- l'insieme degli elementi che stanno sia in A sia in B è $\{m, a, t, e, i\}$.



Mediante proprietà caratteristica si scrive: $C = A \cap B = \{x \mid (x \in A) \text{ e } (x \in B)\}$.

Definizione 5.8. Dati due insiemi A e B, essi si dicono *disgiunti* se non hanno elementi in comune, ossia se la loro intersezione è vuota. In simboli $A \cap B = \emptyset$.

Esempio 5.22. Siano $D = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{2, 4, 6\}$ allora $N = P \cap D = \emptyset$. Gli insiemi P e D sono disgiunti.



5.7.1 Proprietà dell'intersezione tra insiemi

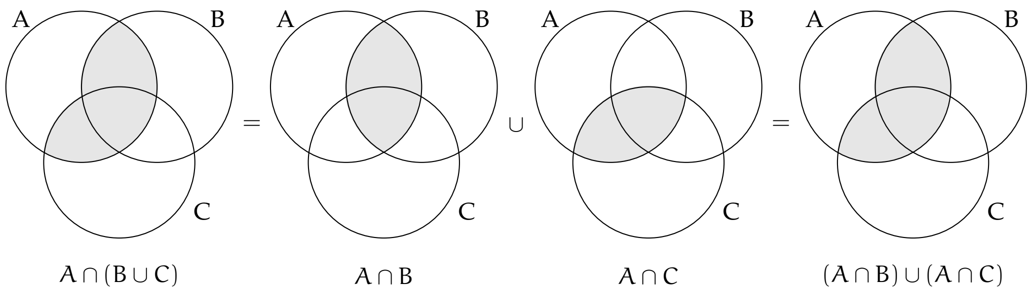
a) $A \cap B = B \cap A$: proprietà *commutativa* dell'intersezione;
b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$: proprietà *associativa* dell'intersezione;
c) Se $B \subset A$, allora $A \cap B = B$;
d) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
e) $A \cap A = A$: proprietà di *idempotenza* dell'intersezione;
f) $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.

Esempio 5.23. Siano $X = \{$do, re, mi. fa, sol, la, si$\}$ e $Y = \{$do, re, mi$\}$. Allora, poiché $Y \subset X$, si ha: $W = X \cap Y = Y = \{$do, re, mi$\}$.

5.7.2 Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione e viceversa

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: proprietà *distributiva dell'intersezione rispetto all'unione*;
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$: proprietà *distributiva dell'unione rispetto all'intersezione*.

Dimostriamo con i diagrammi di Venn la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione.

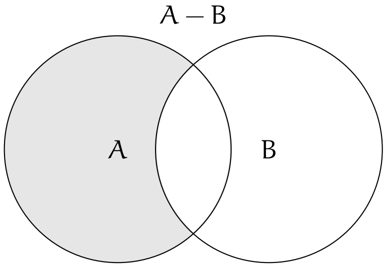


✍ *Esercizi proposti:* 5.56, 5.57, 5.58, 5.59

5.8 Insieme differenza

Consideriamo gli insiemi A e B formati rispettivamente dalle lettere dell'alfabeto italiano e dalle consonanti dell'alfabeto italiano cioè: $A = \{$a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, z$\}$ e $B = \{$b, c, d, f, g, h, l, m, n, p, q, r, s, t, v, z$\}$, le lettere "a, e, i, o, u" che compaiono nell'insieme A ma non in B formano un nuovo insieme chiamato insieme *differenza* tra A e B.

Definizione 5.9. Dati due insiemi A e B, si dice *insieme differenza* tra A e B l'insieme C composto da tutti gli elementi di A che non appartengono a B. In simboli: $C = A - B$ o anche $C = A \setminus B$.



Mediante proprietà caratteristica si scrive: $C = A - B = \{x \mid (x \in A) \text{ e } (x \notin B)\}$.

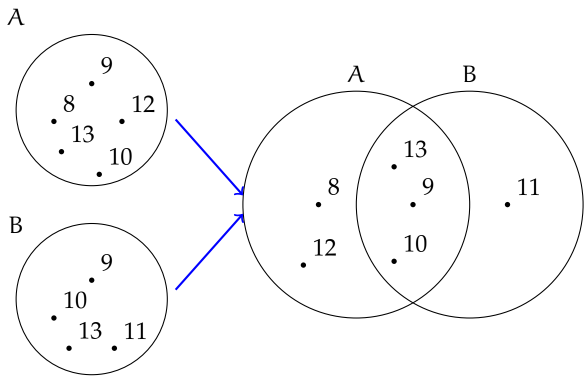
5.8.1 Proprietà della differenza tra insiemi

a) $A - A = \emptyset$;
b) $A - \emptyset = A$;
c) se $A \cap B = \emptyset$, ossia A e B sono disgiunti, allora $A - B = A$, e $B - A = B$;
d) se $B \subset A$, ossia B è sottoinsieme proprio di A, allora $B - A = \emptyset$.

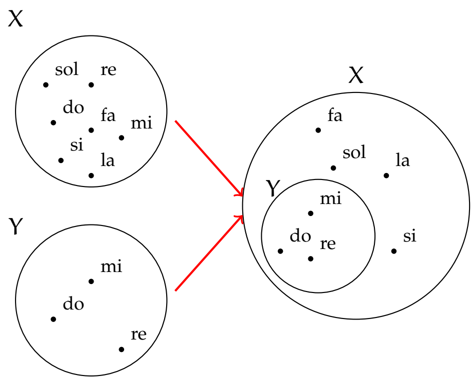
Esempio 5.24. Siano $A = \{8, 9, 10, 12, 13\}$ e $B = \{9, 10, 11, 13\}$, allora $C = A - B = \{8, 12\}$ e $D = B - A = \{11\}$.

Poiché in genere $A - B \neq B - A$, nella differenza tra insiemi non vale la proprietà commutativa.

Esempio 5.25. Siano $D = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{0, 2, 4\}$. I due insiemi sono disgiunti poiché $P \cap D = \emptyset$, quindi $D - P = \{1, 3, 5\} = D$ e $P - D = \{0, 2, 4\} = P$.



Esempio 5.26. Siano $X = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$ e $Y = \{do, re, mi\}$ allora poiché $Y \subset X$, $W = X - Y = \{fa, sol, la, si\}$.



✍ *Esercizi proposti:* 5.60, 5.61, 5.62

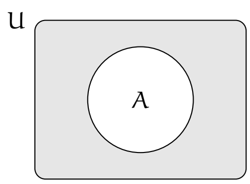
5.9 Insieme complementare

Sia $W = \{$sabato, domenica$\}$ l'insieme dei giorni della settimana che non finiscono per "dì". L'insieme W può essere considerato come sottoinsieme dell'insieme G formato da tutti i giorni della settimana $G = \{$lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì, sabato, domenica$\}$. L'insieme degli elementi di G che non appartengono a W forma un insieme che chiameremo *complementare* di W rispetto a G. L'insieme G invece si dice, in questo caso, insieme *universo*. Ad esempio nella rappresentazione caratteristica $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 100\}$, $\mathbb{N}$ è l'insieme universo di A.

Definizione 5.10. Dato un insieme A, uno dei possibili insiemi che contengono A come sottoinsieme si dice *insieme universo* o *insieme ambiente*.

Definizione 5.11. Dato l'insieme A e scelto U come suo insieme universo, l'insieme degli elementi di U che non appartengono ad A è detto *insieme complementare* di A rispetto a U e si indica con $\overline{A}$ oppure $\overline{A}_U$ o ancora $\complement_U A$.

Il diagramma di Eulero-Venn dell'insieme A e del suo universo U è quello rappresentato in figura. La parte in grigio è il complementare di A rispetto a U, cioè $\overline{A}_U$. Si può osservare che, essendo $A \subseteq U$, il complementare coincide con la differenza tra insiemi: $\overline{A}_U = U - A$.



Esempio 5.27. Insiemi complementari.

a) Il complementare dell'insieme D dei numeri dispari rispetto all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è l'insieme P dei numeri pari: $\overline{D}_{\mathbb{N}} = P$;

b) Il complementare dell'insieme V delle vocali dell'alfabeto italiano rispetto all'insieme A delle lettere dell'alfabeto italiano è l'insieme C delle consonanti: $\overline{V}_U = C$;
c) Dati gli insiemi $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$, poiché $B \subset U$ si può determinare $\overline{B}_U = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leqslant x \leqslant 10\}$.

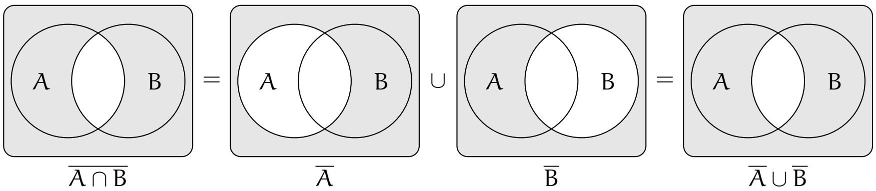
✍ *Esercizi proposti:* 5.63, 5.64, 5.65, 5.66

5.10 Leggi di De Morgan

Dati due insiemi A e B ci sono alcune proprietà, dette *leggi di De Morgan*[2], che semplificano lo svolgimento di alcune operazioni:

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$: *Prima legge di De Morgan*;
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$: *Seconda legge di De Morgan*.

Dimostriamo la prima legge di De Morgan utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn.



✍ *Esercizio proposto:* 5.67

5.11 Partizione di un insieme

Definizione 5.12. Dato un insieme A e alcuni suoi sottoinsiemi $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, si dice che questi costituiscono una *partizione* di A se:

a) sono tutti non vuoti;
b) sono a due a due disgiunti;
c) la loro unione dà l'insieme A.

Esempio 5.28. Partizione di un insieme.

Dato l'insieme C delle carte da gioco napoletane, i sottoinsiemi C_1 delle carte a denari, C_2 delle carte a spade, C_3 delle carte a coppe, C_4 delle carte a bastoni costituiscono una partizione di C.

Infatti nessuno degli insiemi C_1, C_2, C_3, C_4 è vuoto, ciascuno è costituito da 10 elementi. Inoltre i sottoinsiemi sono a due a due disgiunti perché non ci sono carte che appartengono a $C_1 \cap C_2$, $C_1 \cap C_3$, $C_1 \cap C_4$, $C_2 \cap C_3$, $C_2 \cap C_4$, $C_3 \cap C_4$, cioè non ci sono carte che possono appartenere contemporaneamente a due semi distinti. Infine l'unione $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ dà l'insieme delle carte C.

✍ *Esercizi proposti:* 5.68, 5.69, 5.70, 5.71

[2] dal nome del matematico e logico britannico Augustus De Morgan (1806 - 1871).

5.12 Prodotto cartesiano fra insiemi

Supponiamo che la partita di calcio Lecce - Juventus sia terminata 3-2; in questo caso il risultato della partita non rappresenta un insieme di numeri dato che nella rappresentazione di un insieme scrivere $\{3, 2\}$ e $\{2, 3\}$ è la stessa cosa. Infatti, se avessimo scritto 2-3 al posto di 3-2 la partita avrebbe avuto un esito differente. Ci troviamo nel caso di una *coppia ordinata* di numeri.[3]

Definizione 5.13. Un insieme di due elementi a e b presi in un determinato ordine si dice *coppia ordinata*. Se il primo elemento della coppia è a e il secondo è b si scrive: $(a; b)$.

Definizione 5.14. Dati due insiemi A e B non vuoti, l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartiene ad A e il secondo a B, si chiama *prodotto cartesiano* di A per B. In simboli: $A \times B$ che si legge "A per B" oppure "A prodotto cartesiano con B" o ancora "A cartesiano B".

Mediante proprietà caratteristica si scrive: $A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.

Nel caso in cui $B = A$, il prodotto cartesiano diventa $A \times A = A^2 = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in A\}$.

Esempio 5.29. Sia $C = \{x, y, z\}$, il prodotto cartesiano $C \times C$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $C \times C = \{(x; x), (x; y), (x; z), (y; x), (y; y), (y; z), (z; x), (z; y), (z; z)\}$.

5.12.1 Proprietà del prodotto cartesiano tra insiemi

a) $A \times \emptyset = \emptyset$;
b) $\emptyset \times A = \emptyset$;
c) $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$.

Esempio 5.30. Sia $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Il prodotto cartesiano $A \times B$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3)\}$, mentre il prodotto cartesiano $B \times A$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $B \times A = \{(1; a), (2; a), (3; a), (1; b), (2; b), (3; b)\}$. Quindi si può notare che $A \times B \neq B \times A$.

Poiché $A \times B \neq B \times A$ nel prodotto cartesiano non vale la proprietà commutativa.

✍ *Esercizi proposti:* 5.72, 5.73, 5.74, 5.75, 5.76, 5.77

5.12.2 Rappresentazione del prodotto cartesiano tra insiemi

Tabulazione delle coppie ordinate Come fatto nei precedenti esempi, si combina il primo elemento di A con tutti gli elementi di B, il secondo elemento di A con tutti gli elementi di B e cosi via fino ad esaurire tutti gli elementi di A.

$$A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3)\}.$$

[3] si veda anche la sezione 8.5 a pagina 219.

Diagramma a frecce Si rappresentano i due insiemi graficamente con i diagrammi di Eulero-Venn e si tracciano degli archi orientati che escono dagli elementi del primo insieme e raggiungono gli elementi del secondo insieme formando coppie ordinate del prodotto cartesiano.

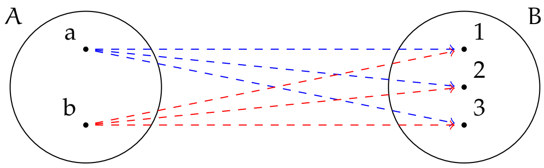


Tabella a doppia entrata Si costruisce una tabella nella quale si riportano gli elementi del primo insieme sulla prima colonna e gli elementi del secondo insieme sulla prima riga. Le caselle di incrocio rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

		B		
		1	2	3
A	a	(a; 1)	(a; 2)	(a; 3)
	b	(b; 1)	(b; 2)	(b; 3)

Diagramma cartesiano Si tracciano due semirette orientate, perpendicolari, una orizzontale e l'altra verticale, con l'origine in comune. Si riportano gli elementi del primo insieme sulla semiretta orizzontale e quelli del secondo su quella verticale. Tali semirette vengono chiamate *assi cartesiani*. Si tracciano prima le parallele all'asse verticale dai punti individuati sull'asse orizzontale che rappresentano gli elementi del primo insieme, poi le parallele all'asse orizzontale dai punti sull'asse verticale; i punti di intersezione rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

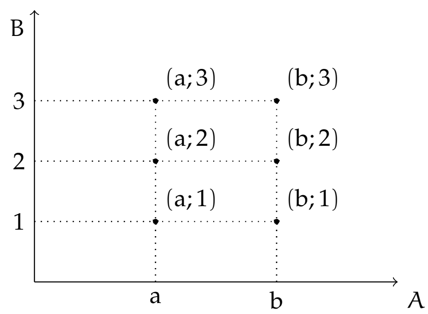
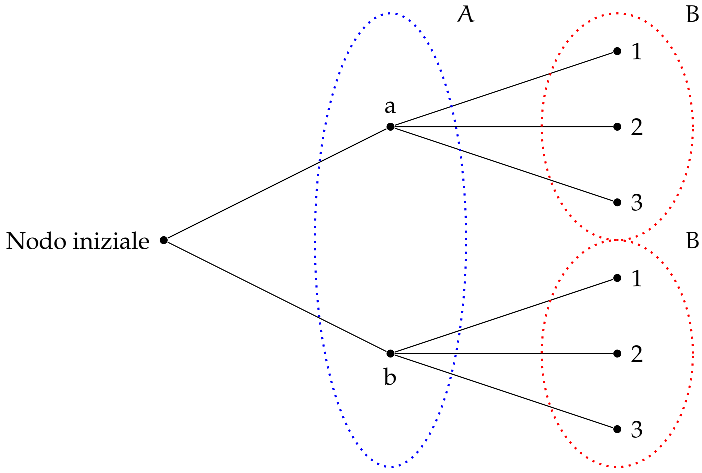
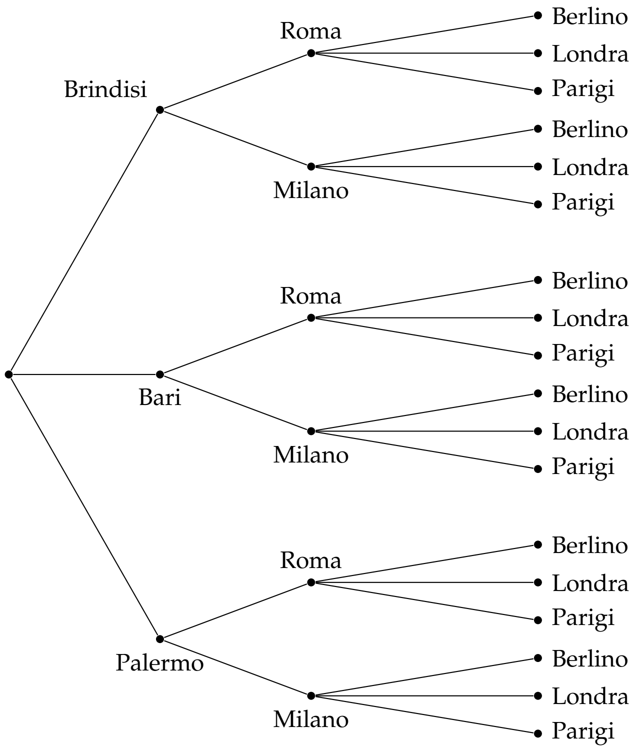


Diagramma ad albero È un grafico formato da un nodo iniziale dal quale si ripartono alcuni rami che a loro volta possono ramificarsi e così via fino a che nello schema figurano tutte le possibili situazioni. Si può raggiungere un particolare nodo solo muovendosi lungo i rami ed il percorso che collega due nodi qualsiasi deve essere unico.

La rappresentazione mediante diagramma ad albero è vantaggiosa nel caso si voglia fare il prodotto cartesiano tra più insiemi.



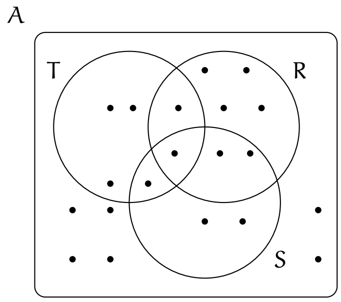
Esempio 5.31. Una compagnia aerea deve organizzare delle rotte per collegare fra loro alcune città effettuando uno scalo in un'altra città. Sia $P = \{\text{Brindisi, Bari, Palermo}\}$ l'insieme delle città di partenza, $S = \{\text{Roma, Milano}\}$ l'insieme delle città di scalo e $A = \{\text{Parigi, Berlino, Londra}\}$ l'insieme delle città di arrivo. Per conoscere tutte le possibili rotte aeree dobbiamo determinare il prodotto cartesiano tra i 3 insiemi $P \times S \times A$. Rappresentiamo $P \times S \times A$ tramite un diagramma ad albero:



5.13 I diagrammi di Eulero-Venn come modello di un problema

Alcune volte, trovandoci di fronte a un problema, possiamo rappresentare la situazione con diagrammi di Eulero-Venn, ciò agevola la comprensione e facilita la risoluzione del problema. Attraverso alcuni esempi mostreremo come usare la teoria degli insiemi per risolvere problemi.

Esempio 5.32. Nel seguente diagramma di Eulero-Venn, l'insieme A rappresenta un gruppo di amici appassionati di ballo; gli insiemi T, R, S rappresentano rispettivamente coloro che ballano il tango, la rumba, il samba; ogni puntino rappresenta uno degli amici.



Quanti sono gli amici appassionati di ballo?

Quanti tra loro ballano:

a) *nessuno* dei balli indicati?
b) *almeno uno* dei balli tango, samba, rumba?
c) *almeno* il samba?
d) *solo* la rumba?
e) la rumba *e* il tango?
f) *tutti* i balli indicati?

Per rispondere alle domande dobbiamo contare gli elementi che formano determinati insiemi.

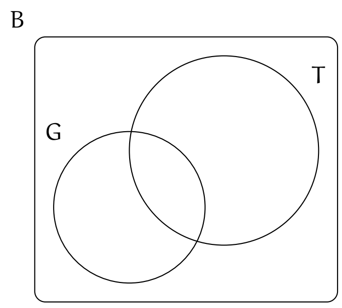
Quanti sono gli amici appassionati di ballo? Per rispondere a questa domanda, contiamo tutti i puntini che compaiono nel disegno. Si ha $\text{card}(A) = 20$.

Rispondiamo ora alle altre domande.

a) Quanti tra loro ballano *nessuno* dei balli indicati? Chi non balla nessuno dei balli indicati sta nell'insieme A, ma in nessuno degli insiemi R, S, T quindi appartiene al complementare di $R \cup S \cup T$ rispetto all'insieme A, dunque $\text{card}(\overline{(R \cup S \cup T)}_A) = 6$.
b) Quanti tra loro ballano *almeno uno* dei balli tra tango, samba, rumba? Chi balla almeno uno di quei balli è rappresentato dagli elementi dell'insieme $R \cup S \cup T$, quindi $\text{card}(R \cup S \cup T) = 14$.
c) Quanti tra loro ballano *almeno* il samba? Gli amici che ballano almeno il samba sono nell'insieme S, quindi $\text{card}(S) = 6$.
d) Quanti tra loro ballano *solo* la rumba? Nell'insieme R sono rappresentati gli amici che ballano almeno il rumba, quindi dobbiamo togliere dall'insieme R gli elementi che stanno in S o in T: $\text{card}(R - (T \cup S)) = 4$.
e) Quanti tra loro ballano la rumba *e* il tango? Quelli che ballano sia la rumba che il tango sono gli elementi dell'insieme intersezione $R \cap T$, quindi $\text{card}(R \cap T) = 2$.
f) Quanti tra loro ballano *tutti* i balli indicati? Quelli che ballano tutti e tre i balli indicati sono elementi dell'insieme intersezione $R \cap S \cap T$, quindi $\text{card}(R \cap S \cap T) = 1$.

Esempio 5.33. A settembre, per la festa delle contrade, a Lainate è arrivato un luna park dove, oltre ad una grande giostra, era stato allestito un tiro a segno con palline di gommapiuma, proprio per i bambini. Alcuni bambini, accompagnati dalla loro maestra si sono recati al luna park: 7 sono stati sulla giostra, 3 sono stati sia sulla giostra che al tiro a segno, 3 si sono divertiti solamente col tiro a segno e altri 2 sono stati a guardare. Quanti bambini sono andati quel giorno al luna park?

Per risolvere il problema rappresentiamo con diagrammi di Eulero-Venn la situazione; indichiamo con B l'insieme dei bambini recatisi al luna park, con G l'insieme di quelli che sono stati sulla giostra e con T l'insieme di quelli che hanno provato il tiro a segno. Dall'enunciato sappiamo che $\text{card}(G) = 7$, $\text{card}(G \cap T) = 3$, $\text{card}(T - G) = 3$ e $\text{card}(B - (G \cup T)) = 2$.



Completa la rappresentazione segnando i bambini con dei puntini e rispondi al quesito.

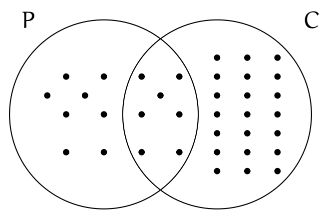
Esempio 5.34. Alla palestra Anni Verdi, il giovedì si tengono due allenamenti di pallavolo e calcio dalle 17.00 alle 18.30. Frequentano il corso di pallavolo 15 persone e sono 28 quelli che frequentano l'allenamento di calcio. Quante persone frequentano pallavolo o calcio in questo orario?

Dati $P = \{\text{iscritti a pallavolo}\}$, $C = \{\text{iscritti a calcio}\}$, $\text{card}(P) = 15$, $\text{card}(C) = 28$.

Obiettivo Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P \cup C$.

Soluzione Osserviamo che non ci sono persone che frequentano sia l'uno che l'altro sport essendo gli allenamenti nello stesso orario; gli insiemi P e C sono disgiunti: $P \cap C = \emptyset$. Quindi: $\text{card}(P \cup C) = \text{card}(P) + \text{card}(C) = 15 + 28 = 43$.

Esempio 5.35. Alla palestra Anni Verdi, il lunedì si tengono allenamenti di pallavolo dalle 17.00 alle 18.30 e dalle 19.00 alle 20.30 gli allenamenti di calcio. Quelli che frequentano la pallavolo sono 15, quelli che frequentano il calcio sono 28, però ce ne sono 7 di loro che fanno entrambi gli allenamenti. Quanti sono gli sportivi che si allenano il lunedì?



Dati $P = \{\text{iscritti a pallavolo}\}$, $C = \{\text{iscritti a calcio}\}$, $\text{card}(P) = 15$, $\text{card}(C) = 28$ e $\text{card}(P \cap C) = 7$.

Obiettivo Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P \cup C$.

Soluzione Poiché gli insiemi P e C non sono disgiunti, si ha $\text{card}(P \cup C) = \text{card}(P) + \text{card}(C) - \text{card}(P \cap C) = 15 + 28 - 7 = 36$.

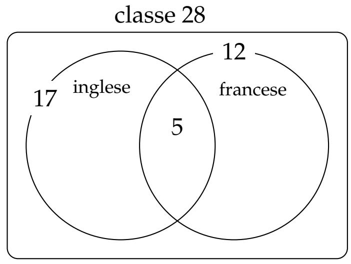
Generalizzando possiamo affermare che, dati due insiemi finiti A e B, la cardinalità dell'insieme $A \cup B$ è data dalla seguente formula:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Esempio 5.36. A scuola si sono aperti i corsi di lingue. Della classe di Piero, che è composta da 28 ragazzi, 17 frequentano il corso di inglese, 12 quello di francese, 5 di loro frequentano sia il corso di inglese che quello di francese. Quanti sono i ragazzi della classe di Piero che non frequentano alcun corso di lingue?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

L'insieme universo è costituito dai 28 ragazzi che compongono la classe. I ragazzi che frequentano almeno un corso non sono $17+12=29$, perché ce ne sono 5 che frequentano entrambi i corsi e così vengono conteggiati due volte. Quindi i ragazzi che frequentano almeno un corso sono $17+12-5=24$. Di conseguenza quelli che non frequentano nessun corso sono $28-24=4$.

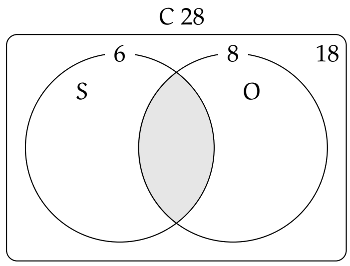


Esempio 5.37. Il professore di matematica di Piero è piuttosto severo; nella sua classe, di 28 alunni, ha messo solo 6 sufficienze allo scritto e solo 8 all'orale. I ragazzi che sono risultati insufficienti sia allo scritto sia all'orale sono stati 18. Quanti sono i ragazzi che hanno avuto una votazione sufficiente sia allo scritto che all'orale?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

C è l'insieme degli alunni della classe di Piero ed è costituito da 28 elementi. S è l'insieme dei ragazzi sufficienti allo scritto costituito da 6 alunni. O è l'insieme dei ragazzi che sono sufficienti all'orale ed è costituito da 8 elementi.

Gli elementi di $\overline{S \cup O}$ sono 18, cioè i ragazzi che non sono sufficienti né allo scritto, né all'orale.



L'insieme $S \cup O$ è quindi costituito da $28-18=10$ elementi.

Ricordiamo che

$$\begin{aligned} &\operatorname{card}(S \cup O) = \operatorname{card}(S) + \operatorname{card}(O) - \operatorname{card}(S \cap O) \\ \Rightarrow &\operatorname{card}(S \cap O) = \operatorname{card}(S) + \operatorname{card}(O) - \operatorname{card}(S \cup O) \\ \Rightarrow &\operatorname{card}(S \cap O) = 6+8-10 = 4. \end{aligned}$$

In conclusione i ragazzi sufficienti allo scritto e all'orale sono 4.

✍ *Esercizi proposti:* 5.78, 5.79, 5.80, 5.81, 5.82, 5.83, 5.84, 5.85, 5.86, 5.87, 5.88, 5.89, 5.90, 5.91

5.14 Esercizi

5.14.1 Esercizi dei singoli paragrafi

5.1 - Insiemi ed elementi

5.1. Barra con una crocetta i raggruppamenti che ritieni siano degli insiemi.

a) I fiumi più lunghi d'Italia;
b) le persone con più di 30 anni;
c) i numeri 1, 20, 39, 43, 52;
d) i libri più pesanti nella tua cartella;
e) i punti di una retta;
f) gli animali con 2 zampe;
g) le vocali dell'alfabeto italiano;
h) i professori bravi;
i) i gatti con due code;
j) i calciatori che hanno fatto pochi gol.

5.2. Considerando l'insieme A delle lettere dell'alfabeto italiano, per ciascuno dei seguenti casi inserisci il simbolo adatto fra "$\in$" e "$\notin$".
b . . . A, i . . . A, j . . . A, e . . . A, w . . . A, z . . . A.

5.3 (*). Le vocali delle parole che seguono formano insiemi uguali, tranne in un caso. Quale?

$\boxed{\text{A}}$ sito $\boxed{\text{B}}$ micio $\boxed{\text{C}}$ zitto $\boxed{\text{D}}$ fiocco $\boxed{\text{E}}$ lecito $\boxed{\text{F}}$ dito.

5.4 (*). Individua tra i seguenti insiemi quelli che sono uguali:

a) vocali della parola "SASSO";
b) consonanti della parola "SASSO";
c) vocali della parola "PIETRA";
d) vocali della parola "PASSO".

5.5. Quali delle seguenti frasi rappresentano criteri oggettivi per individuare un insieme? Spiega perché.

a) Le città che distano meno di 100 km da Lecce; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) i laghi d'Italia; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) le città vicine a Roma; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) i calciatori della Juventus; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) i libri di Mauro; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
f) i professori bassi della tua scuola; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
g) i tuoi compagni di scuola il cui nome inizia per M; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
h) i tuoi compagni di classe che sono gentili; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
i) gli zaini neri della tua classe. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

5.6. Scrivi al posto dei puntini il simbolo mancante tra "$\in$" e "$\notin$".

a) La Polo . . . . . . all'insieme delle automobili Fiat;
b) il cane . . . . . . all'insieme degli animali domestici;
c) la Puglia . . . . . . all'insieme delle regioni italiane;
d) Firenze . . . . . . all'insieme delle città francesi;
e) il numero 10 . . . . . . all'insieme dei numeri naturali;
f) il numero 3 . . . . . . all'insieme dei numeri pari.

5.7. Quali delle seguenti proprietà sono caratteristiche per un insieme?

a) Essere una città italiana il cui nome inizia per W; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) essere un bravo cantante; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) essere un monte delle Alpi; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) essere un ragazzo felice; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) essere un numero naturale grande; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
f) essere un ragazzo nato nel 1985; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
g) essere un alunno della classe 1ªC; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
h) essere una lettera dell'alfabeto inglese; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
i) essere una retta del piano; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
j) essere un libro interessante della biblioteca; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
k) essere un italiano vivente nato nel 1850; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
l) essere un italiano colto. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

5.8. Le stelle dell'universo formano un insieme. Le stelle visibili a occhio nudo formano un insieme? Spiega il tuo punto di vista.

5.2 - Insieme vuoto, insieme universo, cardinalità

5.9. Gli insiemi $G = \{\text{gatti con 6 zampe}\}$ e $P = \{\text{polli con 2 zampe}\}$ sono o non sono vuoti?

5.10 (*). Barra con una croce gli insiemi vuoti.

a) L'insieme dei numeri positivi minori di 0;
b) l'insieme dei numeri negativi minori di 100;
c) l'insieme dei numeri pari minori di 100;
d) l'insieme delle capitali europee della regione Lombardia;
e) l'insieme dei triangoli con quattro angoli;
f) l'insieme delle capitali italiane del Lazio;
g) l'insieme dei punti di intersezione di due rette parallele.

5.11 (*). Quali delle seguenti scritture sono corrette per indicare l'insieme vuoto?

$$\boxed{\text{A}}\ \emptyset \quad \boxed{\text{B}}\ 0 \quad \boxed{\text{C}}\ \{\emptyset\} \quad \boxed{\text{D}}\ \{0\} \quad \boxed{\text{E}}\ \{\ \}.$$

5.12. Quali dei seguenti insiemi sono vuoti? Per gli insiemi non vuoti indica la cardinalità, ossia il numero di elementi che contiene.

a) L'insieme degli uccelli con 6 ali;
b) l'insieme delle lettere della parola "VOLPE";
c) l'insieme dei cani con 5 zampe;
d) l'insieme delle vocali della parola "COCCODRILLO";
e) l'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano;
f) l'insieme degli abitanti della luna;
g) l'insieme dei numeri sulla tastiera del telefonino.

5.13. Scrivi per ciascun insieme un possibile insieme universo.

a) l'insieme dei rettangoli;
b) l'insieme dei multipli di 3;
c) l'insieme dei libri di matematica;
d) l'insieme dei ragazzi promossi.

5.14 (*). Dato l'insieme $A = \{0, 2, 5\}$ determina se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) $0 \in A$;
b) $5 \in A$;
c) $\emptyset \in A$;
d) $A \in A$;
e) $3{,}5 \in A$;
f) $5 \notin A$.

5.3 - Rappresentazione degli insiemi

5.15. Dai una rappresentazione tabulare dei seguenti insiemi

a) delle vocali della parola "ESERCIZI";
b) delle lettere della parola "RIFLETTERE";
c) dei numeri naturali compresi tra 6 e 12, estremi esclusi;
d) dei numeri dispari compresi tra 10 e 20;
e) delle lettere dell'alfabeto italiano;
f) dei numeri naturali minori di 10;
g) dei multipli di 7;
h) delle preposizioni con più di due lettere;
i) dei numeri naturali minori di 6.

5.16 (*). Indica in rappresentazione tabulare i seguenti insiemi.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$;
b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant x < 5\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leqslant x \leqslant 10\}$;
d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x \leqslant 10\}$;
e) $E = \{e \in \mathbb{N} \mid 5 \leqslant e < 10\}$;
f) $F = \{f \in \mathbb{N} \mid f \text{ è multiplo di 3 e } f < 15\}$;
g) $G = \{g \in \mathbb{N} \mid g \text{ è una cifra del numero } 121231\}$;
h) $H = \{h \in \mathbb{N} \mid h = 3n + 1, \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$.

5.17. Elenca per tabulazione gli elementi di $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ è pari}, x \leqslant 10, x \neq 0\}$.

5.18. Elenca per tabulazione gli elementi di $L = \{l \text{ è una lettera della parola MATEMATICA}\}$.

5.19. Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme $D = \{S, T, U, D, I, A, R, E\}$.

$$D = \{x \mid x \text{ è } \ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

5.20. Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}.$$

$$X = \{x \in \mathbb{N} \mid \ldots x \ldots\}$$

5.21. Descrivi mediante la proprietà caratteristica l'insieme dei numeri primi minori di 1 000.

5.22. Elenca gli elementi dell'insieme $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è divisore di } 12\}$.

5.23. Elenca gli elementi dell'insieme $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è multiplo di 3 minore di 20}\}$.

5.24 (*). Dato l'insieme $A = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ quale delle seguenti proprietà caratterizzano i suoi elementi?

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è numero pari minore di 65}\}$;
b) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è una potenza di 2}\}$;
c) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è una potenza di 2 minore di 65}\}$;
d) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2^m, \text{con } m = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

5.25 (*). Quale delle seguenti frasi indica la proprietà caratteristica di $A = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, \ldots\}$

$\boxed{\text{A}}$ I multipli di 2; $\boxed{\text{B}}$ i numeri pari; $\boxed{\text{C}}$ i multipli di 4; $\boxed{\text{D}}$ i divisori di 20.

5.26. Rappresenta in forma caratteristica i seguenti insiemi.

a) $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
b) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 98, 99, 100\}$;
c) $C = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$;
d) $D = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$;
e) $E = \{4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$.

5.27 (*). Quale delle seguenti è una rappresentazione per caratteristica dell'insieme

$$D = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}.$$

a) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 18\}$;
b) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è multiplo di 3 e } x < 20\}$;
c) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3x\}$;
d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3\}$.

5.28 (*). Individua una proprietà caratteristica dei seguenti insiemi numerici.

a) $A = \{4, 9, 16, 25, \ldots\}$;
b) $B = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots\right\}$;
c) $C = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots\right\}$;
d) $D = \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \ldots\right\}$;
e) $E = \left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \frac{5}{36}, \ldots\right\}$;
f) $F = \{+1, -2, +4, -8, +16, -32, +64, \ldots\}$.

5.29. Rappresenta in forma caratteristica i seguenti insiemi.

a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$;
b) $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots\}$;
c) $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$;
d) $D = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5\}$;
e) $E = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$;

5.30. Scrivi i primi dieci elementi dei seguenti insiemi.

a) $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$;

b) $B = \{x \mid x = n^2, n \in \mathbb{N}\}$;

c) $C = \{x \mid x = 2n^2, n \in \mathbb{N}\}$;

d) $D = \{x \mid x = 2n + 2, n \in \mathbb{N}\}$;

e) $E = \{x \mid x = n^2 - n, n \in \mathbb{N}\}$;

f) $E = \{x \mid x = \dfrac{n+1}{n-1}, x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

5.31. Elenca gli elementi dei seguenti insiemi.

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leqslant x < 2\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid -4 \leqslant x \leqslant 1 \text{ o } 5 < x \leqslant 7\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leqslant 10\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}$.

5.32. Per ciascuno dei seguenti insiemi indica alcuni elementi.

a) $X = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 1 \text{ è pari}\}$ . . . .

b) $Y = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 3n, \text{con } n \in \mathbb{N}\}$ . . . .

c) $Z = \{z \in \mathbb{N} \mid z = 3n \text{ e } z \text{ non è divisibile per } 2, n \in \mathbb{N}\}$ . . . .

d) $W = \{w \in \mathbb{N} \mid w < 0\}$ . . . .

5.33. Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme:

a) dei multipli di 3 compresi tra 10 e 30, estremi inclusi;

b) delle note musicali;

c) dei numeri primi minori di 20;

d) delle consonanti della parola "MATEMATICA";

e) delle province della Toscana.

5.34. Rappresenta i seguenti insiemi con rappresentazione tabulare, caratteristica e grafica.

a) Insieme A dei divisori di 30;

b) insieme B dei numeri pari minori o uguali a 10;

c) l'insieme C delle province della Puglia;

d) l'insieme D delle lettere della parola "COCCO".

5.35. Rappresenta nel modo che ritieni più opportuno gli insiemi i cui elementi sono:

a) i numeri naturali multipli di 5 compresi tra 10 e 10 000;

b) i colori dell'arcobaleno;

c) i numeri razionali maggiori o uguali a 2/7;

d) i punti di una superficie S;

e) le lettere di cui è composto il tuo nome.

5.36. Rappresenta con una modalità a tua scelta l'insieme dei numeri interi multipli di 5 maggiori di 10 e minori di 100 che non sono dispari.

5.37 (*). Dati gli insiemi: $X = \{8, 9, 10\}$, $Y = \{0, 8, 9, 10\}$, $H = \{10, 9, 8\}$, $W = \{w \in \mathbb{N} \mid 8 \leqslant w \leqslant 10\}$, $Z = \{z \in \mathbb{N} \mid 8 < z \leqslant 10\}$ e $J = \{j \in \mathbb{N} \mid 7 < j < 11\}$, individua le uguaglianze corrette.

a) $X = Y$;
b) $X = H$;
c) $W = H$;
d) $X = Z$;
e) $\text{card}(Z) = 2$;
f) $X = J$.

5.38 (*). Dati gli insiemi: $A = \{g, a, t, o\}$, $B = \{o, g, t, a\}$, $C = \{c \mid c$ è una lettera della parola "gatto"$\}$, $D = \{g, t\}$, $E = \{gatto\}$, $F = \{f \mid f$ è una consonante della parola "gatto"$\}$, segna con una crocetta le uguaglianze corrette:

a) $A = B$;
b) $A = D$;
c) $A = C$;
d) $E = A$;
e) $C = E$;
f) $D = F$;
g) $C = D$:
h) $D = E$.

5.39 (*). Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

a) $A = \{1 + 3, 5 - 2, 1 + 1, 9 - 8, 1 - 1\}$;
b) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$;
c) $C = \{6 - 4, 6 + 4, 6 - 6\}$.

5.40 (*). Quali dei seguenti insiemi sono uguali?

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant x \leqslant 12\}$;
b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3 \cdot n, \text{ con } 1 \leqslant n \leqslant 4\}$;
c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 13\}$;
d) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3^n, \text{ con } n = 1, 2, 3, 4\}$.

5.4 - Sottoinsieme

5.41 (*). Siano $T = \{t \mid t$ è un triangolo$\}$, $R = \{r \mid r$ è un rettangolo$\}$, $E = \{e \mid e$ è un triangolo equilatero$\}$. Quale affermazione è vera?

a) $R \subset T$;
b) $E \subset T$;
c) $E \subset R$;
d) $T \subset E$.

5.42 (*). Siano $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 3 \leqslant x \leqslant 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant 5\}$. Quali affermazione sono vere?

a) $A \subset B$;
b) $A \subset C$;
c) $B \subset C$;
d) $C \subset A$;
e) $B \subset A$;
f) $C \subset B$.

5.43. Dato l'insieme $A = \{0, 1, 5, 6, 9\}$ stabilisci quali dei seguenti sono o meno suoi sottoinsiemi, completando con gli opportuni simboli le scritture a fianco indicate.

a) $B = \{1, 5, 6\}$ $B \ldots A$
b) $C = \{0, 1, 3, 5\}$ $C \ldots A$
c) $D = \{\}$ $D \ldots A$
d) $E = \{0\}$ $E \ldots A$
e) $F = \{5, 6, 7\}$ $F \ldots A$
f) $G = \{6, 0, 1, 5, 9\}$ $G \ldots A$

5.44 (*). Siano dati i seguenti insiemi $C = \{x \mid x$ è una lettera della parola "REMARE"$\}$, $D = \{x \mid x$ è una lettera della parola "VOLARE"$\}$, $E = \{x \mid x$ è una lettera della parola "AMARE"$\}$, indica quali delle seguenti relazioni sono vere:

$\boxed{A}$ $D \subseteq C$ $\boxed{B}$ $D \not\subset E$ $\boxed{C}$ $C = E$ $\boxed{D}$ $E \supseteq C$

5.45 (*). Quali dei seguenti insiemi possono essere sottoinsiemi dell'insieme dei quadrilateri? L'insieme dei:

a) quadrati;
b) rombi;
c) trapezi;
d) triangoli equilateri;
e) cerchi;
f) parallelogrammi.

5.46 (*). In una classe di 30 allievi 16 hanno debito in matematica, 20 in italiano, 10 non hanno avuto nessun debito. Rappresenta la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

a) quanti allievi hanno debito in entrambe le materie;
b) quanti allievi hanno almeno un debito;
c) quanti allievi non hanno debito in italiano;
d) quanti allievi non hanno debito in matematica.

5.5 - Insieme delle parti

5.47 (*). Se $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x < 3\}$ quanti elementi ha $\wp(A)$?

5.48. Considera l'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 5\}$ e $\wp(B)$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere o false?

a) $\{1\} \in \wp(B)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) $\emptyset \subset \wp(B)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) $\{2, 5\} \in \wp(B)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) $\{\emptyset\} \in \wp(B)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) $0 \in \emptyset$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) $\emptyset \subseteq B$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
g) $\{1, 2, 3\} \in \wp(B)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
h) $\{1, 2, 3\} \notin \wp(B)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

5.49. Scrivi l'insieme che ha come insieme delle parti $\{\emptyset, \{8, 10\}, \{8\}, \{10\}\}$.

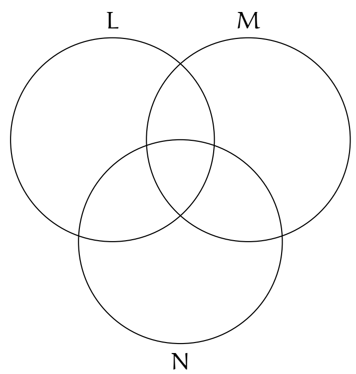
5.50. Dato $H = \{h \mid h$ è una lettera della parola "MAMMA"$\}$ scrivi tutti gli elementi di $\wp(H)$.

5.51. Dato $A = \{x \in \mathbb{N} \mid n < 5$ e n divisore di $12\}$ scrivi tutti gli elementi di $\wp(A)$.

5.6 - Insieme unione

5.52. Dati $A = \{1, 2, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 4, 5, 8\}$ determina la loro unione dopo aver rappresentato gli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn.

5.53. Dati gli insiemi $L = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$, $M = \{4, 5, 6, 7, 10\}$ e $N = \{2, 3, 5, 7, 9, 10\}$ determina l'insieme unione completando prima la rappresentazione grafica poi quella tabulare.



5.54. Dati gli insiemi C delle lettere della parola "GIARDINO" e D delle lettere della parola "ORA", determina la loro unione aiutandoti con la rappresentazione grafica.

5.55. Determina l'unione tra i seguenti insiemi:

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$, $B = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$. $A \cup B = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 7\}$. $A \cup B = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x \leqslant +5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -15 \leqslant x < 3\}$. $A \cup B = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 100\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}$. $A \cup B = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
e) $A = \{l$ è una lettera di "SATURNO"$\}$, $B = \{l$ è una lettera di "NETTUNO"$\}$. $A \cup B = \ldots$

5.7 - Insieme intersezione

5.56. Dati $A = \{1, 2, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 4, 5, 8\}$ determina la loro intersezione dopo aver rappresentato gli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn.

5.57 (*). Dati gli insiemi C delle lettere della parola "LIBRO" e D delle lettere della parola "PASTA" determina la loro intersezione aiutandoti con la rappresentazione grafica.

5.58 (*). Considerando i 3 insiemi $S = \{a, b, c, e, f, s, t\}$, $T = \{a, c, g, h, l, s\}$ e $U = \{b, c, d, g, s, t\}$, determina l'insieme intersezione dando sia la rappresentazione grafica sia quella tabulare.

5.59. Determina l'intersezione tra i seguenti insiemi:

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$, $B = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$; $A \cap B = \ldots$
b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 7\}$; $B \cap A = \ldots$
c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x \leqslant +5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -15 \leqslant x < 3\}$; $A \cap B = \ldots$
d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 100\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}$; $B \cap A = \ldots$
e) $A = \{l$ una lettera di "SATURNO"$\}$, $B = \{l$ una lettera di "NETTUNO"$\}$; $A \cap B = \ldots$
f) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant -4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant 4\}$; $A \cap B = \ldots$

5.8 - Insieme differenza

5.60 (*). Dati gli insiemi $E = \{x \mid x$ è una lettera della parola "cartellone"$\}$ e $F = \{x \mid x$ è una lettera della parola "martello"$\}$, determina $E - F$ e $F - E$.

5.61. Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 3 < x \leqslant 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ calcola le differenze $A - B$ e $B - A$.

5.62. Determina la differenza tra i seguenti insiemi:

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$, $B = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$. $A - B = \ldots$;
b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 7\}$. $B - A = \ldots$;
c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x \leqslant +5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -15 \leqslant x < 3\}$. $A - B = \ldots$;
d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 100\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 < x < 20\}$. $B - A = \ldots$;
e) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \leqslant x \leqslant 100\}$ e $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 10 < y < 100\}$. $A - B = \ldots$
f) $A = \{l$ è una lettera di "SATURNO"$\}$, $B = \{l$ è una lettera di "NETTUNO"$\}$. $A - B = \ldots$

5.9 - Insieme complementare

5.63. Verifica, utilizzando la rappresentazione grafica, che $\overline{A}_U \cup A = U$ e $(A-B)\cup(B-A)\cup(\overline{A\cup B}) = \overline{A\cap B}$.

5.64 (*). Dati E ed F sottoinsiemi di un insieme U, l'insieme definito da $\overline{E\cap F}$ è uguale a:

[A] $E\cup F$ [B] $\overline{E\cup F}$ [C] $E\cap F$ [D] $\overline{E}\cup\overline{F}$

5.65 (*). Dati G ed H sottoinsiemi di un insieme U, l'insieme definito da $\overline{G\cup H}$ è uguale a:

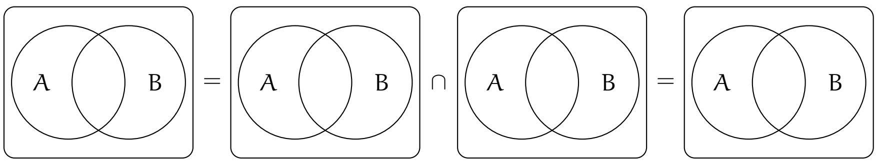
[A] $\overline{G\cap H}$ [B] $\overline{G}\cap\overline{H}$ [C] $\overline{G\cap\overline{H}}$ [D] nessuno dei precedenti

5.66 (*). Dati i seguenti insiemi $A = \{x\in\mathbb{N} \mid x \leqslant 25\}$, $B = \{x\in\mathbb{N} \mid 4 < x \leqslant 9\}$, $C = \{x\in\mathbb{N} \mid x < 25\}$ e $D = \{x\in\mathbb{N} \mid x > 7\}$. Scegli fra i seguenti i loro complementari.

a) $E = \{x\in\mathbb{N} \mid x \geqslant 25\}$;
b) $F = \{x\in\mathbb{N} \mid x \leqslant 6\}$;
c) $G = \{x\in\mathbb{N} \mid x > 25\}$;
d) $H = \{x\in\mathbb{N} \mid x \leqslant 7\}$;
e) $I = \{x\in\mathbb{N} \mid x < 10 \text{ o } x > 4\}$;
f) $L = \{x\in\mathbb{N} \mid x < 4 \text{ o } x \geqslant 10\}$;
g) $M = \{x\in\mathbb{N} \mid x \leqslant 4 \text{ o } x \geqslant 9\}$.

5.10 - Leggi di De Morgan

5.67. Dimostra la seconda legge di De Morgan, annerendo gli spazi opportuni.



$\overline{A\cup B}$ $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{A}\cap\overline{B}$

5.11 - Partizione di un insieme

5.68. Dato $A = \{\text{do, re, mi}\}$ determina l'insieme delle parti $\wp(A)$.

5.69. Determina una partizione dell'insieme L delle lettere dell'alfabeto.

5.70. Fai un esempio di partizione possibile dei libri di una biblioteca.

5.71. Dai un esempio di partizione dell'insieme dei triangoli.

5.12 - Prodotto cartesiano fra insiemi

5.72. Sia $E = \{x\in\mathbb{N} \mid 1 \leqslant x < 3\}$, $F = \{x \mid x \text{ è una vocale della parola "TELEFONO"}\}$ e $G = \{x\in\mathbb{N} \mid x < -6\}$, calcola $E\times F$, $F\times E$, $F\times G$, $G\times E$.

5.73. Quanti sono gli elementi del prodotto cartesiano $A\times B$, dove A ha 6 elementi, B ne ha 3?

5.74 (*). Sapendo che $E\times F = \{(x;x), (x;y), (x;z), (y;x), (y;y), (y;z)\}$, indica gli elementi di E e di F.

5.75 (*). Se $A\times B$ ha 5 elementi, da quanti elementi possono essere costituiti A e B?

5.76. Dati gli insiemi $A = \{3, 5, 6\}$ e $B = \{-2, 1\}$ costruisci il diagramma cartesiano di $A \times B$ ed elencane gli elementi.

5.77. Dato $A = \{0, 1, 2\}$ calcola $A \times A$.

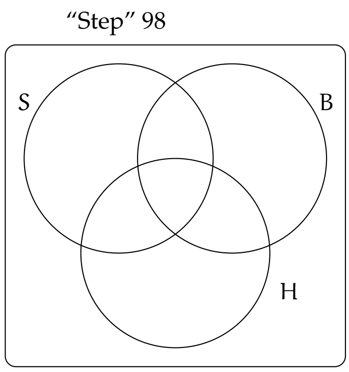
5.13 - I diagrammi di Eulero-Venn come modello di un problema

5.78 (*). La scuola "Step" organizza corsi di Salsa, Hip Hop e Break Dance.

a) Gli iscritti ai corsi sono in tutto 98;
b) 6 frequentano tutti e tre i corsi;
c) 37 frequentano il corso di Salsa;
d) 15 solo i corsi di Salsa e di Hip Hop;
e) 7 solo i corsi Salsa e Break Dance;
f) 9 almeno Hip Hop e Break Dance;
g) 28 Salsa o Break Dance ma non Hip Hop.

Quanti praticano solo Hip Hop?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

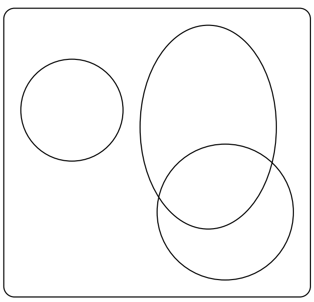


S è l'insieme degli iscritti al corso di Salsa, B l'insieme degli iscritti al corso di Break Dance, H l'insieme degli iscritti al corso di Hip Hop.

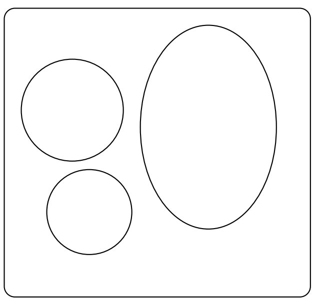
5.79 (*). In una scuola di musica si tengono 4 corsi di cui quello di pianoforte è obbligatorio per tutti i 100 studenti iscritti, mentre quelli di violino, flauto e chitarra sono facoltativi. Per essere ammessi agli esami di fine anno bisogna frequentare almeno un corso oltre a quello di pianoforte. Se gli alunni:

a) che frequentano il corso di flauto sono 25 e non frequentano né quello di violino, né quello di chitarra;
b) iscritti sia al corso di violino sia a quello di chitarra sono 20;
c) che frequentano il corso di violino sono 46;
d) che frequentano solo il corso di violino sono tanti quanti quelli che frequentano solo il corso di chitarra.

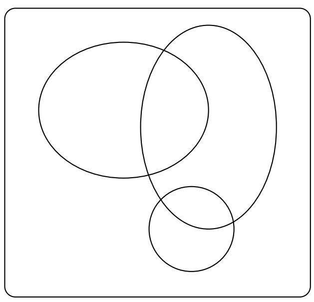
Quanti alunni non possono sostenere l'esame finale? Quale dei seguenti diagrammi di Eulero-Venn può essere preso come modello della situazione?



A



B



C

5.80 (*). Il club "Argento vivo" ha 2 500 iscritti; nel mese di gennaio ha organizzato alcune manifestazioni sportive alle quali hanno partecipato 850 degli iscritti e alcuni tornei di scacchi ai quali hanno partecipato in 780. 320 iscritti al club hanno potuto partecipare, grazie alla perfetta organizzazione, sia alle manifestazioni sportive sia ai tornei di scacchi. Quanti soci del club non hanno partecipato a nessuna delle iniziative e quanti invece hanno partecipato ad almeno una?

5.81 (*). I componenti di una compagnia teatrale sanno almeno cantare, ballare, recitare. Al termine di una rappresentazione si sa che 12 hanno almeno ballato, 8 hanno almeno cantato e 16 hanno almeno recitato. La versatilità dei componenti ha permesso che 5 abbiano almeno ballato e cantato, 3 abbiano almeno cantato e recitato, 8 abbiano almeno ballato e recitato, 2 ballerini hanno ballato, cantato e recitato. Quanti sono i componenti della compagnia?

5.82 (*). Da un'indagine condotta su consumatori adulti è risultato che 605 bevono almeno vino, 582 bevono almeno latte, 348 bevono almeno birra, 140 bevono almeno vino e birra, 85 bevono almeno vino e latte, 56 bevono almeno latte e birra, 25 bevono tutte e tre le bevande mentre 71 non bevono alcuna delle bevande citate.

a) Quante persone bevono una sola bevanda?
b) quante bevono almeno una bevanda?
c) quante sono le persone intervistate?

5.83 (*). In una scuola di lingue sono iscritti 164 studenti; 80 seguono il corso di francese e 120 il corso di tedesco. Quanti studenti seguono entrambi i corsi? Quanti studenti seguono solo il corso di tedesco?

5.84 (*). In un classe di 28 allievi, 18 frequentano il laboratorio di teatro, 22 il laboratorio di fotografia, 3 non frequentano alcun laboratorio. Rappresenta la situazione con un diagramma di Eulero-Venn. Quanti allievi frequentano entrambi i laboratori? Quanti frequentano almeno un laboratorio? Quanti non frequentano il laboratorio di teatro?

5.85 (*). In una pizzeria, domenica sera, erano presenti 140 persone: 50 hanno mangiato pizza e calzone, 20 hanno mangiato solo calzone e 15 non hanno mangiato né pizza né calzone. Il pizzaiolo si chiede se può conoscere in base alle precedenti informazioni, quante pizze ha preparato. Aiutalo a risolvere il suo problema illustrando la situazione con un diagramma di Eulero-Venn, assegnando a ciascun insieme la sua cardinalità.

5.86. In un paese di 3 200 abitanti arrivano due quotidiani: il primo è letto da 850 persone, il secondo da 780. Poiché 320 persone leggono entrambi i quotidiani, quante persone non leggono alcun quotidiano e quante almeno uno?

5.87 (*). [Test di ammissione ad Architettura 2008] Nella classe di Asdrubale ci sono 37 allievi. Tutti si sono iscritti ad almeno una delle due attività extracurriculari (musica e pallavolo). Alla fine 15 fanno musica e 28 fanno pallavolo. Quanti allievi, frequentando entrambe le attività, hanno la necessità di programmare gli orari per evitare sovrapposizioni?

$\boxed{\text{A}}$ 13 $\boxed{\text{B}}$ 9 $\boxed{\text{C}}$ 16 $\boxed{\text{D}}$ 22 $\boxed{\text{E}}$ 6

5.88 (*). [Test di ammissione a Medicina 2008] In un'aula scolastica, durante la ricreazione, 14 studenti stanno seduti, 8 mangiano la pizza. Con questi dati si può concludere con certezza che il numero totale N degli studenti è:

A $N > 14$ B $N < 14$ C $N > 22$ D $N = 22$ E $N \geqslant 14$

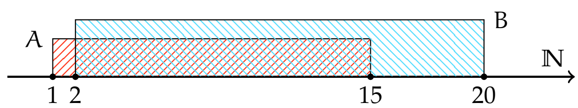
5.89. In una scuola di 150 alunni ci sono 23 studenti che frequentano il corso ECDL, 41 studenti che frequentano solo il corso di Inglese, 3 studenti che frequentano tutti e due i corsi. Quanti sono gli studenti che frequentano solo il corso ECDL? Quanti studenti non frequentano nessuno dei due corsi?

5.90. In un giorno di vacanza, 20 alunni dovrebbero studiare latino e matematica per recuperare le lacune: 8 non studiano latino, 10 studiano matematica e 4 non studiano niente. Quanti alunni studiano entrambe le materie?

5.91. In una classe di 20 alunni si sta organizzando una gita scolastica. Durante l'assemblea gli alunni raccolgono informazioni sulle mete già visitate: 18 hanno visitato Venezia, 14 Roma, 5 Firenze. Solo 3 hanno visitato tutte e tre le città, 5 hanno visitato Firenze e Venezia, 3 solo Venezia. Quanti hanno visitato solo Firenze? Quanti hanno visitato Firenze e Roma? Quanti non hanno visitato nessuna delle tre città? Quanti non hanno visitato Roma?

5.14.2 Esercizi riepilogativi

5.92 (*). Siano $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 15\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant x \leqslant 20\}$.



Quale delle seguenti affermazioni è vera:

A $A \subset B$ B $B \supset A$ C $A = B$ D $B \not\subset A$

5.93. Siano $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari e } (1 \leqslant x \leqslant 20)\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è multiplo di 6 e } 2 \leqslant x \leqslant 18\}$. Quale affermazione è vera?

A $A \subset B$ B $B \supset A$ C $A = B$ D $B \subset A$

5.94. Siano $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant x \leqslant 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant x \leqslant 20\}$. Quali delle seguenti affermazioni è vera:

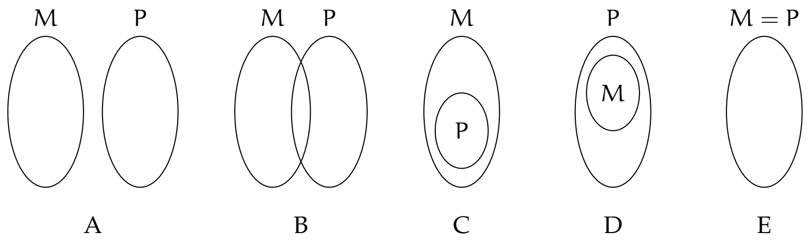
A $A \subset B$ B $B \supset A$ C $A = B$ D $B \not\subset A$

5.95. Individua tutti i possibili sottoinsiemi propri formati da tre elementi dell'insieme $C = \{a, e, i, o, u\}$.

5.96. Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$ scrivi i possibili sottoinsiemi propri e impropri di A.

5.97. Associa a ogni diagramma la corretta rappresentazione grafica (ci può essere più di una risposta corretta).

a) $M \subset P$	A	B	C	D	E
b) $P \supseteq M$	A	B	C	D	E
c) $M \subseteq (M \cup P)$	A	B	C	D	E
d) $M \not\subset P$	A	B	C	D	E
e) $P \subset (P \cup M)$	A	B	C	D	E
f) $M \neq P$	A	B	C	D	E



5.98. Dati $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$, calcola $A \cap B$, $A \cup C$, $(A \cap B) \cup C$, $B \cap C$, $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

5.99. Sia $M = \{l$ una lettera di "MATEMATICA"$\}$, $A = \{l$ una lettera di "ALGEBRA"$\}$, $G = \{l$ una lettera di "GEOMETRIA"$\}$, $I = \{l$ una lettera di "INFORMATICA"$\}$ calcola:

a) $M \cup A$;
b) $A \cup G$;
c) $A \cap I$;
d) $M \cap G$;
e) $M \cup A \cup G \cup I$;
f) $M \cap A \cap G \cap I$;
g) $M \cup (A \cap G)$;
h) $M \cap (G \cup I)$;
i) $M - A$;
j) $A - G$;
k) $I - (A \cup B)$;
l) $(A \cup B) - (M \cap I)$.

5.100. Sia M_3 l'insieme dei multipli 3 e M_4 l'insieme dei multipli di 4, in generale M_n l'insieme dei multipli del numero n.

a) Calcola $M_3 \cap M_4$. Si tratta di $M \ldots$ l'insieme dei multipli di $\ldots$;
b) calcola $M_6 \cap M_4$. Si tratta di $M \ldots$ l'insieme dei multipli di $\ldots$;
c) calcola $M_{60} \cap M_{48} \ldots$;
d) sai dedurre una regola che, dati due numeri naturali m e n calcoli $M_m \cap M_n$? Può accadere che questo insieme sia vuoto?

5.101. Sia D_4 l'insieme dei divisori di 4 e D_6 l'insieme dei divisori di 6, in generale D_n l'insieme dei divisori del numero n.

a) Calcola $D_4 \cap D_6$. Si tratta di $D \ldots$ l'insieme dei divisori di $\ldots$;
b) calcola $D_{60} \cap D_{48} \ldots$;
c) sai dedurre una regola che, dati due numeri naturali m e n, calcoli $D_m \cap D_n$? Può accadere che questo insieme sia vuoto? Qual è il numero minimo di elementi che può contenere?

5.102. Determina l'insieme intersezione $A \cap B$ e l'insieme unione $A \cup B$.

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, 0 < x < \frac{3}{2}\}$ e $B = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, 1 < x < 6\}$;
b) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, -1 < x < 0\}$ e $B = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} < x < 6\}$;
c) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, -5 < x < 10\}$ e $B = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} < x < 6\}$;
d) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, 0 \leqslant x < 10\}$ e $B = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} < x \leqslant 6\}$.
e) $M \cup A \cup G \cup I$;
f) $M \cap A \cap G \cap I$;
g) $M \cup (A \cap G)$;
h) $M \cap (G \cup I)$;
i) $M - A$;
j) $A - G$;
k) $I - (A \cup B)$;
l) $(A \cup B) - (M \cap I)$.

5.103. Dato l'insieme $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 32\}$ e il suo sottoinsieme B dei multipli di 3, determina gli insiemi $A - B$ e $B - A$.

5.104. Dati gli insiemi C e D tali che $C \subset D$ completa le seguenti relazioni aiutandoti con la rappresentazione grafica:

a) $D - C = \ldots$;
b) $D \cap \overline{C} = \ldots$;
c) $\overline{C \cap D} = \ldots$;
d) $C \cup \overline{C} = \ldots$;
e) $C - D = \ldots$;
f) $C \cap \overline{C} = \ldots$

5.105 (*). Quale delle seguenti scritture corrisponde a $\overline{X \cap Y}$:

a) $\overline{X} \cup \overline{Y}$
b) $\overline{X} \cap \overline{Y}$
c) $\overline{X} \cup Y$
d) $X \cup \overline{Y}$

5.106. Esegui le operazioni $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ tra i seguenti insiemi.

a) $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 6, 9\}$;
b) $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$;
c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è lettera di "casa"$\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è lettera di "caserma"$\}$;
d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è pari$\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è dispari$\}$;
e) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è multiplo di $2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è multiplo di $4\}$;
f) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant x \leqslant 8\}$;
g) $A = \emptyset$, $B = \{0\}$.

5.107. Sia $A = \{a$ una lettera di "MATEMATICA"$\}$, $B = \{b$ una lettera di "FILOSOFIA"$\}$, $C = \{c$ una lettera di "GEOMETRIA"$\}$, $D = \{d$ una lettera di "ITALIANO"$\}$ calcola:

a) $A \cap B$;
b) $A \cap C$;
c) $A \cap D$;
d) $A \cap B \cap C \cap D$;
e) $A \cup B \cup C \cap D$;
f) $A \cup (B \cap C)$;
g) $B \cap (A \cup C)$;
h) $A - D$;
i) $D - A$.

5.108. Dati gli insiemi $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, dire se A, B, C sono equipotenti, se i tre insiemi costituiscono una partizione di U e scrivere per elencazione gli insiemi risultanti dalle seguenti operazioni:

a) $A \cap B$;
b) $B \cap C$;
c) $B \cup C$;
d) $A \cup B$;
e) $A \cup B \cup C$;
f) $A \cap B \cap C$.

5.109. Dato $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è multiplo di } 2\}$ determina $\complement_{\mathbb{N}} A$.

5.110. Dato $A = \{I, II, III\}$ e $B = \{a, b\}$ determina $A \times B$.

5.111. Dato $B = \{1, 2, 3\}$ calcola $(B \cup B) \cap B$.

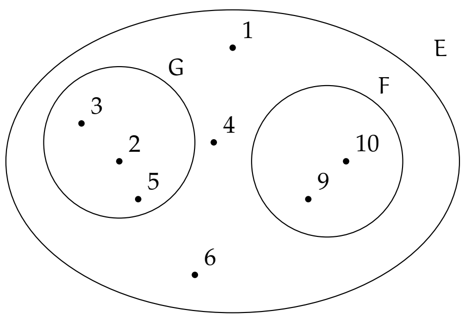
5.112. Dati $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 < x \leqslant 2\}$, calcola $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$, $\complement_A B$, $A \times (A \cap B)$ e $\wp(B - A)$.

5.113. Per ciascuna delle seguenti affermazioni false dai un controesempio.

a) $A \cup B = A$;
b) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$;
c) se x è multiplo di 2 allora è anche multiplo di 4;
d) se card $A = 2$ e card $B = 5$ allora card $A \cup B = 7$;
e) se card $A = 2$ e card $B = 5$ allora card $A \cap B = 2$.

5.114. In base alla figura rispondi alle domande:

a) L'insieme E ha 5 elementi	V	F
b) $2 \in E$	V	F
c) $3 \notin G$	V	F
d) $F \subset G$	V	F
e) $F \subset E$	V	F
f) $\emptyset \subseteq G$	V	F
g) $\text{card}(E) = 8$	V	F
h) $10 \in E$	V	F
i) $F \cap E = F$	V	F
j) $F \cup G = E$	V	F
k) $(E - F) - G = \{1, 4\}$	V	F



5.115. Completa la seguente tabella:

Simbologia	Significato
$A = \{a, b, c, d\}$	A è formato dagli .... a, b, c, d.
$a \in A$	L'elemento a .... all'insieme A.
....	L'elemento f non appartiene all'insieme A.
$B \subset A$	L'insieme B è ...... nell'insieme A, ovvero B è un ...... di A.
....	L'insieme vuoto è un sottoinsieme di A.
....	L'insieme C è l'unione degli insiemi A e B.
$D = A \cap B$	L'insieme D è .... degli insiemi A e B.
$A \cap F = \emptyset$	A e F sono insiemi .... cioè non hanno ....
$L = \complement_A B$	L'insieme L è ....
....	L'insieme M è la differenza tra A e B.

5.116. Rappresenta graficamente l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 25 \text{ e } x \text{ è pari}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 27 \text{ e } x \text{ è multiplo di } 4\}$ e stabilisci se $A \supseteq B$.

5.117. Verifica usando i diagrammi di Eulero-Venn che se $A \subset B$ e $B \subset C$ allora $A \subset C$. Le relazioni valgono anche se il simbolo "$\subset$" viene sostituito con "$\subseteq$"?

5.118. Considerato l'insieme $X = \{a, c, d, t, o\}$ stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) $\{x \mid x \text{ è una vocale della parola "carota"}\} \subset X$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) $\{a, t\} \not\subset \wp(X)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) $\{a, t\} \in \wp(X)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) $0 \in X$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
e) $\emptyset \in \wp(X)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
f) $X \in \wp(X)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

5.119. Se U è l'insieme universo degli italiani, D l'insieme delle donne italiane, L l'insieme degli italiani laureati, S l'insieme degli italiani sposati, cosa rappresentano i seguenti insiemi?

a) $\overline{D}$;
b) $L \cap D$;
c) $\overline{L \cup D \cup S}$;
d) $L - S$;
e) $\overline{L} \cap S$;
f) $\overline{L \cap D \cap S}$.

5.120 (*). Quanti elementi ha $\wp(H)$ sapendo che H ha 7 elementi?

5.121. Scrivi l'insieme che ha per insieme delle parti: $\{\emptyset, \{\text{Mauro}\}, \{\text{Mario}\}, \{\text{Mauro, Mario}\}\}$.

5.122 (*). Se $A \cup B = B$ cosa puoi dire di A e B?

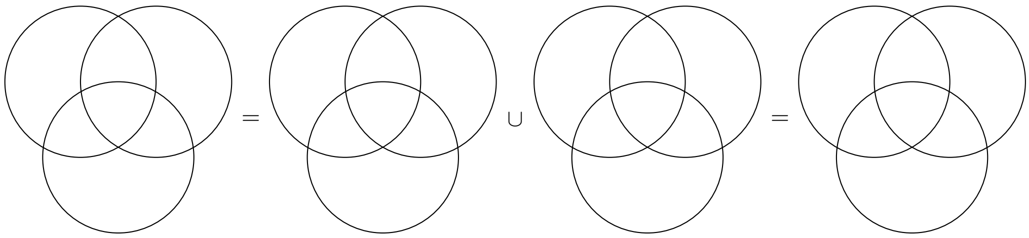
$\boxed{\text{A}}$ $B \subseteq A$ $\boxed{\text{B}}$ $A \notin B$ $\boxed{\text{C}}$ $A \subseteq B$ $\boxed{\text{D}}$ $A \subset B$ $\boxed{\text{E}}$ $A \cap B = \emptyset$

5.123. Dati gli insiemi $A = \{10, 20, 30, 40, 50\}$ e $B = \{20, 30, 50\}$, determina un insieme C tale che ognuna delle seguenti uguaglianze sia vera.

a) $B \cup C = A$;
b) $A \cap C = B$;
c) $C \cup C = B$;
d) $C \cap C = A$.

5.124. Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 10 \text{ e } x \text{ è pari}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 20 \text{ e } x \text{ è divisibile per } 4\}$ e $C = \{1, 2\}$, determina $(A \cap B) \times C$.

5.125. Dimostra la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto l'unione annerendo gli spazi opportuni.

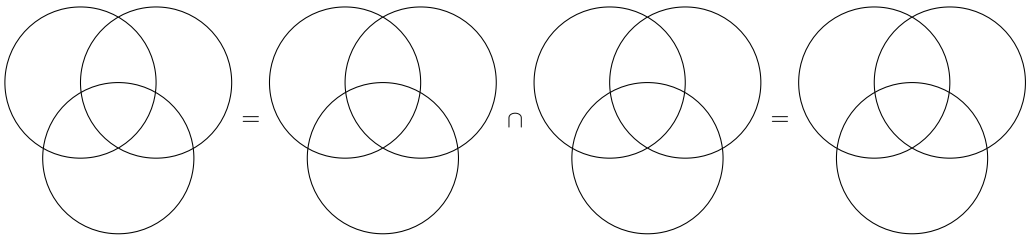


$X \cap (Y \cup Z)$ $\quad$ $X \cap Y$ $\quad$ $X \cap Z$ $\quad$ $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

5.126 (*). Se $E - F = E$ cosa puoi dire di E e F?

$\boxed{A}$ $E \cup F = E$ $\boxed{B}$ $E = F$ $\boxed{C}$ $E \subseteq F$ $\boxed{D}$ $F \subset E$ $\boxed{E}$ $E \cap F = \emptyset$

5.127. Dimostra la proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione annerendo gli spazi opportuni e inserendo le formule opportune.



$\ldots$ $\quad$ $\ldots$ $\quad$ $\ldots$ $\quad$ $\ldots$

5.128 (*). Quali dei seguenti sono sottoinsiemi dei numeri pari? L'insieme dei

$\boxed{A}$ multipli di 4 $\boxed{B}$ multipli di 3 $\boxed{C}$ multipli di 6 $\boxed{D}$ numeri primi

5.129. Dati gli insiemi $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 5 < x \leqslant 16\}$ e $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \geqslant 7\}$ determina:

a) $A \cup B \cup C$; b) $A \cap B \cap C$; c) $(A \cup B) \cap C$; d) $(B \cap C) \cup A$.

5.130. Dati gli insiemi $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, 3 < x \leqslant 10\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 3\}$ e $C = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x \leqslant 5\}$ determina:

a) $A \cup B$;
b) $A \cap C$;
c) $B - A$;
d) $A \cup B \cup C$;
e) $A \cap B \cap C$;
f) $(A \cup B) \cup C$.

5.131. Dati gli insiemi $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x < 10\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, 7 \leqslant x < 20\}$ e $C = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x \geqslant 20\}$ calcola:

a) $B \cup C$;
b) $B \cap C$;
c) $A \cap C$;
d) $C - B$;
e) $\overline{A}$;
f) $\overline{A \cap C}$;
g) $B - C$;
h) $A \cup B$;
i) $A \cap \overline{C}$.

5.132. Dato $A = \{x \mid x$ è un numero naturale, x è pari e $x > 12\}$ determina l'insieme complementare di A.

5.133. Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme che contiene come elemento l'insieme vuoto?

5.134. Dati $A = \{x \mid x$ è divisore di $12\}$, $B = \{x \mid x$ è divisore di $6\}$ e $C = \{x \mid x$ è divisore di $15\}$, determina:

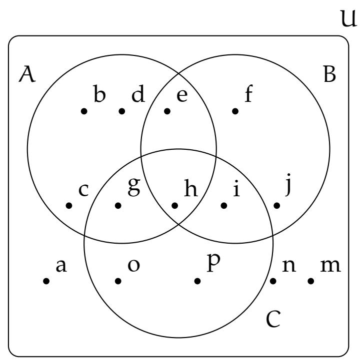
a) $A \cup B$;
b) $A \cup C$;
c) $A \cup B \cup C$;
d) $A \cap B$;
e) $B \cap C$;
f) $A \cap C$;
g) $A \cap B \cap C$;
h) $A \cap (B \cup C)$.

5.135. Dato l'insieme $U = \{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant n \leqslant 5\}$:

a) rappresenta U in forma tabulare;
b) costruisci due sottoinsiemi propri A e B di U tali che $A \cap B = \emptyset$;
c) determina $A \cup B$ e $A - B$, dai il risultato con rappresentazione tabulare e mediante diagrammi di Eulero-Venn.

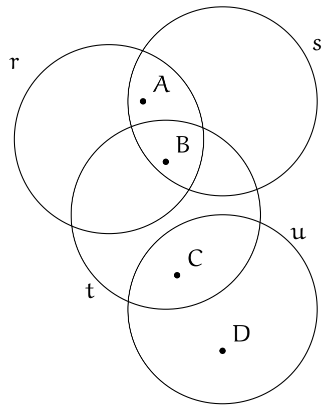
5.136. In base agli insiemi rappresentati con il diagramma di Eulero-Venn nella figura determina gli insiemi richiesti:

a) $A \cup B$;
b) $\overline{A \cup B \cup C}$;
c) $A \cap B$;
d) $B \cap C$;
e) $A \cap B \cap C$;
f) $A \cap (B \cup C)$;
g) $A \cup (B \cap C)$;
h) $B \cap \overline{C}$;
i) $(A \cup B) - C$;
j) $B \cap \overline{C}$
k) $C - (A \cap B)$;
l) $\overline{(A \cup B)} - C$.



5.137. Determina l'insieme $\wp(A)$, insieme delle parti di A, dove A è l'insieme delle lettere della parola "NONNA".

5.138. Nel seguente diagramma di Eulero-Venn gli insiemi r, s, t sono rette, gli elementi A, B, C, D sono punti. Dai una rappresentazione geometrica, individuando le rette che corrispondono alla seguente situazione.



5.14.3 Risposte

5.3. $\boxed{\text{E}}$

5.4. a) = d).

5.10. a), d), e), g).

5.11. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{E}}$

5.14. Vere a) , b).

5.16. b) $\{2,3,4\}$, g) $\{1,2,3\}$.

5.24. d).

5.25. $\boxed{\text{C}}$

5.27. b).

5.28. c) $\left\{\in \mathbb{N} \mid x \geqslant 1 \text{ e } \frac{x+1}{x}\right\}$.

5.37. b), c), e), f).

5.38. a), c), f).

5.39. a) = b).

5.40. a) = c).

5.41. b).

5.42. a), b).

5.44. $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$

5.45. a), b), c), f).

5.46. a) 16, b) 20, c) 10, d) 14.

5.47. 4.

5.57. $\emptyset$.

5.58. $\{c, s\}$.

5.60. $\{c, n\}$; $\{m\}$.

5.64. $\boxed{\text{D}}$

5.65. $\boxed{\text{B}}$

5.66. $\overline{A}$ = c); $\overline{B}$ = e); $\overline{C}$ = a); $\overline{D}$ = d).

5.74. $E = \{x, y\}$; $F = \{x, y, z\}$.

5.75. 1,5; 5,1.

5.78. 46.

5.79. 3; A.

5.80. 1 190; 1 310.

5.81. 22.

5.82. a) 1 048, b) 1 279, c) 1 350.

5.83. 36; 84.

5.84. 15; 25; 10.

5.85. 105.

5.87. $\boxed{\text{E}}$.

5.88. $\boxed{\text{E}}$.

5.92. $\boxed{\text{D}}$.

5.105. c).

5.120. 128.

5.122. $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$

5.126. $\boxed{\text{E}}$

5.128. $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{C}}$

6 Logica di base

6.1 Proposizioni

La logica è una scienza, e un'arte, che si occupa del modo corretto di ragionare, ossia del modo corretto di passare da certe premesse a certe conclusioni. La *logica matematica* è una branca della logica, che utilizza un linguaggio simbolico e un sistema di calcolo di tipo algebrico. Questo tipo di logica, detta anche formale, fornisce uno strumento per formalizzare il linguaggio naturale.

La logica proposizionale considera come unità base dello studio le *proposizioni*.

Assumiamo come primitivo, cioè senza darne una definizione, il concetto di proposizione: chiamiamo *proposizione* una frase (affermativa o negativa) a cui abbia senso associare un valore di verità: vero, V, oppure falso, F (si usano anche i simboli 0 per falso e 1 per vero). Per esempio, sono proposizioni logiche affermazioni del tipo:

a) «Roma è la capitale d'Italia»;
b) «2+3=10»;
c) «5 è un numero dispari»;
d) «Un triangolo ha quattro angoli».

Le frasi a) e c) sono vere mentre le frasi b) e d) sono false. Tutte quante sono pertanto delle proposizioni nel senso della logica matematica. Non sono proposizioni logiche, invece, le frasi:

a) «1 000 è un numero grande»;
b) «Il quadrato è una figura semplice»;
c) «Roma è una bella città»;
d) «Mi piacerebbe essere promosso»;
e) «Studia!».

Queste frasi esprimono affermazioni non valutabili oggettivamente, di esse non si può dire se sono vere o false. Non sono proposizioni logiche le domande, le esclamazioni, i comandi.

Le proposizioni possono essere semplici affermazioni (*proposizioni atomiche*) oppure possono essere ottenute da una o più proposizioni elementari legate tra di loro attraverso connettivi logici (elementi linguistici del tipo "non", "e", "o", "se … allora", "se e solo se"). In questo caso si parla di *proposizioni composte* o molecolari.

Per esempio, la proposizione «un triangolo ha tre lati e tre angoli» è composta dalle proposizioni «un triangolo ha tre lati» e «un triangolo ha tre angoli» unite dal connettivo "e".

La valutazione della verità o falsità di una proposizione composta dipende dalla verità di ogni singola proposizione che la compone e da come esse sono collegate tra di loro.

✍ *Esercizio proposto:* 6.1

6.2 Algebra delle proposizioni

Vediamo ora il calcolo algebrico con le proposizioni. Si usa indicare le proposizioni con lettere minuscole, tipo p, q, r, ...

La *congiunzione* di due proposizioni si ottiene con il connettivo "e" (*et*, *and*, $\wedge$): la proposizione r ottenuta dalla congiunzione delle proposizioni p e q, in simboli si usa scrivere $r = p \wedge q$, è vera se entrambe le proposizioni p e q sono contestualmente vere, mentre è falsa quando anche una sola delle due proposizioni è falsa.

Per esempio, «Ho avuto 7 in italiano e matematica» è un'affermazione vera solo quando ho avuto 7 in entrambe le materie. Oppure, «Per guidare il motorino occorre aver compiuto 14 anni e possedere il patentino» significa che posso guidare il motorino solo se ho entrambi i requisisti: aver compiuto 14 anni e avere il patentino.

Per esprimere in maniera sintetica tutte le possibilità del valore di verità di una proposizione composta, si usa una tabella a doppia entrata, detta *tavola di verità* (tabella 6.1).

La *disgiunzione* (inclusiva) di due proposizioni si ottiene con il connettivo "o" (*vel*, *or*, $\vee$): la proposizione s ottenuta dalla disgiunzione di due proposizioni p e q, in simboli $s = p \vee q$, è vera quando almeno una delle due proposizioni è vera ed è falsa solo se entrambe le proposizioni sono false.

Ad esempio, la proposizione «100 è minore di 1 o maggiore di 10» è vera perché è vera una delle due affermazioni, precisamente 100 è maggiore di 10. Anche nell'affermazione «L'autobus si ferma quando qualche persona deve scendere o salire» la "o" è usata in senso inclusivo.

La *disgiunzione esclusiva* di due proposizioni si ottiene con il connettivo (o congiunzione) "o ... o" (*aut*, *xor*, $\veebar$): la proposizione t ottenuta dalla disgiunzione esclusiva di due proposizioni p e q, in simboli $t = p \veebar q$, è vera quando soltanto una delle due proposizioni è vera ed è invece falsa quando le due proposizioni sono entrambe vere o entrambe false.

Per esempio, nell'affermazione «oggi il Milan vince o pareggia» la congiunzione "o" ha valore esclusivo.

La *negazione*, che si ottiene con il connettivo "non" (*non*, *not*, $\neg$), è un operatore che, a differenza dei precedenti, non lega più proposizioni ma agisce su un'unica proposizione (per questo si dice che è un operatore unario, in analogia all'operazione insiemistica di complementazione). La negazione di una proposizione p è una proposizione che si indica con il simbolo $\neg p$ che risulta vera se p è falsa, viceversa è falsa se p è vera.

La doppia negazione equivale ad un'affermazione, cioè $\neg(\neg p)$ è equivalente a p.

Tabella 6.1: Tavole di verità

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Congiunzione

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disgiunzione

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disgiunzione esclusiva

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

Negazione

Esempio 6.1. Date le seguenti proposizioni p = «un triangolo ha tre lati» (Vera), q = «un triangolo ha tre vertici» (Vera), r = «un triangolo ha quattro angoli» (Falsa), s = «un triangolo ha tre dimensioni» (Falsa), allora:

- $p \wedge q$ è vera, $q \wedge r$ è falsa, $r \wedge s$ è falsa;
- $p \vee q$ è vera, $q \vee r$ è vera, $r \vee s$ è falsa;
- $p \veebar q$ è falsa, $q \veebar r$ è vera, $r \veebar s$ è falsa.

È piuttosto semplice capire il meccanismo della negazione se applicata a proposizioni atomiche, spesso è meno intuitivo il valore di verità della negazione di una proposizione più complessa. Ad esempio, la negazione di $p \wedge q$ non è $\neg p \wedge \neg q$ bensì $\neg p \vee \neg q$, mentre la negazione di $p \vee q$ è $\neg p \wedge \neg q$. Per esempio, «Non è vero che Marco e Luca sono stati bocciati» può voler dire che entrambi non sono stati bocciati o solo uno di loro non è stato bocciato. In formule si hanno le seguenti equivalenze (*leggi di De Morgan*):

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q \qquad \text{e} \qquad \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q.$$

La verifica si può effettuare mediante la seguente tavola di verità. La quinta colonna è infatti l'opposto (negazione) della sesta e anche la settima è l'opposto (negazione) dell'ottava.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	F	V	F	V

Due espressioni logiche si dicono *equivalenti* se hanno gli stessi valori per la relativa colonna della tavola di verità.

Come per le operazioni aritmetiche anche per gli operatori logici è possibile analizzarne le proprietà. Ne indichiamo qualcuna a titolo di esempio:

- $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ proprietà *associativa* della congiunzione;
- $p \wedge q = q \wedge p$ proprietà *commutativa* della congiunzione;
- $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ proprietà *distributiva* della congiunzione rispetto alla disgiunzione.

Una proposizione che è sempre vera, indipendentemente dalla verità degli elementi che la compongono, è detta *tautologia*. Un banale esempio di tautologia è una frase del tipo «Quest'anno la Juve vince il campionato oppure non lo vince». Una proposizione che è sempre falsa, indipendentemente dalla verità dei suoi elementi, è detta *contraddizione*. Un esempio banale di contraddizione è l'affermazione «un numero è multiplo di 2 ed è dispari».

Esempio 6.2. La proposizione $p \wedge \neg p$ è una contraddizione in quanto è sempre falsa. La proposizione $p \vee \neg p$ è una tautologia in quanto è sempre vera.

✍ *Esercizi proposti:* 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9

6.3 Predicati e quantificatori

Una proposizione che fa riferimento a una proprietà o caratteristica di alcuni elementi di un insieme si chiama *predicato* (o *enunciato*). Le frasi formate da un predicato che ha alcuni argomenti incogniti si dicono *enunciati aperti*.

Per esempio, p = «x è un numero intero maggiore di 10» è un enunciato aperto.

Consideriamo ora le seguenti affermazioni:

- «Tutti gli uomini sono mortali» si riferisce a un qualsiasi essere umano;
- «Tutti i multipli di 6 sono anche multipli di 2» è vera per tutti i numeri multipli di 6;
- «Ogni numero negativo è minore di ogni numero positivo».

I predicati precedenti non riguardano un elemento specifico ma una certa quantità di elementi. I termini "tutti" e "ogni", detti *quantificatori universali*, indicano che una proprietà è vera per tutti gli elementi di un certo insieme. In logica matematica si usa il simbolo $\forall$ (che si legge "per ogni") per indicare il quantificatore universale.

Vediamo ora i seguenti predicati:

- «Esiste un numero che elevato al quadrato dà 16»;
- «Alcuni numeri pari sono anche multipli di 3».

Queste affermazioni esprimono proprietà che sono vere per almeno un elemento dell'insieme di riferimento: la prima frase è vera per i numeri $+4$ e -4, la seconda frase è vera per i numeri $6, 12, 18, \ldots$

I termini "c'è almeno", "alcuni", "esiste almeno uno" si dicono *quantificatori esistenziali* e si indicano con il simbolo $\exists$ (che si legge "esiste").

Bisogna prestare particolare attenzione quando si negano frasi in cui compaiono i quantificatori. Per esempio, la negazione di «Tutti i gatti fanno le fusa» non è «Nessun gatto fa le fusa» bensì «Non tutti i gatti fanno le fusa» che si può esprimere anche con il quantificatore esistenziale «C'è almeno un gatto che non fa le fusa». La negazione della frase «L'anno scorso siamo stati tutti promossi» non è «L'anno scorso siamo stati tutti bocciati» ma «L'anno scorso c'è stato almeno uno di noi che non è stato promosso». La negazione della proposizione p = «Tutti i quadrati hanno due diagonali» è la proposizione $\neg\mathrm{p}$ = «Non tutti i quadrati hanno due diagonali». Il linguaggio comune ci potrebbe portare a considerare come negazione di p la proposizione «Nessun quadrato ha due diagonali», ma in realtà per avere la negazione della proposizione p basta che esista almeno un quadrato che non abbia due diagonali.

✍ *Esercizi proposti:* 6.10, 6.11

6.4 L'implicazione

Nel linguaggio matematico sono comuni proposizioni del tipo «Se p allora q». Ad esempio «Se un numero è multiplo di 12 allora è multiplo di 3». La frase precedente può essere espressa dicendo: «Essere multiplo di 12 implica essere multiplo di 3».

In logica frasi del tipo «Se p allora q» vengono tradotte utilizzando l'operatore $\Rightarrow$ detto *implicazione*. La scrittura «se p allora q» si traduce con la scrittura $\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$, che si legge "$\mathrm{p}$ implica q". La proposizione p è detta *antecedente*, (o *ipotesi*) e la proposizione q è detta *conseguente* (o *tesi*). Il significato logico della proposizione $\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$ è «tutte le volte che la proposizione p è vera allora risulta vera anche la proposizione q». Ovvero non si dice niente sula caso in cui p sia falsa. Per esempio, l'affermazione «Se c'è il sole andiamo al mare» è falsa solo quando c'è il sole e non andiamo al mare; l'affermazione, infatti, non dice nulla se il sole non c'è: quindi se non c'è il sole si è liberi di andare o non andare al mare. Anche l'affermazione «Se studi sarai promosso» dice solo che se studi sarai promosso, non dice nulla per il caso in cui tu non studi, in questo caso infatti potrai essere ugualmente promosso. La sua tavola di verità è la seguente:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Uno degli errori logici più comuni è quello di pensare che da $p \Rightarrow q$si possa dedurre $\neg p \Rightarrow \neg q$. Ad esempio dall'affermazione «Se piove prendo l'ombrello» qualcuno può pensare che si possa dedurre «Se non piove non prendo l'ombrello». Riflettendoci, si intuisce che le due frasi non sono affatto consequenziali. Basta pensare che chi pronuncia la prima frase sta affermando soltanto che tutte le volte che piove prende naturalmente l'ombrello, ma non esclude la possibilità di prenderlo anche quando non piove (in effetti è saggio farlo se il cielo è coperto da nuvoloni neri!).

Così la frase (a) «Se x è multiplo di 12 allora è multiplo di 3» non vuol dire (b) «Se x non è multiplo di 12 allora non è multiplo di 3», infatti la (a) è vera, mentre la (b) è falsa (si pensi ad esempio al numero 6 che non è multiplo di 12 ma è comunque multiplo di 3).

Ciò che ragionevolmente si può dedurre da $p \Rightarrow q$ è $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Ad esempio da «Se x è multiplo di 12 allora è multiplo di 3» si può dedurre «Se x non è multiplo di 3 allora non è multiplo di 12».

Data l'implicazione $p \Rightarrow q$ la proposizione p viene detta *condizione sufficiente* per q, mentre la proposizione q viene detta *condizione necessaria* per p. Per esempio, studiare è condizione necessaria per essere promossi ma non è sufficiente. Quest'ultima espressione fa appunto riferimento al fatto che da $p \Rightarrow q$ si può dedurre $\neg q \Rightarrow \neg p$. Ossia q è necessaria per p in quanto se non è vera q non è vera neanche p. Calcoliamo la tavola di verità di $p \Rightarrow q$ e di $\neg q \Rightarrow \neg p$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Come si vede, le due proposizioni hanno gli stessi valori di verità.

In generale, data un'implicazione $p \Rightarrow q$ (*proposizione diretta*):

- l'implicazione $\neg p \Rightarrow \neg q$ si dice *contraria* di $p \Rightarrow q$;
- l'implicazione $q \Rightarrow p$ si dice *inversa* di $p \Rightarrow q$;
- l'implicazione $\neg q \Rightarrow \neg p$ si dice *contronominale* (o *controinversa*) di $p \Rightarrow q$.

La *doppia implicazione*, o *equivalenza logica*, di due proposizioni p e q dà luogo a una proposizione che in simboli si rappresenta $p \Leftrightarrow q$ (leggasi "p se e solo se q") che è vera se p e q sono entrambe vere o entrambe false. La tavola di verità è la seguente:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

L'operatore $\Leftrightarrow$ è detto di doppia implicazione perché se vale $p \Leftrightarrow q$ significa che valgono sia $p \Rightarrow q$ che $q \Rightarrow p$ (e viceversa). Nella tabella precedente, infatti, è stata messa in evidenza l'equivalenza logica tra la proposizione $p \Leftrightarrow q$ e la proposizione $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

L'equivalenza logica è un relazione di equivalenza, infatti verifica le seguenti proprietà:

- $p \Leftrightarrow p$ riflessiva;
- se $p \Leftrightarrow q$ allora vale anche $q \Leftrightarrow p$ simmetrica;
- se $p \Leftrightarrow q$ e $q \Leftrightarrow r$ allora vale anche $p \Leftrightarrow r$ transitiva.

In matematica si usa spesso l'espressione «p è condizione necessaria e sufficiente per q». Per esempio «Condizione necessaria e sufficiente affinché un numero sia divisibile per 3 è che la somma delle sue cifre sia divisibile per 3». Il significato della frase è che «p è sufficiente per q» e inoltre «p è necessario per q». In altre parole significa dire che $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$. Nel caso dell'esempio, «se un numero è divisibile per 3 allora la somma delle sue cifre è divisibile per 3», vale quindi anche l'implicazione inversa «se la somma delle cifre di un numero è divisibile per 3 allora il numero stesso è divisibile per 3».

In maniera analoga a quanto avviene per le espressioni numeriche, le espressioni logiche possono contenere varie proposizioni legate tra loro dagli operatori appena descritti ed eventualmente le parentesi che indicano la precedenza di applicazione degli operatori stessi. In linea di principio gli operatori vengono applicati nell'ordine nel quale si trovano nell'espressione da sinistra verso destra, tenendo però a mente che tra essi vige la seguente regola di precedenza: l'operatore $\neg$ ha la precedenza sugli altri, seguito dall'operatore $\wedge$ ed infine da $\vee$. Da ciò ne deriva un sistema di calcolo simbolico noto anche come algebra di Boole[1].

✍ *Esercizi proposti:* 6.12, 6.13, 6.14, 6.15

6.4.1 I teoremi

Un *teorema* è una proposizione composta del tipo $I \Rightarrow T$, cioè una implicazione tra due proposizioni, dette *ipotesi* (I) e *tesi* (T). Dimostrare un teorema significa fare un ragionamento logico che permetta di concludere che la tesi è vera avendo supposto che l'ipotesi è vera.

In generale incontreremo molti teoremi che vengono denominati genericamente *proposizioni*, perché il nome di "teorema" viene tradizionalmente attribuito solo ai teoremi più importanti. Inoltre si usa chiamare *lemma* una proposizione che non ha una grande importanza di per sé, ma che è particolarmente utile per la dimostrazione di altri teoremi. Si chiama invece *corollario* un teorema che è una conseguenza immediata di un altro teorema.

[1] matematico e logico britannico (1815 - 1864).

All'interno di una teoria matematica non è possibile dimostrare tutte le proposizioni, alcune devono essere assunte come vere senza dimostrarle, esse costituiscono la base della teoria sulle quali si fondano le dimostrazioni dei teoremi. Queste proposizioni si chiamano *postulati* o *assiomi*. Risulta evidente che cambiando sia pure uno solo degli assiomi cambiano anche i teoremi dimostrabili e quindi la teoria.

6.4.2 La deduzione

Nel paragrafo precedente abbiamo parlato in modo generico di implicazione, deduzione, dimostrazione. Facciamo ora un po' di chiarezza sull'uso di questi termini. L'*implicazione* è un'operazione tra proposizioni, mentre la *deduzione* è il ragionamento logico che costituisce la base della dimostrazione di un teorema. Per l'*implicazione materiale* si usa il simbolo $\rightarrow$ mentre per la *deduzione logica* si usa il simbolo $\Rightarrow$.

La frase «Se 5 è un numero pari, allora il triangolo ha 4 lati» è perfettamente valida da un punto di vista della logica matematica ed anzi è vera, poiché la premessa (proposizione antecedente) è falsa, per cui l'implicazione è vera anche se la proposizione conseguente è falsa (si tenga presente la tavola di verità di $p \Rightarrow q$). Si noti però che la definizione di implicazione ha senso solamente se la premessa è vera, il suo ampliamento al caso in cui la premessa è falsa è motivata da ragioni di completezza della trattazione. Bisogna quindi fare attenzione ad usare l'implicazione logica quando la premessa è falsa. Teniamo comunque conto che se p è falsa allora $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)$ cioè $p \Rightarrow (q \wedge \neg q)$ è vera. Ma $q \wedge \neg q$ è una contraddizione, quindi una premessa falsa implica sempre una contraddizione.

In realtà, la dimostrazione di un teorema non è la verifica della validità dell'implicazione, anzi è un procedimento che fa uso della validità dell'implicazione stessa. In un teorema si parte dal supporre vera l'ipotesi e si dimostra, seguendo un ragionamento logico che si basa sugli assiomi e altri teoremi già dimostrati in precedenza, che anche la tesi è vera (questo se si segue il *procedimento diretto*). Se si segue invece il *procedimento indiretto* (o *per assurdo*), si suppone che la tesi sia falsa e, sempre mediante assiomi e altri teoremi già dimostrati, si arriva, tramite passaggi logici, ad affermare che l'ipotesi è falsa (cosa che non si deve accettare).

Le principali regole del corretto ragionamento seguono alcuni schemi particolari (detti *sillogismi*, dal nome ad essi attribuito da Aristotele[2]). Presentiamo qui i quattro principali sillogismi: il *modus ponens*, il *modus tollens*, il *sillogismo disgiuntivo* e il *sillogismo ipotetico*.

	Modus ponens	Modus tollens	Sillogismo disgiuntivo		Sillogismo ipotetico
1^a premessa	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
2^a premessa	p	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q$	$q \Rightarrow r$
conclusione	q	$\neg p$	q	p	$p \Rightarrow r$

Suggeriamo una lettura degli schemi appena esposti:

- *modus ponens*: se sappiamo che p implica q e che p è vera, allora possiamo concludere che anche q è vera (metodo diretto di dimostrazione);
- *modus tollens*: se sappiamo che p implica q e che q è falsa, allora possiamo concludere che anche p è falsa (metodo indiretto di dimostrazione);

[2]filosofo, scienziato e logico della grecia antica (383 o 384 a.C. – 322 a.C.).

- *sillogismo disgiuntivo*: se sappiamo che, tra p e q, almeno una delle due è vera, e sappiamo che p (rispettivamente q) è falsa, allora possiamo concludere che q (rispettivamente p) è vera;

- *sillogismo ipotetico*: se sappiamo che p implica q e che q implica r, allora possiamo concludere che p implica r (proprietà transitiva dell'implicazione).

Altre regole (note come i *giudizi* di Aristotele) fanno uso dei predicati e dei quantificatori. Riprendiamo un esempio precedente traducendo la frase «tutti i quadrati hanno due diagonali» e la sua negazione «non tutti i quadrati hanno due diagonali» in formule che fanno uso anche del linguaggio degli insiemi. Se chiamiamo Q l'insieme di tutti i quadrati e P la proprietà dell'avere due diagonali, se x è il generico quadrato (elemento di Q), $P(x)$ è il predicato «x gode della proprietà P», cioè «x ha due diagonali», la frase «tutti i quadrati hanno due diagonali» si traduce in simboli: $\forall x \in Q, P(x)$.

La sua negazione è: «esiste almeno un quadrato che non ha due diagonali», cioè che non gode della proprietà P, e si traduce in simboli così: $\exists x \in Q, \neg P(x)$. In quest'ultimo caso, la virgola può anche essere sostituita da una barra verticale ("$\mid$") o da ":" e si legge "tale che".

Analogamente, una frase del tipo «esiste almeno un numero naturale che sia divisore di 10» può scriversi come: $\exists n \in \mathbb{N} \mid D(n)$, dove D è la proprietà dell'essere divisore di 10 e $D(n)$ significa che n verifica la proprietà D, cioè che n è un divisore di 10. La sua negazione è «nessun numero naturale è divisore di 10», ovvero «preso un qualsiasi numero naturale n, questo non gode della proprietà D», la traduzione in simboli di tale frase è: $\forall n \in \mathbb{N}, \neg D(n)$.

Mettiamo in tabella le quattro proposizioni, che corrispondono ai giudizi di Aristotele:

A: Giudizio universale affermativo	$\forall x \in Q, P(x)$ P è vera per ogni x	I: Giudizio particolare affermativo	$\exists n \in \mathbb{N} \mid D(n)$ D è vera per almeno un n
E: Giudizio universale negativo	$\forall n \in \mathbb{N}, \neg D(n)$ D è falsa per ogni n	O: Giudizio particolare negativo	$\exists x \in Q \mid \neg P(x)$ P è falsa per almeno un x

Se chiamiamo R l'insieme degli elementi che verificano la proprietà P, e S quello degli elementi che verificano la proprietà D, i quattro giudizi si possono rappresentare graficamente come nella figura 6.1.

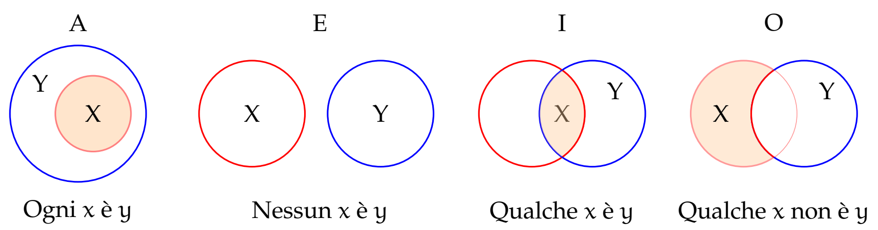


Figura 6.1: Rappresentazione con i diagrammi di Venn dei *giudizi* di Aristotele

6.4.3 La dimostrazione

Tenendo conto di quanto detto precedentemente, dimostrare che $I \Rightarrow T$ significa fare un ragionamento che permetta di concludere che la tesi T è vera avendo supposto che l'ipotesi I sia vera.

Quando attraverso un ragionamento logico, e cioè attraverso una catena di implicazioni del tipo $I \Rightarrow A \Rightarrow B \Rightarrow \ldots \Rightarrow T$, si riesce a dedurre la verità di una proposizione T a partire dalla verità di una proposizione I, si dice che si è data una *dimostrazione diretta* del teorema $I \Rightarrow T$ (attraverso le regole del modus ponens e del sillogismo ipotetico).

Un teorema può anche essere *dimostrato per assurdo*, o con metodo *indiretto*. Questa dimostrazione consiste nel partire dalla negazione di T e, attraverso una catena di implicazioni, arrivare alla negazione di I o, in generale, ad una contraddizione.

Esistono altri metodi di dimostrazione, di cui eventualmente si parlerà più diffusamente qualora si dovesse ricorrere ad essi. Per ora ci limitiamo a citarne un paio: *dimostrazione per induzione* e *dimostrazione mediante esempio* o *controesempio*.

La *dimostrazione per induzione* si usa in particolare quando vogliamo dimostrare una proprietà generale che vale per molte categorie di figure ma che non si può esprimere in maniera unica per tutte le categorie (ad esempio una proprietà che vale per tutti i poligoni ma che dipende dal numero dei lati, come l'estensione dei criteri di congruenza dei triangoli a poligoni di più lati).

Si usa invece un *esempio* quando bisogna dimostrare che una certa proprietà vale per almeno un oggetto del nostro studio o un *controesempio* per dimostrare che una proprietà non vale per tutti gli oggetti in esame.

Per fornire alcuni esempi di dimostrazione, avremmo bisogno di fissare prima i concetti di base e gli assiomi da cui partire, per cui rinviamo la questione al prossimo paragrafo.

Ma a cosa serve studiare la dimostrazione di un teorema? Perché non ci limitiamo ad elencare i teoremi? Per molte applicazioni basta in effetti conoscere il teorema e a volte anche soltanto la formula risolutiva. Tuttavia studiando le dimostrazioni si impara a dimostrare e quindi si impara a creare nuova matematica. Un altro importante vantaggio è che la dimostrazione spiega perché il teorema è vero e permette di scoprire la struttura nascosta nelle definizioni e nei teoremi.

Quando si studia una dimostrazione non bisogna limitarsi a leggerla e a impararla a memoria, occorre leggerla attivamente, ponendo attenzione su cosa si fa e cercando di anticipare i passaggi. Se un passaggio non è chiaro bisogna prima tornare indietro per capire come ci si è arrivati e quindi cercare di capire il motivo per cui l'autore ha messo quel passaggio. In generale, una dimostrazione va letta più volte smettendo solo quando la si è compresa a fondo.

✍ *Esercizi proposti:* 6.16, 6.17, 6.18, 6.19, 6.20, 6.21, 6.22, 6.23, 6.24, 6.25, 6.26

6.5 Esercizi

6.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

6.1 - Le proposizioni

6.1. Quali delle seguenti frasi sono proposizioni logiche?

a) I matematici sono intelligenti;
b) 12 è un numero dispari;
c) Pascoli è stato un grande poeta;
d) Pascoli ha scritto La Divina Commedia;
e) Pascoli ha scritto poesie;
f) Lucia è una bella ragazza;
g) Lucia ha preso 8 al compito di matematica;
h) Il parallelogramma è una figura strana;
i) Per favore, fate silenzio;
j) $2+2=5$;
k) I miei insegnanti sono laureati.

6.2 - Algebra delle proposizioni

6.2. A partire dalle due proposizioni: $p =$ «16 è divisibile per 2», $q =$ «16 è divisibile per 4» costruisci le proposizioni $p \vee q$ e $p \wedge q$.

6.3 (*). A partire dalle proposizioni: $p =$ «18 è divisibile per 3», $q =$ «18 è numero dispari» costruisci le proposizioni di seguito indicate e stabilisci il loro valore di verità.

a) $p \vee q$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) $p \wedge q$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) $\neg p$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) $\neg q$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) $p \vee \neg q$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) $p \wedge \neg q$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
g) $\neg p \vee \neg q$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
h) $\neg p \wedge \neg q$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
i) $\neg(p \wedge q)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

6.4. A partire dalle proposizioni $a =$ «20 è minore di 10», $b =$ «20 è maggiore di 10», $c =$ «20 è multiplo di 5», $d =$ «20 è dispari» scrivi per esteso le seguenti proposizioni composte e stabilisci il loro valore di verità.

a) $a \vee b$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) $a \wedge c$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) $d \wedge a$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) $\neg a \wedge b$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) $a \vee \neg b$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) $(\neg \vee a \neg b) \vee (c \vee d)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
g) $(a \vee \neg b) \wedge (c \vee \neg d)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

6.5 (*). Date le proposizioni $p =$ «oggi è lunedì», $q =$ «oggi studio matematica» riscrivi in simboli le seguenti proposizioni composte:

a) Oggi è lunedì e studio matematica;
b) Oggi non è lunedì e studio matematica;
c) Oggi è lunedì e non studio matematica;
d) Oggi non è lunedì e non studio matematica.

6.6. In quale delle seguenti proposizioni si deve usare la *o* inclusiva e in quali la *o* esclusiva:

a) Nelle fermate a richiesta l'autobus si ferma se qualche persona deve scendere o salire.
b) Luca sposerà Maria o Claudia.
c) Fammi chiamare da Laura o da Elisa.
d) Si raggiunge l'unanimità quando sono tutti favorevoli o tutti contrari.

6.7. A partire dalla preposizioni: $p =$ «oggi pioverà» e $\neg p =$ «oggi non pioverà» scrivere le proposizioni $p \veebar \neg p$, $p \vee \neg p$, $p \wedge \neg p$. Scrivere quindi la loro tabella della verità.

6.8. Scrivere le tabelle di verità delle formule:

a) $p \wedge (p \vee q)$;
b) $p \vee (p \wedge q)$;
c) $p \veebar (p \wedge q)$;
d) $p \wedge (p \veebar q)$;
e) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$;
f) $(p \vee q) \wedge r$;
g) $(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge q)$;
h) $\neg(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$;
i) $(p \vee \neg q) \wedge \neg(r)$;
j) $(p \wedge q) \wedge (\neg q)$;
k) $(p \vee q) \vee (\neg q)$;
l) $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

6.9. Verificare che, date due proposizioni p e q, la proposizione composta $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ è equivalente alla proposizione $p \veebar q$. Dimostrare l'equivalenza verificando che le tavole della verità sono uguali.

6.3 - Predicati e quantificatori

6.10. Qual è la negazione della frase «Ogni volta che ho preso l'ombrello non è piovuto»?

a) Almeno una volta sono uscito con l'ombrello ed è piovuto;
b) Quando esco senza ombrello piove sempre;
c) Tutti i giorni in cui non piove esco con l'ombrello;
d) Tutti i giorni che è piovuto ho preso l'ombrello.

6.11. Scrivi le negazioni delle seguenti frasi che contengono dei quantificatori.

a) Al compito di matematica eravamo tutti presenti.
b) Ogni giorno il professore ci dà sempre compiti per casa.
c) Ogni giorno Luca vede il telegiornale.
d) Tutti i miei familiari portano gli occhiali.
e) Tutti hanno portato i soldi per la gita.

6.4 - Implicazione

6.12. Sono date le frasi $p =$ «Mario è cittadino romano», $q =$ «Mario è cittadino italiano», scrivi per esteso le seguenti implicazioni e indica quale di esse è vera.

a) $p \Rightarrow q$;
b) $q \Rightarrow p$;
c) $q \Leftrightarrow p$.

6.13. Trasforma nella forma «Se ... allora ...» le seguenti frasi:

a) Un oggetto lanciato verso l'alto ricade a terra.
b) Quando piove prendo l'ombrello.
c) I numeri la cui ultima cifra è 0 sono divisibili per 5.
d) Per essere promosso occorre aver raggiunto la sufficienza.

6.14. Date le proposizioni p, q, r costruisci la tavola di verità delle seguenti proposizioni:

a) $p \Rightarrow \neg q$;
b) $\neg p \Rightarrow q$;
c) $\neg p \Rightarrow \neg q$;
d) $p \Rightarrow (q \wedge r)$;
e) $(p \vee q) \Rightarrow r$;
f) $(p \wedge q) \Rightarrow p$;
g) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$;
h) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$;
i) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$.

6.15. Completa i seguenti ragionamenti:

a) Se un numero è multiplo di 10 allora è pari; il numero n non è pari quindi ......
b) Se il sole tramonta fa buio; il sole è tramontato quindi ......

6.16. Dimostra con un controesempio che non è vera l'affermazione «Tutti i multipli di 3 sono dispari».

6.17 (*). [Giochi d'autunno, 2010] Ecco le dichiarazioni rilasciate da quattro amiche:

Carla: «Io non sono né la più giovane né la più anziana»;
Liliana: «Io non sono la più giovane»;
Milena: «Io sono la più giovane»;
Anna: «Io sono la più anziana».

Il fatto è che una di loro (e solo una) ha mentito. Chi è, delle quattro amiche, effettivamente la più giovane?

6.18 (*). [I Giochi di Archimede, 2011] Dopo una rissa in campo l'arbitro vuole espellere il capitano di una squadra di calcio. É uno tra Paolo, Andrea e Gabriele ma, siccome nessuno ha la fascia al braccio, non sa qual è dei tre. Paolo dice di non essere il capitano; Andrea dice che il capitano è Gabriele; Gabriele dice che il capitano è uno degli altri due. Sapendo che uno solo dei tre dice la verità, quale delle affermazioni seguenti è sicuramente vera?

a) Gabriele non è il capitano;
b) Andrea dice la verità;
c) Paolo dice la verità;
d) Andrea è il capitano;
e) Gabriele mente

6.19 (*). [I Giochi di Archimede, 2010] Un celebre investigatore sta cercando il colpevole di un omicidio tra cinque sospettati: Anna, Bruno, Cecilia, Dario ed Enrico. Egli sa che il colpevole mente sempre e gli altri dicono sempre la verità.

Anna afferma: «Il colpevole è un maschio»;
Cecilia dice: «É stata Anna oppure è stato Enrico»;
Enrico dice: «Se Bruno è colpevole allora Anna è innocente».

Chi ha commesso l'omicidio?

6.20 (*). [I Giochi di Archimede, 2009] Quattro amici, Anna, Bea, Caio e Dino, giocano a poker con 20 carte di uno stesso mazzo: i quattro re, le quattro regine, i quattro fanti, i quattro assi e i quattro dieci. Vengono distribuite cinque carte a testa.

Anna dice: «Io ho un poker!» (quattro carte dello stesso valore);
Bea dice: «Io ho tutte e cinque le carte di cuori»;
Caio dice: «Io ho cinque carte rosse»;
Dino dice: «Io ho tre carte di uno stesso valore e anche le altre due hanno lo stesso valore».

Sappiamo che una e una sola delle affermazioni è falsa; chi sta mentendo?

6.21 (*). [I Giochi di Archimede, 2008] Un satellite munito di telecamera inviato sul pianeta Papilla ha permesso di stabilire che è falsa la convinzione di qualcuno che: «su Papilla sono tutti grassi e sporchi». Determina la verità delle seguenti affermazioni:

a) su Papilla almeno un abitante è magro e pulito;
b) su Papilla tutti gli abitanti sono magri e puliti;
c) almeno un abitante di Papilla è magro;
d) almeno un abitante di Papilla è pulito;
e) se su Papilla tutti gli abitanti sono sporchi, almeno uno di loro è magro.

6.22 (*). [I Giochi di Archimede, 2000] Anna, Barbara, Chiara e Donatella si sono sfidate in una gara di nuoto fino alla boa. All'arrivo non ci sono stati ex-equo. Al ritorno, Anna dice: «Chiara è arrivata prima di Barbara»; Barbara dice: «Chiara è arrivata prima di Anna»; Chiara dice: «Io sono arrivata seconda». Sapendo che una sola di esse ha detto la verità,

a) si può dire solo chi ha vinto;
b) si può dire solo chi è arrivata seconda;
c) si può dire solo chi è arrivata terza;
d) si può dire solo chi è arrivata ultima,
e) non si può stabile la posizione in classifica di nessuna.

6.23 (*). [I Giochi di Archimede, 1999] «In ogni scuola c'è almeno una classe in cui sono tutti promossi». Volendo negare questa affermazione, quale dei seguenti enunciati sceglieresti?

a) In ogni scuola c'è almeno una classe in cui sono tutti bocciati.
b) In ogni scuola c'è almeno un bocciato in tutte le classi
c) C'è almeno una scuola che ha almeno un bocciato in ogni classe.
d) C'è almeno una scuola in cui c'è una classe che ha almeno un bocciato.

6.24 (*). [I Giochi di Archimede, 1997] Se il pomeriggio ho giocato a tennis, la sera ho fame e se la sera ho fame, allora mangio troppo. Quale delle seguenti conclusioni non posso trarre da queste premesse?

a) Se gioco a tennis il pomeriggio, allora la sera ho fame e mangio troppo;
b) se la sera ho fame, allora mangio troppo, oppure ho giocato a tennis il pomeriggio;
c) se la sera non ho fame, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio;
d) se la sera non ho fame, allora non mangio troppo;
e) se la sera non mangio troppo, allora non ho giocato a tennis il pomeriggio.

6.25 (*). [I Giochi di Archimede, 1998] Su un isola vivono tre categorie di persone: i cavalieri, che dicono sempre la verità, i furfanti, che mentono sempre, ed i paggi che dopo una verità dicono sempre una menzogna e viceversa. Sull'isola incontro un vecchio, un ragazzo e una ragazza. Il vecchio afferma: «Io sono paggio»; «Il ragazzo è cavaliere». Il ragazzo dice: «Io sono cavaliere»; «La ragazza è paggio». La ragazza afferma infine: «Io sono furfante»; «Il vecchio è paggio». Si può allora affermare che:

a) c'è esattamente un paggio;
b) ci sono esattamente due paggi;
c) ci sono esattamente tre paggi;
d) non c'è alcun paggio;
e) il numero dei paggi non è sicuro.

6.26. Dimostra che in ogni festa c'è sempre una coppia di persone che balla con lo stesso numero di invitati. (Suggerimento: `http://it.wikipedia.org/wiki/Principio_dei_cassetti`)

6.5.2 Risposte

6.3. Vere a), d), e), f), g) i).

6.5. a) $p \wedge q$, b) $\neg p \wedge q$, c) $p \wedge \neg q$, d) $\neg p \wedge \neg q$.

6.17. Milena.

6.18. a).

6.19. Anna.

6.20. Bea.

6.21. e).

6.22. c).

6.23. c).

6.24. d).

6.25. c).

Relazioni 7

7.1 Proposizioni e predicati

In matematica frasi come "19 è maggiore di 5" o "Giove ruota intorno alla Terra" sono considerate *proposizioni* perché ad esse si può attribuire un preciso valore di verità, cioè si può stabilire se sono vere oppure false: la prima è una proposizione vera, la seconda è falsa.

Non sono proposizioni in senso matematico "Cosa stai studiando?", "domani pioverà!", "x è un numero primo": infatti la prima non è un'affermazione ma pone una domanda, la seconda è una esclamazione e quindi non possiamo stabilire se è vera o falsa; l'ultima contiene un elemento indeterminato e finché non si fissa il valore da attribuire a x, non si può decidere se la frase che lo riguarda è vera o falsa.

Ogni proposizione è formata da un *predicato* (verbo) e dai suoi *argomenti* (cose o persone alle quali il verbo si riferisce).

Analizzando le proposizioni sopra enunciate si ha:

Soggetto	Predicato	Complemento
19	è maggiore di	5
Giove	ruota attorno alla	Terra

Il soggetto e il complemento sono gli argomenti ai quali il predicato si riferisce. In alcune proposizioni il predicato si riferisce a due argomenti (il *soggetto* e il *complemento*) in altre ad un solo argomento: ad esempio, il predicato "essere numero primo" stabilisce semplicemente una caratteristica del numero 5 senza porre alcuna connessione con un altro argomento.

Definizione 7.1. Si dice *predicato binario* un predicato che si riferisce a due argomenti.

✍ *Esercizio proposto:* 7.1

7.2 Relazioni in un insieme

Il termine *relazione* entra molto spesso in frasi del linguaggio naturale, lo usiamo per esprimere un generico legame tra due persone o tra due oggetti, anche senza specificarne la natura: "si è conclusa la relazione tra Anna e Paolo", "l'allungamento di una sbarretta di ferro è in relazione con il calore fornito", "la frana del terreno è in relazione con il disboscamento della zona e l'abusivismo edilizio", "domani consegnerò la relazione di fisica". Sono tutte espressioni che ci danno informazioni di un qualche collegamento tra gli argomenti (persone, cose) ai quali il termine relazione si riferisce.

Dal punto di vista matematico diamo la seguente definizione.

Definizione 7.2. Si dice *relazione* in un insieme A un predicato binario che lega due elementi dell'insieme.

Esempio 7.1. Nell'insieme $A = \{3, 5, 6, 9, 30\}$ è introdotto il predicato binario "essere multiplo di"; con esso formiamo le proposizioni vere scegliendo soggetto e complemento nell'insieme A:

30 è multiplo di 6;	30 è multiplo di 5;	9 è multiplo di 9;
9 è multiplo di 3;	3 è multiplo di 3;	...

Il predicato "essere multiplo" genera nell'insieme A una relazione matematica. Esso non è il solo che permette di collegare tra loro due elementi di quell'insieme.

✍ *Esercizio proposto:* 7.2

Se chiamiamo con $\mathfrak{R}$ il predicato binario che definisce la relazione introdotta nell'insieme, per indicare sinteticamente la proposizione avente come soggetto a, come complemento b e come predicato $\mathfrak{R}$, scriviamo $a\,\mathfrak{R}\,b$ e diremo che a *è in relazione con* b.

Esempio 7.2. Con riferimento all'esempio precedente si ha: $A = \{3, 5, 6, 9, 30\}$ e $\mathfrak{R}$: "essere multiplo di". Allora scriviamo: per qualunque a e b appartenenti ad A, $a\,\mathfrak{R}\,b$ se e solo se a è multiplo di b, in simboli: $\forall a, b \in A \Leftrightarrow a$è multiplo di$b$

$30\,\mathfrak{R}\ 6;\quad 9\,\mathfrak{R}\ 3;\quad 30\,\mathfrak{R}\ 3;\quad 6\,\mathfrak{R}\ 3;\quad 30\,\mathfrak{R}\ 5;\quad 3\,\mathfrak{R}\ 3;\quad 5\,\mathfrak{R}\ 5;\quad 6\,\mathfrak{R}\ 6;\quad 9\,\mathfrak{R}\ 9;\quad 30\,\mathfrak{R}\ 30.$

Abbiamo così formato un insieme di coppie ordinate di elementi tra loro in relazione: $30\,\mathfrak{R}\ 5$ può anche essere indicata con la coppia ordinata $(30; 5)$.

Definizione 7.3. Chiamiamo *insieme della relazione* $G_{\mathfrak{R}}$ l'insieme delle coppie ordinate i cui elementi sono gli argomenti del predicato binario, ossia sono in relazione tra di loro. Esso risulta essere un sottoinsieme del prodotto cartesiano dell'insieme A con se stesso. Si rappresenta per proprietà caratteristica nel seguente modo $G_{\mathfrak{R}} = \{(a; b) \in A \times A \mid a\,\mathfrak{R}\,b\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 7.3, 7.4, 7.5, 7.6

7.2.1 Grafico di una relazione

Dal momento che una relazione in un insieme Y determina un sottoinsieme del prodotto cartesiano $Y \times Y$, è comodo rappresentare una relazione nello stesso diagramma usato per rappresentare il prodotto cartesiano. Una relazione può quindi essere rappresentata attraverso un *grafico cartesiano*.

✍ *Esercizi proposti:* 7.7, 7.8

7.2.2 Matrice o tabella di una relazione

Nella figura 7.1 è rappresentata la classica griglia per il gioco della battaglia navale. Ogni cella è individuata da una coppia ordinata il cui primo elemento (una lettera dell'alfabeto) indica la riga, il secondo (un numero) indica la colonna; così la coppia $(D; 5)$ indica la cella annerita.

✍ *Esercizi proposti:* 7.9, 7.10, 7.11

7.2.3 Grafo di una relazione

Definizione 7.4. Un *grafo* è un insieme di punti, detti *nodi*, e di archi che uniscono coppie di punti.

Esempio 7.3. Nel diagramma di Eulero-Venn di figura 7.2, relativo all'insieme $A = \{3, 5, 6, 9, 30\}$ rappresentiamo la relazione $\mathfrak{R}$ = "essere multiplo di" collegando, mediante una freccia, gli argomenti delle proposizione vere.

Come puoi osservare, l'elemento 30 è collegato con una freccia all'elemento 6 in quanto la proposizione "30 è multiplo di 6" è vera, ma non all'elemento 9 poiché la proposizione "30 è multiplo di 9" è falsa; inoltre la punta della freccia è sul numero 6 in quanto complemento del predicato "essere multiplo di" (si parla in tal caso di *grafo orientato*); infine su ciascun elemento abbiamo messo un "anello" o "cappio" per indicare che ogni elemento è in relazione con se stesso visto che per ogni elemento $a \in A$ la proposizione "a è multiplo di a" risulta vera.

✍ *Esercizi proposti:* 7.12, 7.13, 7.14, 7.15, 7.16, 7.17

	1	2	3	4	5	6	7
A							
B							
C							
D							
E							
F							

Figura 7.1: Griglia della battaglia navale.

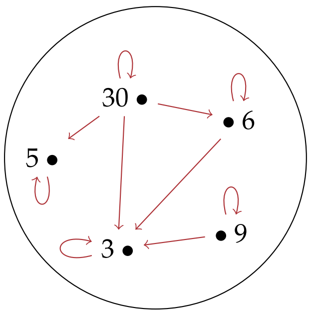


Figura 7.2: L'insieme A.

7.3 Proprietà delle relazioni

7.3.1 Proprietà riflessiva

Esempio 7.4. Nell'insieme $T = \{4, 7, 8, 12, 35, 100\}$ è introdotta la relazione $\mathfrak{R}$: "essere divisore di". Puoi verificare che ogni numero è divisore di se stesso, cioè ogni elemento dell'insieme è in relazione con se stesso. Una relazione di questo tipo si dice che gode della *proprietà riflessiva*. Osserva, però, che nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali la relazione "essere divisibile per" non è riflessiva poiché zero non è divisibile per se stesso.

Definizione 7.5. Una relazione $\mathfrak{R}$ in un insieme A gode della *proprietà riflessiva* quando ogni elemento è in relazione con se stesso, ossia per qualunque x dell'insieme A si ha $x \,\mathfrak{R}\, x$. In simboli: $\forall x \in A : x \,\mathfrak{R}\, x$.

✍ *Esercizio proposto:* 7.18

7.3.2 Proprietà antiriflessiva

Esempio 7.5. Nell'insieme delle persone $P = \{\text{Marco, Antonio, Carlo}\}$ è data la relazione $\mathfrak{R}$: "essere più alto di". Nessun elemento è in relazione con se stesso, infatti nessuno può essere più alto di se stesso.

Definizione 7.6. Una relazione $\mathfrak{R}$ in un insieme A gode della *proprietà antiriflessiva* quando nessun elemento è in relazione con se stesso, ossia per nessun elemento x di A si ha $x \,\mathfrak{R}\, x$. In simboli: $\nexists x \in A : \; x \,\mathfrak{R}\, x$.

✍ *Esercizio proposto:* 7.19

7.3.3 Proprietà simmetrica

Esempio 7.6. Nella relazione $\mathfrak{R}$: "essere concorde con" nell'insieme dei numeri $A = \{-1, +3, -7, +5, -2, +4, +10\}$ si può osservare che se un elemento dell'insieme è in relazione con un altro allora anche quest'ultimo è in relazione con il primo: $-1 \,\mathfrak{R}\, -7$, ma anche $-7 \,\mathfrak{R}\, -1$; $+3 \,\mathfrak{R}\, +5$, ma anche $+5 \,\mathfrak{R}\, +3$ e così via.

Definizione 7.7. Una relazione $\mathfrak{R}$ in un insieme A gode della *proprietà simmetrica* quando risultano vere le due proposizioni che si ottengono scambiando soggetto e complemento; ossia per qualunque x e y appartenenti all'insieme A se vale $x \,\mathfrak{R}\, y$ allora vale anche $y \,\mathfrak{R}\, x$. In simboli: $\forall x, y \in A : \; x \,\mathfrak{R}\, y \rightarrow \; y \,\mathfrak{R}\, x$

✍ *Esercizio proposto:* 7.20

7.3.4 Proprietà antisimmetrica

Esempio 7.7. Il diagramma di Venn nella figura 7.3 rappresenta un insieme U e alcuni suoi sottoinsiemi.

Consideriamo ora l'insieme di insiemi $S = \{U, A, B, C, D, E, F\}$ e la relazione $\mathfrak{R}$: "essere sottoinsieme proprio di". Completa il grafo della relazione.

Certamente nel completare il grafo (figura 7.4) non avrai usato archi poiché è evidente che le proposizioni "B è sottoinsieme proprio di C" e "C è sottoinsieme proprio di B" non possono essere entrambe vere. Anzi, la verità della prima implica necessariamente la falsità della seconda.

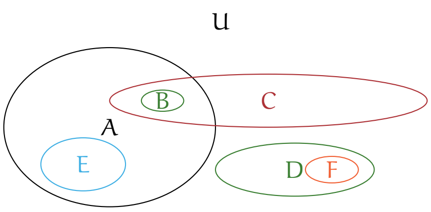


Figura 7.3: L'insieme U.

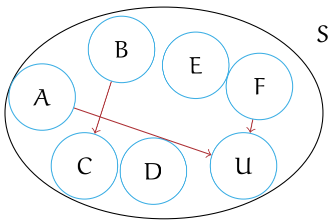


Figura 7.4: L'insieme S.

Definizione 7.8. Una relazione $\mathfrak{R}$ in un insieme A gode della *proprietà antisimmetrica* quando non possono essere vere contemporaneamente le proposizioni che si ottengono scambiando il soggetto con il complemento, se soggetto e complemento sono diversi tra loro; ossia per qualunque x e y dell'insieme A se $x \neq y$ e se $x \,\mathfrak{R}\, y$ non è vero che $y \,\mathfrak{R}\, x$.

✍ *Esercizio proposto:* 7.21

7.3.5 Proprietà transitiva

Definizione 7.9. Una relazione $\mathfrak{R}$ in un insieme A gode della *proprietà transitiva* quando se $a \,\mathfrak{R}\, b$ e $b \,\mathfrak{R}\, c$ allora risulta anche $a \,\mathfrak{R}\, c$, con a, b, c elementi qualsiasi dell'insieme A. In simboli $\forall a, b, c \in A : \; a \,\mathfrak{R}\, b \wedge a \,\mathfrak{R}\, c \;\rightarrow\; a \,\mathfrak{R}\, c$.

✍ *Esercizi proposti:* 7.22, 7.23, 7.24, 7.25

7.4 Relazioni di equivalenza

Esempio 7.8. Completa la seguente tabella segnando le proprietà di cui gode (R=riflessiva, S=simmetrica, T=transitiva, AS=antisimmetrica, AR=antiriflessiva) ciascuna relazione.

Relazione	Insieme	Proprietà
Avere lo stesso perimetro	poligoni	[R] [S] [T] [AS] [AR]
Essere fratello di	persone	[R] [S] [T] [AS] [AR]
Essere figlio di	persone	[R] [S] [T] [AS] [AR]
Essere più alto di	persone	[R] [S] [T] [AS] [AR]
Avere gli angoli rispettivamente congruenti	triangoli	[R] [S] [T] [AS] [AR]
Iniziare con la stessa lettera	parole	[R] [S] [T] [AS] [AR]
Giocare nella stessa squadra	calciatori	[R] [S] [T] [AS] [AR]
$a \mathfrak{R} b$ se e solo se a è nato nello stesso anno di b	persone	[R] [S] [T] [AS] [AR]
$x \mathfrak{R} y$ se e solo se x ha lo stesso numero di cifre di y	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	[R] [S] [T] [AS] [AR]
$x \mathfrak{R} y$ se e solo se x ha la stessa ultima cifra di y	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	[R] [S] [T] [AS] [AR]
$x \mathfrak{R} y$ se e solo se x è multiplo di y	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	[R] [S] [T] [AS] [AR]
$x \mathfrak{R} y$ se e solo se $x + y$ è pari	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	[R] [S] [T] [AS] [AR]
Avere lo stesso segno zodiacale	persone	[R] [S] [T] [AS] [AR]
$(a; b) \mathfrak{R} (x; y)$ se e solo se $a + b = x + y$	$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$	[R] [S] [T] [AS] [AR]

Svolgimento: La prima relazione gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva; infatti:

- "il poligono P ha lo stesso perimetro di se stesso" è vera per qualunque poligono (*proprietà riflessiva*);
- "il poligono P_1 ha lo stesso perimetro del poligono P_2" implica la verità della proposizione "il poligono P_2 ha lo stesso perimetro di P_1", qualunque siano i due poligoni P_1 e P_2 (*proprietà simmetrica*);
- se "il poligono P_1 ha lo stesso perimetro di P_2" e "P_2 ha lo stesso perimetro di P_3" allora si ha anche che "P_1 ha lo stesso perimetro di P_3", qualunque siano i poligoni P_1, P_2, P_3 (*proprietà transitiva*).

Verifica tu se anche le altre relazioni godono delle tre proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, come "essere fratello di", "avere gli angoli rispettivamente uguali", "iniziare con la stessa lettera".

Definizione 7.10. Chiamiamo *relazione d'equivalenza* una relazione che gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

✍ *Esercizio proposto:* 7.26

Premettiamo le definizioni:

Definizione 7.11. Dato un insieme A, suddividiamolo in un numero di sottoinsiemi A_1, $A_2, \dots, A_n$, detti *classi*, tali che

a) nessun sottoinsieme è vuoto;
b) a due a due sono disgiunti (non hanno tra loro alcun elemento in comune);
c) la loro unione è l'insieme A.

L'insieme $P(A) = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ è detto *partizione* di A.

Definizione 7.12. In un insieme A dove sia stata definita una relazione d'equivalenza $\mathfrak{R}$, si chiama *classe d'equivalenza* ogni sottoinsieme di A contenente tutti e soli gli elementi tra loro in relazione secondo $\mathfrak{R}$.

Si viene così a determinare una partizione dell'insieme A in classi d'equivalenza, ognuna delle quali è indicata racchiudendo tra parentesi quadrate uno degli elementi della classe considerata.

Definizione 7.13. Si chiama *insieme quoziente* di un insieme A rispetto alla relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$ in esso definita, l'insieme i cui elementi sono le classi d'equivalenza determinate dalla relazione $\mathfrak{R}$, ovvero la partizione di A definita da $\mathfrak{R}$. L'insieme quoziente si indica con il simbolo $A/\mathfrak{R}$.

❑ **Osservazione** Ogni volta che si ha una relazione d'equivalenza $\mathfrak{R}$ in un insieme A, possiamo stabilire la seguente catena di passaggi:

$$\text{insieme } A \to \mathfrak{R} \to \text{ partizione } \wp(A) = \text{ insieme quoziente } A/\mathfrak{R}.$$

Esempio 7.9. Nell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 20\}$ è data la relazione $\mathfrak{R}$ = "avere lo stesso resto nella divisione per 5". Vediamo alcuni numeri che sono in relazione:

0 : 5 quoziente 0 resto 0;
1 : 5 quoziente 0 resto 1;
2 : 5 quoziente 0 resto 2;
3 : 5 quoziente 0 resto 3;
4 : 5 quoziente 0 resto 4;
5 : 5 quoziente 1 resto 0;
6 : 5 quoziente 1 resto 1;
7 : 5 quoziente 1 resto 2;
8 : 5 quoziente 1 resto 3;
9 : 5 quoziente 1 resto 4;
10 : 5 quoziente 2 resto 0;
11 : 5 quoziente 2 resto 1;
12 : 5 quoziente 2 resto 2;
......

Sono quindi in relazione:

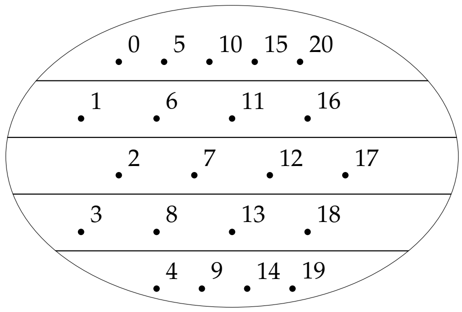
➡ $0\,\mathfrak{R}\,5$, $5\,\mathfrak{R}\,10$, $10\,\mathfrak{R}\,15$, $15\,\mathfrak{R}\,20 \dots$;
➡ $1\,\mathfrak{R}\,6$, $6\,\mathfrak{R}\,11$, $11\,\mathfrak{R}\,16$, $21\,\mathfrak{R}\,26 \dots$;
➡ $2\,\mathfrak{R}\,7$, $7\,\mathfrak{R}\,12$, $12\,\mathfrak{R}\,17$, $27\,\mathfrak{R}\,32 \dots$
➡ ....

Vediamo quali proprietà verifica la relazione $\mathfrak{R}$:

- *Riflessiva*: perché ogni numero ha lo stesso resto di se stesso nella divisione per 5. $0\,\mathfrak{R}0$, $1\,\mathfrak{R}1, 2\,\mathfrak{R}2, \dots;$
- *Simmetrica*: Se $m\,\mathfrak{R}\,n$ significa che $\mathrm{resto}(m:5) = \mathrm{resto}(n:5)$ allora vale anche $\mathrm{resto}(n:5) = \mathrm{resto}(m:5)$ e quindi $n\,\mathfrak{R}\,m$;
- *Transitiva*: Se $m\,\mathfrak{R}\,n$ e $n\,\mathfrak{R}\,p$ significa che $\mathrm{resto}(m:5) = \mathrm{resto}(n:5) = \mathrm{resto}(p:5)$ e quindi $m\,\mathfrak{R}\,p$.

Possiamo concludere che $\mathfrak{R}$ è una relazione di equivalenza.

Rappresentiamo la partizione dell'insieme A secondo la relazione $\mathfrak{R}$.



Le classi di equivalenza sono:

- $[0] = \{0, 5, 10, 15, 20\}$;
- $[1] = \{1, 6, 11, 16\}$;
- $[2] = \{2, 7, 12, 17\}$;
- $[3] = \{3, 8, 13, 18\}$;
- $[4] = \{4, 9, 14, 19\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 7.27, 7.28, 7.29, 7.30, 7.317.32, 7.33, 7.34, 7.35, 7.36, 7.37

7.5 Relazioni di ordine

Nel linguaggio di ogni giorno avrai certamente spesso usato espressioni come "devo mettere in ordine i miei libri" oppure "qui non c'è ordine" e altre espressioni simili. Anche in matematica, fin dalla scuola elementare, hai imparato a ordinare gli elementi dell'insieme dei numeri naturali: dati due numeri naturali hai imparato infatti a stabilire quale dei due è il maggiore.

Definizione 7.14. Una relazione $\mathfrak{R}$, introdotta in un insieme A, si chiama *relazione d'ordine* se è antisimmetrica e transitiva.

Riguardando le varie relazioni introdotte sin qui, possiamo stabilire che esistono relazioni d'ordine di vario tipo, schematizzate nel seguente diagramma:

- Relazione d'ordine
  - totale
    - in senso stretto
    - in senso largo
  - parziale
    - in senso stretto
    - in senso largo

Attraverso alcuni esempi, vogliamo chiarire le differenze tra i diversi tipi. A questo scopo introduciamo la seguente definizione.

Definizione 7.15. Data una relazione d'ordine $\mathfrak{R}$ definita in un insieme A, due elementi distinti x e y sono *confrontabili* se rispetto a $\mathfrak{R}$ si ha $x\,\mathfrak{R}\,y$ oppure $y\,\mathfrak{R}\,x$.

Definizione 7.16. Una relazione d'ordine si dice *parziale* quando esistono almeno due elementi che non sono confrontabili.

Definizione 7.17. Una relazione d'ordine si dice *totale* quando due qualsiasi elementi possono essere messi in relazione, cioè sono confrontabili.

Definizione 7.18. Una relazione d'ordine è detta *in senso largo* quando essa gode della proprietà riflessiva.

Definizione 7.19. Una relazione d'ordine è detta *in senso stretto* quando essa gode della proprietà antiriflessiva.

- Relazione d'ordine
  - totale (elementi tutti confrontabili)
    - in senso stretto (antiriflessiva)
    - in senso largo (riflessiva)
  - parziale (elementi non tutti confrontabili)
    - in senso stretto (antiriflessiva)
    - in senso largo (riflessiva)

Esempio 7.10. Nell'insieme degli alunni della tua classe considera la relazione $A\,\mathfrak{R}\,B$ se il numero di lettere del nome di A è minore del numero di lettere del nome di B. Verifichiamo le proprietà della relazione:

1. *Antiriflessiva*: perché ogni alunno non può avere un nome con meno lettere del suo nome;
2. *Antisimmetrica*: se A ha il nome più corto del nome di B, non può accadere l'inverso e cioè che anche B abbia il nome più corto del nome di A;
3. *Transitiva*: perché se A ha il nome più corto di B e B ha il nome più corto di C allora anche $A\,\mathfrak{R}\,C$.

Si tratta quindi di una *relazione d'ordine parziale in senso stretto*. É parziale perché ci possono essere due alunni che avendo il nome con lo stesso numero di lettere non sono confrontabili nella relazione considerata.

✍ *Esercizi proposti:* 7.38, 7.39, 7.40, 7.41, 7.42, 7.43

7.6 Relazioni tra due insiemi diversi

Nei paragrafi precedenti abbiamo analizzato relazioni con predicato binario che si riferisce a due elementi dello stesso insieme, consideriamo ora relazioni con predicato binario in cui soggetto e complemento appartengono a due insiemi diversi.

Definizione 7.20. Si chiama *relazione* $\mathfrak{R}$ *fra due insiemi* A e B, il predicato binario avente come soggetto un elemento di A e come complemento un elemento di B. Essa definisce un sottoinsieme $G_{\mathfrak{R}}$ del prodotto cartesiano $A \times B$, costituito dalle coppie ordinate di elementi corrispondenti:

$$G_{\mathfrak{R}} = \{(a; b) \in A \times B \mid a\,\mathfrak{R}\,b\}.$$

Definizione 7.21. Si chiama *dominio* $\mathcal{D}$ di una relazione l'insieme A in cui si trova il soggetto della proposizione vera costruita con il predicato $\mathfrak{R}$ e *codominio* $\mathcal{C}$ l'insieme B degli elementi che costituiscono il complemento della stessa proposizione.

Definizione 7.22. Definita una relazione $\mathfrak{R} : A \to B$, nella coppia $(a; b)$ di elementi corrispondenti, b si chiama *immagine di* a nella relazione $\mathfrak{R}$. L'insieme delle immagini degli elementi del dominio $\mathcal{D}$ è un sottoinsieme del codominio $\mathcal{C}$ chiamato *insieme immagine* e Verrà indicato con IM.. Quindi IM. $\subseteq \mathcal{C}$.

Definizione 7.23. Chiamiamo *insieme di definizione* della relazione $\mathfrak{R}$, indicato con I. D., il sottoinsieme del dominio $\mathcal{D}$ i cui elementi hanno effettivamente un corrispondente nel codominio $\mathcal{C}$.

Esempio 7.11. Consideriamo gli insiemi $A = \{$Parigi, Roma, Atene, Firenze, Barcellona$\}$ e $B = \{$Italia, Francia, Grecia, Spagna$\}$.

Il predicato binario $\mathfrak{R}$: "essere la capitale di", introdotto nell'insieme $A \times B$, determina il sottoinsieme $G_{\mathfrak{R}}$ i cui elementi sono le coppie (Parigi; Francia), (Roma; Italia), (Atene; Grecia). Il dominio della corrispondenza è $\mathcal{D} = \{$Parigi, Roma, Atene, Firenze, Barcellona$\}$, il codominio è $\mathcal{C} = \{$Italia, Francia, Grecia, Spagna$\}$, I. D. $= \{$Parigi, Roma, Atene$\}$ e IM. =Italia, Francia, Grecia$\}$ (figura 7.5 a pagina 199).

✍ *Esercizi proposti:* 7.44, 7.45, 7.46

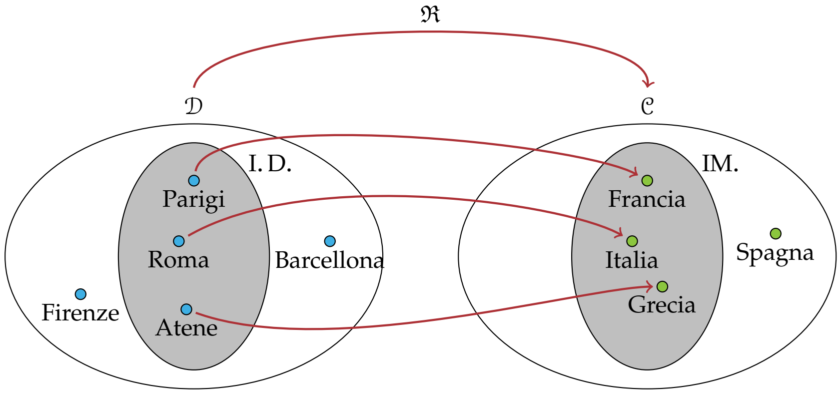


Figura 7.5: Relazione tra due insiemi.

7.6.1 Caratteristiche della relazione tra insiemi

Esempio 7.12. Tra gli insiemi $D = \{\text{persone italiane viventi}\}$ e $C = \{\text{gli anni dal 1900 al 2012}\}$ consideriamo la relazione "è nato nell'anno".

Evidentemente ogni persona ha un determinato anno di nascita, ma più persone sono nate nello stesso anno. Il grafico sagittale di questa relazione è del tipo rappresentato nella figura 7.6.

Questo tipo di relazione è detta di tipo *molti a uno* perché più elementi di D sono in relazione con lo stesso elemento di C.

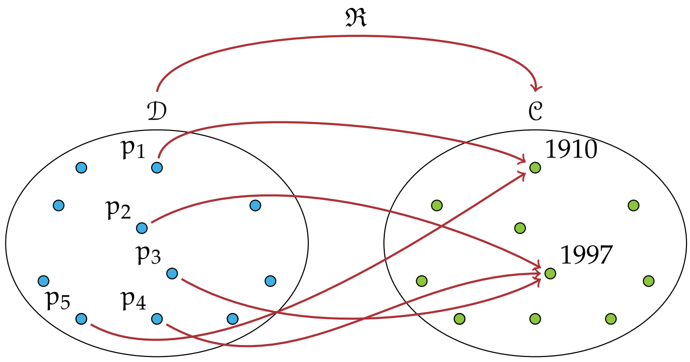


Figura 7.6: Relazione *molti a uno*: più persone sono nate nello stesso anno.

Esempio 7.13. Analizziamo la relazione $\mathfrak{R} : R \to M$ "essere bagnata/o da" tra l'insieme delle regioni d'Italia R e l'insieme dei mari M.

Alcune regioni non sono bagnate da alcun mare. Molte regioni sono bagnate dallo stesso mare, ma succede che alcune regioni siano bagnate da due mari. Un mare bagna almeno una regione. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo rappresentato nella figura 7.7.

Si tratta di una relazione *molti a molti* perché più regioni sono bagnate da uno stesso mare e più mari possono bagnare una stessa regione.

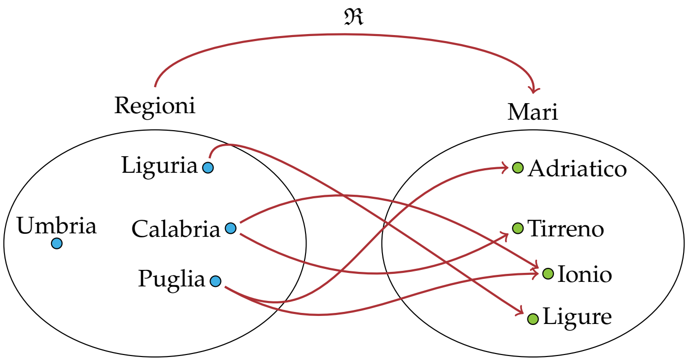


Figura 7.7: Esempio di relazione di tipo *molti a molti*.

Esempio 7.14. Consideriamo la relazione $\mathfrak{R}$: "essere la capitale di" tra il dominio $\mathcal{D} = \{$città d'Europa$\}$ e il codominio $\mathcal{C} = \{$stati d'Europa$\}$. È evidente che non tutte le città sono capitali, mentre ogni stato ha la sua capitale; inoltre due città diverse non possono essere capitali dello stesso stato. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo rappresentato nella figura 7.8.

Si tratta di una relazione *uno a uno*.

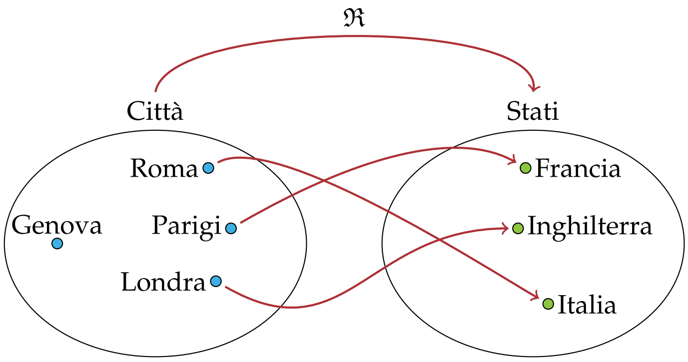


Figura 7.8: Esempio di relazione di tipo *uno a uno*.

Esempio 7.15. Consideriamo, tra l'insieme $\mathbb{N}_0$ dei numeri naturali diversi da zero e l'insieme $\mathbb{Z}_0$ degli interi relativi diversi da zero, la relazione $\mathfrak{R}$: "essere il valore assoluto di". Poiché due numeri opposti hanno lo stesso valore assoluto, ogni elemento di $\mathbb{N}_0$ ha due immagini, per cui il grafico sagittale di questa corrispondenza è come nella figura 7.9.

Si tratta di una *relazione uno a molti*.

Definizione 7.24. Le relazioni di tipo *molti a uno* e *uno a uno* sono dette *univoche*; in esse ogni elemento dell'insieme di partenza ha una sola immagine nell'insieme di arrivo.

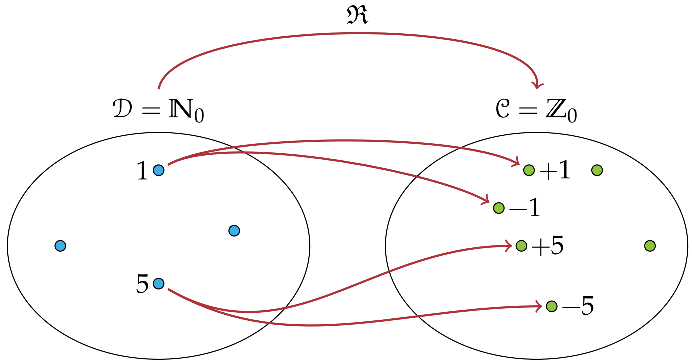


Figura 7.9: Esempio di relazione di tipo *uno a molti*.

Esempio 7.16. Consideriamo la relazione $\mathfrak{R}$ che associa ad ogni persona il suo codice fiscale: ogni persona ha il proprio codice fiscale, persone diverse hanno codice fiscale diverso. Il grafico sagittale di questa relazione è del tipo *uno a uno*. È di questo tipo il grafico sagittale della relazione che associa ad ogni automobile la sua targa, ad ogni moto il suo numero di telaio, ad ogni cittadino italiano maggiorenne il suo certificato elettorale, . . .

In tutti questi casi la relazione è di tipo *uno a uno*.

✍ *Esercizi proposti:* 7.47, 7.48, 7.49, 7.50

7.7 Esercizi

7.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

7.1 - Proposizioni e predicati

7.1. Completa la tabella come suggerito nella prima riga, individuando, per ciascuna proposizione, il predicato e gli argomenti a cui esso si riferisce:

Proposizioni	Predicato	Argomenti
7 è divisore di 14	essere divisore di	7, 14
11 è maggiore di 10	essere maggiore di	
5 è numero primo		
Andrea frequenta la stessa palestra di Marco		
Marta è moglie di Piero		
Paolo è padre di Marco		

7.2 - Relazioni in un insieme

7.2. Nell'insieme $A = \{3, 5, 6, 9, 30\}$ considera il predicato "essere minore di"; con esso forma proposizioni vere aventi come soggetto e come complemento due elementi di A.

Esempio: p_1: 9 è minore di 30.

7.3. Nell'insieme A rappresentato con il diagramma di Eulero-Venn di figura 7.10 introduciamo il predicato $\mathfrak{R}$: "avere una sola lettera diversa". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

Traccia di soluzione: Per costruire l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ devo formare le coppie ordinate ricordando che per qualunque a e b appartenenti ad A, $a \,\mathfrak{R}\, b$ se e solo se "a ha una sola lettera diversa da b", ad esempio prete $\mathfrak{R}$ prese.

7.4. Nell'insieme $C = \{$Como, Milano, Venezia, Parma, Brescia, Aosta, Torino, Genova, Imperia, Arezzo, Firenze, Grosseto, Napoli, Campobasso, Catanzaro, Bologna, Vercelli, Salerno$\}$ è definita la relazione $\mathfrak{R}$: "essere nella stessa regione". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

7.5. Nell'insieme $S = \{x \mid x$ è il nome di un giorno della settimana$\}$ è definita la relazione $\mathfrak{R}$: $x \in S$, $y \in S$, $x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se "x ha lo stesso numero di sillabe di y". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

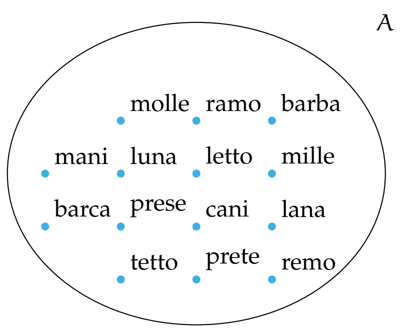


Figura 7.10

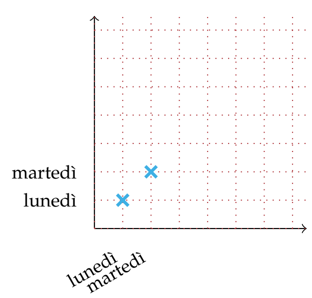


Figura 7.11

7.6. Nell'insieme $F = \{1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2\}$ è definita la relazione $\mathfrak{R}$: "essere consecutivi". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

7.7. Considera l'insieme $S = \{x \mid x \text{ è il nome di un giorno della settimana}\}$, completa la rappresentazione grafica di figura 7.11 a pagina 202, dell'insieme $S \times S$, evidenzia poi con una crocetta gli elementi dell'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ determinato dalla relazione "x ha lo stesso numero di sillabe di y".

7.8. Considera l'insieme $F = \{1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2\}$; fai la rappresentazione grafica dell'insieme $F \times F$ e metti in evidenza con una crocetta gli elementi dell'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ determinato dalla relazione "essere consecutivi".

7.9. Considera nell'insieme $A = \{-1, +3, -7, +5, -2, +4, +10\}$ la relazione $\mathfrak{R}$: $x \in A$, $y \in A$, $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "x è concorde con y". Costruiamo una tabella a doppia entrata (figura 7.12) riportando in orizzontale e in verticale gli elementi dell'insieme A. Fissa l'attenzione su una cella e segui le istruzioni:

- se $a\,\mathfrak{R}\,b$ metti 1 nella cella $(a; b)$;
- altrimenti metti 0 nella cella $(a; b)$.

Prosegui tu seguendo l'esempio.

❑ **Osservazione** Alla fine tutte le celle sono riempite: compare zero se gli elementi della coppia ordinata non sono in relazione, compare 1 al contrario. La relazione $\mathfrak{R}$ è completamente rappresentata.

La tabella costruita si chiama *matrice della relazione*. Una relazione può sempre essere rappresentata attraverso una matrice.

7.10. Nell'insieme $S = \{x \mid x \text{ è il nome di un giorno della settimana}\}$ è introdotta la relazione $\mathfrak{R}$: $x \in S$, $y \in S$, $x\,\mathfrak{R}\,y$ se e solo se "x ha lo stesso numero di sillabe di y". Rappresenta la relazione con una matrice.

7.11. Assegnato il predicato $\mathfrak{R}$: "essere divisibile per" introdotto nell'insieme $A = \{12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60\}$, rappresenta con una matrice la relazione $\mathfrak{R}$.

	−1	+3	−7	+5	−2	+4	+10
−1	1						
+3							
−7							
+5			0				
−2							
+4							
+10							

Figura 7.12

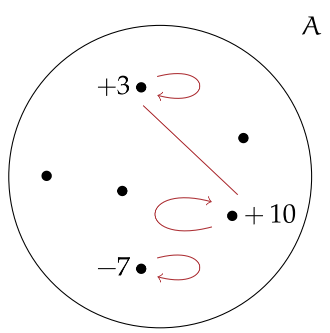


Figura 7.13

7.12. Completa la rappresentazione di figura 7.13 a pagina 203 con le frecce relative alla relazione $\mathfrak{R}$: $x \in A$, $y \in A$, $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "x è concorde con y" nell'insieme $A = \{-1, +3, -7, +5, -2, +4, +10\}$.

7.13. Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ è introdotto il predicato $\mathfrak{R}$: "essere il doppio di"; costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$, rappresenta la relazione nei tre modi descritti sopra: con un grafico cartesiano, con una matrice e con un grafo.

7.14. Sono assegnati i grafi di tre relazioni $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ definite in altrettanti insiemi A, B, C (figura 7.14); deduci da essi gli elementi di ciascun insieme e costruisci, per ciascuna relazione, l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

7.15. Rappresenta nei tre modi che sono stati descritti (con un grafico cartesiano, con una matrice, con un grafo) la relazione $\mathfrak{R}$: "essere nati nello stesso mese" introdotta nell'insieme C degli alunni della tua classe.

7.16. Nell'insieme $H = \{x \in \mathbb{N} \mid 21 < x < 40\}$, $x\,\mathfrak{R}\,y$ se e solo se "la somma delle cifre di x è uguale alla somma delle cifre di y". Costruisci $G_{\mathfrak{R}}$ e rappresenta la relazione con una matrice.

7.17. Rappresenta con un grafo la relazione $\mathfrak{R}$ indicata dal grafico cartesiano riportato nella figura 7.15.

7.3 - Proprietà delle relazioni

7.18. Quali relazioni sono riflessive?

Insieme	Relazione	È riflessiva?
Numeri naturali	essere divisibile per	Sì No
Libri che hai in cartella	avere lo stesso numero di pagine di	Sì No
Rette del piano	essere perpendicolare a	Sì No
Rette del piano	essere parallela a	Sì No
Poligoni	avere lo stesso numero di lati di	Sì No
Città della Lombardia	terminare con la stessa vocale	Sì No
Parole italiane	essere il plurale di	Sì No

7.19. Quali delle seguenti relazioni sono antiriflessive?

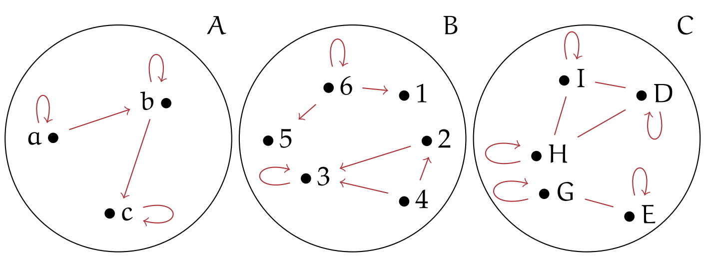


Figura 7.14

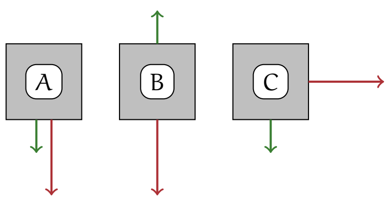


Figura 7.15

Insieme	Relazione	È antiriflessiva?
Numeri naturali	essere multiplo di	Sì No
Rette del piano	essere perpendicolare a	Sì No
Poligoni	avere lo stesso perimetro	Sì No
Città del Piemonte	avere più abitanti di	Sì No
Parole italiane	essere il femminile di	Sì No
Fiumi italiani	essere affluente di	Sì No
Persone	essere figlio di	Sì No

7.20. Riconosci le relazioni simmetriche:

Insieme	Relazione	È simmetrica?
Città d'Italia	appartenere alla stessa regione	Sì No
Rette del piano	essere perpendicolare a	Sì No
Solidi	avere lo stesso volume di	Sì No
Persone	essere il padre di	Sì No
Persone	essere fratello o sorella di	Sì No
Numeri naturali	avere lo stesso numero di cifre di	Sì No
Fiumi d'Europa	essere affluente di	Sì No
Numeri interi	essere il quadrato di	Sì No
Persone	abitare nello stesso comune	Sì No

Le relazioni degli ultimi due casi non godono della proprietà simmetrica. Infatti:

- la proposizione "Il Ticino è un affluente del Po" è vera, ma non lo è la proposizione che da essa si ottiene scambiando il soggetto con il complemento;
- se un numero intero è il quadrato di un altro (ad esempio $+25$ è il quadrato di $+5$), non è vero il contrario (infatti $+5$ non è il quadrato di $+25$).

7.21. Riconosci le relazioni antisimmetriche:

Insieme	Relazione	È antisimmetrica?
Numeri naturali	essere divisibile per	Sì No
Rette del piano	essere perpendicolare a	Sì No
Poligoni	avere lo stesso perimetro di	Sì No
Angoli	essere complementare a	Sì No
Città del Lazio	essere nella stessa provincia di	Sì No

7.22. Verifica se, nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, la relazione $\mathfrak{R}$: "avere lo stesso numero di cifre" gode della proprietà transitiva. Completa le proposizioni e rappresenta $\mathfrak{R}$ con un grafo:

a) da $18\,\mathfrak{R}\,50$ e $50\,\mathfrak{R}\,\ldots$ segue $\ldots\,\mathfrak{R}\,\ldots$;
b) da $\ldots\,\mathfrak{R}\,555$ e $\ldots\,\mathfrak{R}\,267$ segue $\ldots\,\mathfrak{R}\,\ldots$

7.23. Indica quale tra le seguenti relazioni è transitiva:

Insieme	Relazione	È transitiva?
Numeri naturali	essere multiplo di	Sì No
Regioni d'Italia	essere più a nord di	Sì No
Numeri interi	essere minore di	Sì No
Rette del piano	essere perpendicolare a	Sì No
Persone	essere padre di	Sì No
Stati d'Europa	confinare con	Sì No

7.24. Dai una rappresentazione tabulare dell'insieme $H = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 12\}$; determina il resto della divisione di ciascun numero di H con 4, compila la tabella come suggerito nell'esempio:

operazione	$0:4$	$1:4$	$2:4$	$\dots$	$11:4$	$12:4$
resto	0	1	$\dots$		3	0

Introduciamo in H la relazione $x\,\mathfrak{R}\,y$ se e solo se "x e y hanno lo stesso resto nella divisione per 4". Costruisci il grafo della relazione e stabilisci se gode della proprietà transitiva.

La stessa relazione $\mathfrak{R}$, introdotta nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è una relazione transitiva?

7.25. Indica le proprietà che verificano le seguenti relazioni.

(R=riflessiva, S=simmetrica, T=transitiva, AS=antisimmetrica, AR=antiriflessiva)

Insieme	Relazione	Proprietà
Poligoni del piano	avere lo stesso numero di lati	[R] [S] [T] [AS] [AR]
Numeri naturali	avere lo stesso numero di cifre	[R] [S] [T] [AS] [AR]
Numeri naturali	essere minore di	[R] [S] [T] [AS] [AR]
Numeri naturali	essere divisibile per	[R] [S] [T] [AS] [AR]
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$	essere multiplo di	[R] [S] [T] [AS] [AR]
Auto	essere della stessa marca costruttrice	[R] [S] [T] [AS] [AR]

7.4 - Relazioni di equivalenza

7.26. Quali delle seguenti sono relazioni di equivalenza?

Relazione	Insieme	È d'equivalenza?
Essere multiplo	numeri naturali	V F
Avere lo stesso numero di sillabe	parole italiane	V F
Essere minore	interi relativi	V F
Vincere	squadre di calcio	V F
Avere lo stesso numero di angoli	poligoni	V F
Essere il plurale	parole italiane	V F
Essere il cubo	numeri italiani	V F

7.27. Fissa l'attenzione sulla relazione $\mathfrak{R}$: "frequentare la stessa classe" introdotta nell'insieme S degli alunni iscritti nella tua scuola. Verifica che $\mathfrak{R}$ è una relazione d'equivalenza. Costruisci le classi d'equivalenza. Quante ne hai potute formare? Come sono indicate nella realtà che vivi quotidianamente? Determina la partizione $P(S)$ in classi d'equivalenza e infine l'insieme quoziente $S/\mathfrak{R}$.

7.28. Studia in $\mathbb{N}$ la relazione $\mathfrak{R}$: "avere la stessa cifra delle unità". Verifica se è una relazione d'equivalenza, costruisci l'insieme quoziente dopo aver risposto alle seguenti domande:

- quanti numeri naturali sono tra loro equivalenti?
- da quanti elementi è costituito l'insieme $\mathbb{N}/\mathfrak{R}$?
- qual è l'elemento che sceglieresti come rappresentante di ciascuna classe?

7.29. Considera la relazione $\mathfrak{R}$: "avere lo stesso resto nella divisione per due" introdotta nell'insieme $\mathbb{N}$ e studiane le proprietà.

- è una relazione d'equivalenza? Se la risposta è affermativa, costruisci l'insieme quoziente $\mathbb{N}/\mathfrak{R}$.
- quante classi d'equivalenza hai formato?
- puoi sfruttare quanto ottenuto per enunciare le definizioni di numero pari e di numero dispari?
- giustifica, in base allo svolgimento dell'esercizio, l'affermazione: "L'insieme dei numeri pari è il complementare in $\mathbb{N}$ dell'insieme dei numeri dispari".

7.30. Considera l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 20\}$ e i suoi sottoinsiemi: $A_1 = \{1, 5, 9, 13, 17\}$, $A_2 = \{2, 6, 10, 14, 18\}$, $A_3 = \{3, 7, 11, 15, 19\}$, $A_4 = \{4, 8, 12, 16, 20\}$.

a) Rappresenta gli insiemi con un diagramma di Eulero-Venn;
b) si può affermare che quei sottoinsiemi costituiscono una partizione dell'insieme A?
c) è vero che a ciascuno dei suddetti sottoinsiemi appartengono i numeri di A aventi lo stesso resto nella divisione per 4?
d) quei sottoinsiemi sono dunque classi d'equivalenza? Qual è il predicato della relazione che le determina?

7.31. Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali stabilisci se è d'equivalenza la relazione $\mathfrak{R}$: "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se x ha le stesse cifre di y".

7.32. Nell'insieme C degli alunni della tua classe, verifica se la relazione $\mathfrak{R}$: "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se il cognome di x ha la stessa lettera iniziale del cognome di y" è d'equivalenza; determina in caso affermativo la partizione dell'insieme C e l'insieme quoziente $C/\mathfrak{R}$.

7.33. Nell'insieme delle parole della lingua italiana verifica se la relazione "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se x ha lo stesso numero di lettere di y" è una relazione di equivalenza. In caso affermativo individua alcune classi di equivalenza.

7.34. Nell'insieme dei nomi dei giorni della settimana considera la relazione "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se x e y scritti in lettere, hanno almeno tre lettere in comune". Verifica se è una relazione di equivalenza e in caso affermativo individua le classi di equivalenza.

7.35. Nell'insieme dei numeri naturali da 1 a 100, verifica se la relazione "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se x e y hanno lo stesso numero di lettere" è una relazione di equivalenza. Individua quante sono le classi di equivalenza. Scrivi tutti gli elementi delle classi di equivalenza [1] e [10].

7.36. Nell'insieme dei numeri naturali da 1 a 100, verifica se la relazione "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se $x + y$ è dispari" è una relazione di equivalenza.

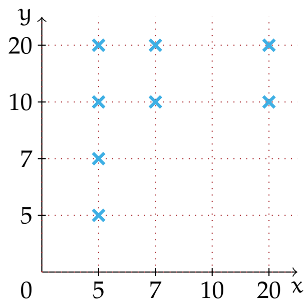
7.37. Nell'insieme dei nomi dei mesi dell'anno verifica se la relazione "$x \,\mathfrak{R}\, y$ se e solo se x e y hanno lo stesso numero di giorni" è una relazione di equivalenza. Eventualmente individua le classi di equivalenza.

7.5 - Relazioni di ordine

7.38. Nell'insieme $M = \{1, 8, 3, 4, 10, 2, 7, 0, 5, 9, 6\}$ viene introdotta la relazione $\mathfrak{R}$ così definita: "$x \mathfrak{R} y$ se e solo se $y - x$ appartiene a $\mathbb{N}$". La relazione è riflessiva? La relazione è antisimmetrica? La relazione è transitiva? È vero che due elementi distinti sono sempre confrontabili?

7.39. Verifica che la relazione $\mathfrak{R}$: "essere divisore" introdotta nell'insieme $J = \{3, 6, 10, 15, 21\}$ è una relazione d'ordine parziale in senso largo.

7.40. Perché la relazione $\mathfrak{R}$ rappresentata dal grafico cartesiano riportato nella figura, pur essendo una relazione d'ordine non può essere classificata in nessuna delle tipologie studiate? Dai una breve motivazione indicando quali proprietà non sono soddisfatte dalla relazione rappresentata.



7.41. Nell'insieme degli studenti della tua classe determina le proprietà della relazione $\mathfrak{R}$: "$x \mathfrak{R} y$ se e solo se l'altezza di x non supera l'altezza di y". È una relazione d'ordine? Di quale tipo?

7.42. Nell'insieme $A = \{12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60\}$ la relazione $\mathfrak{R}$: "essere divisibile" è una relazione d'ordine? Se lo è, di che tipo di relazione si tratta? Totale, parziale, in senso largo, in senso stretto?

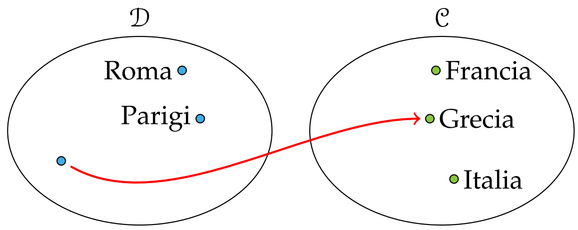
7.43. Nell'insieme $\mathbb{N} - \{0\}$ la relazione "essere divisibile" è d'ordine totale in senso largo?

7.6 - Relazioni tra due insiemi diversi

7.44. Rappresenta con un grafico cartesiano la relazione $\mathfrak{R}$: "essere nato nell'anno" di dominio l'insieme A = {Galileo, Napoleone, Einstein, Fermi, Obama} e codominio l'insieme B ={1901, 1564, 1961, 1879, 1769, 1920, 1768}. Rappresenta per elencazione il sottoinsieme $G_{\mathfrak{R}}$ del prodotto cartesiano $A \times B$. Stabilisci infine gli elementi dell'immagine IM..

7.45. L'insieme S = {casa, volume, strada, ufficio, clavicembalo, cantautore, assicurazione} è il codominio della relazione $\mathfrak{R}$: "essere il numero di sillabe di" il cui dominio è $X = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 10\}$. Rappresenta con un grafico cartesiano la relazione assegnata, evidenzia come nel primo esempio di questo paragrafo l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$, scrivi per elencazione l'insieme IM..

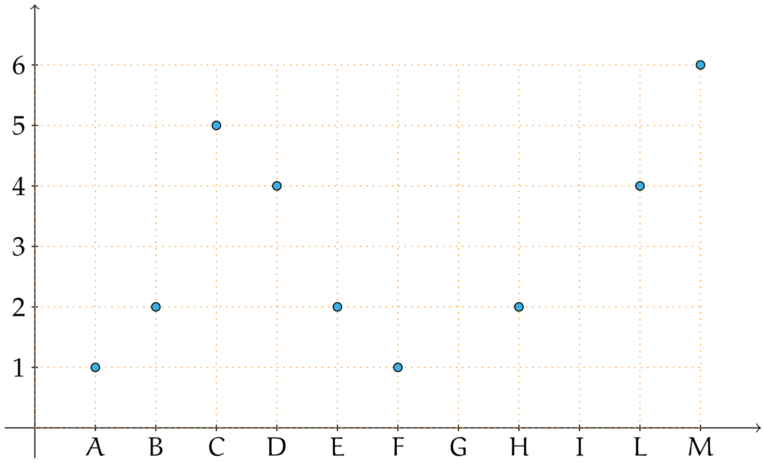
7.46. Completa la rappresentazione con grafico sagittale della relazione "essere capitale di". La freccia che collega gli elementi del dominio con quelli del codominio rappresenta il predicato $\mathfrak{R}$: "essere la capitale di".



7.47. È univoca la relazione $\mathfrak{R}$ definita tra l'insieme P = {parola del proverbio "rosso di sera, bel tempo si spera"} e l'insieme A ={lettere dell'alfabeto italiano} che associa ad ogni parola la sua iniziale? Ti sembra corretto affermare che dominio e insieme di definizione coincidono? Completa con il simbolo corretto la relazione tra insieme immagine e codominio: IM.... $\mathcal{C}$. Fai il grafico sagittale della relazione.

7.48. $\mathfrak{R}$ è la relazione tra l'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali e l'insieme degli interi relativi $\mathbb{Z}$ espressa dal predicato "essere il quadrato di". Ti sembra corretto affermare che dominio e insieme di definizione coincidono? Perché IM. $= \mathcal{C}$? La relazione è univoca?

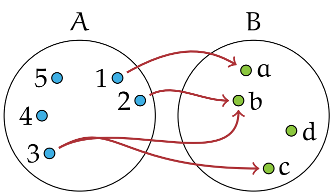
7.49. Una relazione $\mathfrak{R}$ è assegnata con il suo grafico cartesiano.

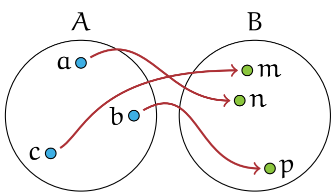


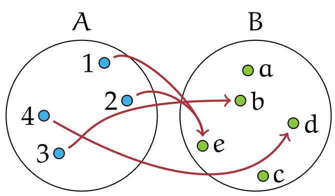
Completa e rispondi alle domande:

a) $\mathcal{D}$ ={. . . . .};
b) $\mathcal{C}$ ={. . . . .};
c) I. D. ={. . . . .};
d) IM. ={ . . . . };
e) la relazione è biunivoca?
f) 2 è l'immagine di quali elementi dell'insieme di definizione?
g) quale elemento del codominio è l'immagine di M?

7.50. I tre grafici sagittali rappresentano altrettante corrispondenze, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$. Completa per ciascuna di esse la descrizione schematizzata nel riquadro sottostante:







$\mathcal{D} =$	...	$\mathcal{D} =$	...	$\mathcal{D} =$	...
$\mathcal{C} =$	...	$\mathcal{C} =$	...	$\mathcal{C} =$	...
I. D. =	...	I. D. =	...	I. D. =	...
IM. =	...	IM. =	...	IM. =	...
Tipo=	...	Tipo=	...	Tipo=	...

7.7.2 Esercizi riepilogativi

7.51. L'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ di una relazione introdotta nell'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$ è $G_{\mathfrak{R}} = \{(a;a), (a;b), (b;b), (d;d), (c;d), (d;e), (e;e)\}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera

a) $\mathfrak{R}$ è una relazione antiriflessiva;
b) $\mathfrak{R}$ è una relazione solo antisimmetrica;
c) $\mathfrak{R}$ è una relazione riflessiva;
d) $\mathfrak{R}$ è una relazione transitiva e antisimmetrica;

7.52. La relazione $\mathfrak{R}$: "essere vicini di banco" inserita nell'insieme degli alunni della tua classe è una relazione d'equivalenza? È una relazione d'ordine?

7.53. I tre sottoinsiemi $A_1 = \{36, 135, 432\}$, $A_2 = \{65\}$ e $A_3 = \{66, 3\,522, 93, 435\}$ dell'insieme $A = \{36, 65, 66, 93, 135, 432, 435, 3\,522\}$ costituiscono una partizione dell'insieme A? Sapresti trovare una caratteristica per gli elementi di ciascun sottoinsieme? A_1, A_2, A_3 sono classi d'equivalenza?

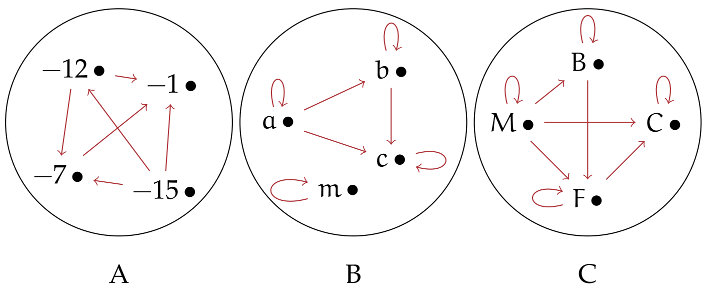
7.54. La relazione $\mathfrak{R}$: "$x\,\mathfrak{R}\,y$ se e solo se x sta nella stessa nazione di y" nell'insieme $K = \{$Parigi, Madrid, Milano, Siviglia, Bari, Granada, Venezia, Lione$\}$ è d'equivalenza? Costruisci $A/\mathfrak{R}$.

7.55. Verifica se la relazione $\mathfrak{R}$ assegnata con la matrice rappresentata sotto è d'equivalenza. In caso positivo determina la partizione dell'insieme $A = \{\square, \lozenge, \infty, \nabla\}$ e l'insieme quoziente $A/\mathfrak{R}$.

	$\square$	$\lozenge$	∞	∇
$\square$	1	1	0	0
$\lozenge$	1	1	0	0
∞	0	0	1	1
∇	0	0	1	1

7.56. Associa a ciascun grafo della figura la corretta relazione d'ordine:

a) ordine totale in senso largo;
b) ordine totale in senso stretto;
c) ordine parziale in senso largo;
d) ordine parziale in senso stretto.



7.57. In un torneo di pallavolo gareggiano quattro squadre A, B, C, D; rappresenta con un grafo a frecce le seguenti informazioni, relative alle prime tre giornate:

- 1^a giornata: A vince contro B; C vince contro D;
- 2^a giornata: D vince contro A; B vince contro C;
- 3^a giornata: A vince contro C; B vince contro D;

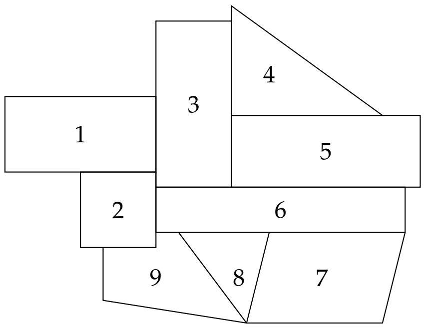
Il 4^o giorno si gioca la semifinale tra le prime due classificate e le altre due. Se per ogni vittoria si ottiene un punteggio di 10 punti e per ogni sconfitta un punteggio di 2 punti, quale squadra gioca la semifinale con B? Il torneo è vinto dalla squadra C. Rappresenta con un grafo a frecce la situazione della semifinale e quella della finale. È unica la risposta a quest'ultimo quesito?

7.58. Analizza le proprietà delle seguenti relazione e stabilisci se sono relazioni di equivalenza o di ordine e in questo caso di che tipo sono.

Insieme	Relazione
$\mathbb{N}$	$x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x$ è la metà di y
$\mathbb{Z}$	$x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x$ è il quadrato di y
$\mathbb{N}$	$x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x + y \leqslant x \cdot y$
Persone	$a \mathfrak{R} b \Leftrightarrow a$ è più giovane di b
Persone	$a \mathfrak{R} b \Leftrightarrow a$ non è più vecchio di b
Cittadini italiani	$a \mathfrak{R} b \Leftrightarrow a$ risiede in una regione che confina con quella di b
Rette del piano	$r \mathfrak{R} s \Leftrightarrow r$ interseca s
Alunni della classe	$a \mathfrak{R} b \Leftrightarrow a$ ha il nome con lo stesso numero di lettere di quello di b
$\mathbb{Z}$	$a \mathfrak{R} b \Leftrightarrow a^2 = b^2$
Parole italiane	$p \mathfrak{R} q \Leftrightarrow p = q$ oppure p precede q in uno specifico vocabolario
$\mathbb{N}$	$n \mathfrak{R} m \Leftrightarrow n \cdot m$ è dispari
$\mathbb{N}$	$n \mathfrak{R} m \Leftrightarrow n + m$ è dispari
Iscritti a Facebook	$a \mathfrak{R} b \Leftrightarrow a$ ha più amici di b
Parole italiane	$p \mathfrak{R} q \Leftrightarrow p$ ha meno lettere di q
$\mathbb{N}$	$n \mathfrak{R} m \Leftrightarrow n$ ha lo stesso numero di cifre di m
Persone	$a \mathfrak{R} b \Leftrightarrow a$ abita nella stessa via di b
Persone	$a \mathfrak{R} b \Leftrightarrow a$ parla la stessa lingua di b
Persone	$a \mathfrak{R} b \Leftrightarrow a$ ha lo stesso cognome di b
$\mathbb{N}$	$n \mathfrak{R} m \Leftrightarrow n$ ha un divisore diverso da 1 in comune con m
$\mathbb{Z}$	$x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x \cdot y$ è negativo

7.59. Andrea, insegnante di grafica, ha chiesto ai suoi alunni di usare il minimo numero di colori per colorare il modello della figura sottostante in modo che poligoni confinanti non risultino con lo stesso colore. Come si può risolvere il problema? [Risposta: 3 colori]

Traccia di soluzione: Nell'insieme $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ studia la relazione $\mathfrak{R}$: "confinare con", rappresentandola con un grafico cartesiano e sfrutta i risultati trovati per risolvere il problema. La soluzione può essere trovata fissando un punto interno a ciascuna regione: due punti sono uniti se e solo se le regioni confinano, il segmento che li congiunge deve attraversare solo il loro confine comune; i punti che non sono congiunti indicano regioni che avranno lo stesso colore.



Funzioni 8

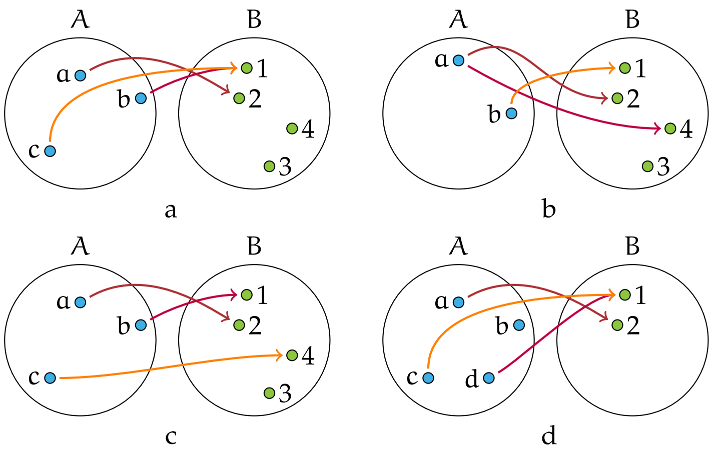
8.1 Funzioni

Diamo la seguente definizione

Definizione 8.1. Dati due insiemi A e B non vuoti, una *funzione* f è una *legge* che associa a ogni elemento di A un ben elemento definito di B.

In altre parole ogni elemento del dominio A è in corrispondenza con un solo elemento del codominio B.

Esempio 8.1. Analizziamo le relazioni rappresentate con grafico sagittale:



Le corrispondenze rappresentate nelle figure a e c sono funzioni da A in B poiché in tali casi tutti gli elementi del dominio A hanno un corrispondente nel codominio B.

La corrispondenza della figura b non rappresenta una funzione da A in B perché l'elemento $a \in A$ è in corrispondenza con due elementi di B, il 2 e il 4, quindi la corrispondenza non è univoca. Anche la corrispondenza della figura d non è una funzione da A in B perché il dominio non coincide con l'insieme A.

I termini funzione o applicazione sono sinonimi, tuttavia si preferisce usare il termine "funzione" quando i due insiemi A e B sono insiemi numerici. Solitamente una funzione viene indicata con la lettera f. Per indicare che la funzione f trasforma elementi dell'insieme A in elementi dell'insieme B usiamo una delle seguenti scritture

$$f : A \to B \quad \text{oppure} \quad A \xrightarrow{f} B$$

Definizione 8.2. L'elemento y di B, corrispondente di un elemento x del dominio, viene detto *immagine di* x *nella funzione* f e si scrive $y = f(x)$ che si legge "y uguale a effe di x".

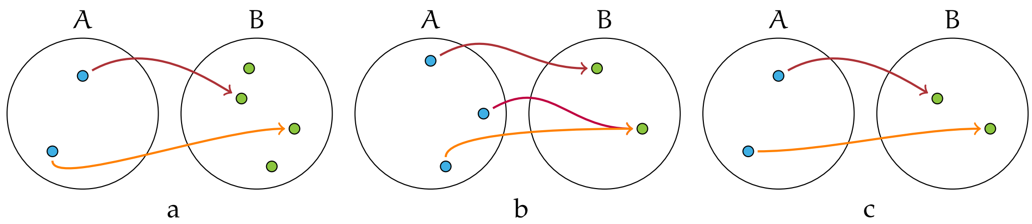
L'insieme A si chiama *dominio*, l'insieme B *codominio*.

Il sottoinsieme proprio o improprio del codominio B formato dagli elementi che sono immagini degli elementi del dominio $\mathcal{D}$ secondo la funzione f si chiama *insieme immagine* e si scrive $\text{IM.} = f(\mathcal{D})$. Osserviamo che non necessariamente ogni elemento del codominio è immagine di un elemento del dominio per cui $\text{IM.} \subseteq \mathcal{C}$.

✍ *Esercizi proposti:* 8.1, 8.2, 8.3

8.1.1 Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche

Esempio 8.2. Nella figure sottostanti sono rappresentate alcune funzioni:



Nella figura a si ha $\text{IM.} \subset B$: elementi distinti del dominio A hanno immagini distinte nel codominio B, ma non tutti gli elementi di B sono corrispondenti di un elemento di A.

Nella figura b si ha $\text{IM.} = B$ ma alcuni elementi distinti del dominio A hanno la stessa immagine nel codominio B.

Nella figura c si ha $\text{IM.} = B$ ed elementi distinti del dominio A hanno immagini distinte nel codominio B.

I tre esempi precedenti (a, b, c) illustrano tre tipi diversi di funzioni:

Definizione 8.3. Si dice *iniettiva* una funzione per la quale elementi distinti del dominio $\mathcal{D}$ hanno immagini distinte nel codominio $\mathcal{C}$: $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D} \mid x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definizione 8.4. Si dice *suriettiva* una funzione per la quale $\text{IM.} = \mathcal{C}$.

Definizione 8.5. Si dice *biunivoca* o *biiettiva* una funzione che sia contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

Pertanto nella figura a è rappresentata una funzione iniettiva, nella figura b una funzione suriettiva e nella c una funzione biunivoca.

✍ *Esercizi proposti:* 8.4, 8.5

8.2 Funzioni tra insiemi numerici

Analizziamo alcune corrispondenze definite tra gli insiemi numerici. In questo caso la funzione f può essere espressa tramite una formula o scrittura analitica, una tabella, un algoritmo, oppure semplicemente con linguaggio comune, purché in modo preciso e inequivocabile. Il generico elemento x del dominio si chiama *variabile indipendente* e il corrispondente elemento $y = f(x)$ si chiama *variabile dipendente*.

Esempio 8.3. Consideriamo la corrispondenza **K**: "essere il valore assoluto di" tra l'insieme $\mathbb{N}_0$ dei naturali diversi da zero e l'insieme $\mathbb{Z}_0$ degli interi relativi diversi da zero.

Questa corrispondenza non è una funzione in quanto non è una corrispondenza univoca: ogni elemento di $\mathbb{N}_0$ ha due immagini poiché ogni numero naturale è valore assoluto di due interi opposti, come rappresentato dalla figura 8.1.

Esempio 8.4. Consideriamo la corrispondenza **K** che associa ad ogni numero razionale il suo quadrato.

Essa è una funzione di dominio $\mathbb{Q}$ e codominio $\mathbb{Q}$: di ogni numero razionale si può determinare il quadrato che è unico; poiché numeri opposti hanno lo stesso quadrato la funzione in esame *non* è *iniettiva*, come rappresentato dalla figura 8.2.

L'immagine y di ogni x appartenente a $\mathbb{Q}$ è il suo quadrato: in simboli matematici scriviamo la funzione tramite una formula $f : y = x^2$.

Per quanto riguarda l'insieme immagine della funzione esso è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{Q}$: ad esempio, il numero razionale $+\frac{3}{4}$ non è quadrato di nessun razionale e neppure -25, razionale negativo, è quadrato di un numero razionale, quindi IM. $\subset \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, pertanto la funzione da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$ non è suriettiva.

Esempio 8.5. Analizziamo la corrispondenza che associa ad ogni intero il suo valore assoluto.

Sappiamo che il valore assoluto di un intero è un numero naturale, e ogni intero ha un solo valore assoluto. La corrispondenza è univoca e il dominio coincide con l'insieme $\mathbb{Z}$, pertanto è una funzione: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ che è rappresentata in forma analitica con la scrittura $y = |x|$ con $x \in \mathbb{Z}$ e $y = f(x) \in \mathbb{N}$.

$x \in \mathbb{Z}$	0	+1	−1	−2	+2	+3	−3	...
$y \in \mathbb{N}$	0	1	1	2	2	3	3	...

Nella tabella sono rappresentati alcuni elementi del dominio con le rispettive immagini: da cui si deduce che tale funzione non è iniettiva.

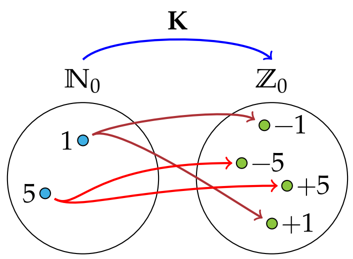


Figura 8.1

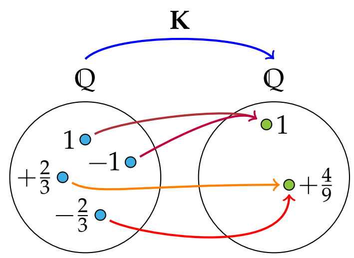


Figura 8.2

Esempio 8.6. È assegnata la funzione $f : x \in \mathbb{N} \to (x-2) \in \mathbb{Z}$. In questo caso la funzione associa ad ogni numero naturale x il numero intero ottenuto sottraendogli 2. L'espressione analitica della funzione f è: $y = x - 2$. La legge così espressa si può descrivere anche attraverso una tabella.

$x \in \mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	...
$(x-2) \in \mathbb{Z}$	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	...

Ogni elemento dell'insieme $\mathbb{N}$ trova il corrispondente in $\mathbb{Z}$; elementi diversi del dominio hanno immagini diverse pertanto la funzione è *iniettiva*; l'insieme immagine è un sottoinsieme proprio del codominio $\mathbb{Z}$ e precisamente $\text{IM} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \geqslant -2\} \subset \mathbb{Z}$, pertanto la funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ non è suriettiva.

Esempio 8.7. Analizziamo la corrispondenza: $f_1 : x \in \mathbb{N} \to (x-2) \in \mathbb{N}$ e costruiamo la relativa tabella:

$x \in \mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	...
$(x-2) \in \mathbb{N}$			0	1	2	3	4	...

Vediamo che nella corrispondenza assegnata né 0 né 1 hanno l'immagine in $\mathbb{N}$.

Fissiamo allora come dominio $\mathcal{D}$ un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ e precisamente $\mathcal{D} = \text{I. D.} = \mathbb{N} - \{0, 1\}$; in questo modo possiamo procedere nell'analisi della funzione $f_1 : y = x - 2$.

Esempio 8.8. Consideriamo la corrispondenza che associa ad ogni numero razionale il suo inverso (o reciproco).

Sappiamo che "fare l'inverso" di un numero razionale x significa scrivere il numero razionale $\frac{1}{x}$, ma questa operazione ha significato solo se x è diverso da 0; operiamo dunque una restrizione su $\mathbb{Q}$ e fissiamo $\mathcal{D} = \text{I. D.} = \mathbb{Q}_0$. La corrispondenza è una funzione $f : y = \frac{1}{x}$ da $\mathbb{Q}_0$ in $\mathbb{Q}$.

✍ *Esercizi proposti:* 8.6, 8.7, 8.8, 8.9, 8.10, 8.11

8.2.1 Funzioni inverse

È assegnata la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descritta mediante le istruzioni

prendi $x \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ moltiplica per 2 $\longrightarrow$ aggiungi 1 $\longrightarrow$ scrivi y

La forma algebrica è $y = 2 \cdot x + 1$; essa è definita per qualunque numero reale, quindi $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ e l'insieme immagine coincide con il codominio, $\text{IM.} = \mathcal{C} = \mathbb{R}$. Scelto arbitrariamente un valore per la variabile indipendente come $x = -2$ otteniamo la sua immagine $y = f(-2) = -3$, risultato delle operazioni descritte nelle istruzioni.

Preso ora $y = 4$, elemento dell'insieme immagine della funzione, quali istruzioni dobbiamo seguire per determinarne la controimmagine? Cioè di quale elemento di $\mathcal{D}$ è immagine il valore 4? Per quale valore di x aggiungendo 1 al suo doppio si ottiene 4? La questione è rappresentata nel diagramma di Eulero-Venn della figura 8.3 e percorrendo le istruzioni con le operazioni inverse otteniamo il valore di x sottraendo 1 al valore dato per y e dividendo il risultato per 2. Le istruzioni da eseguire per determinare la controimmagine sono quindi:

In formula $x = (y-1) : 2$. La funzione così ottenuta si chiama *funzione inversa* di $f(x)$, che è quella che dato un elemento di IM. ci fornisce l'elemento di $\mathcal{D}$ di cui è l'immagine. Questo è possibile poiché la funzione assegnata è iniettiva, e pertanto ci rendiamo subito conto che è invertibile, cioè che per ogni $y \in$ IM. possiamo determinare la sua controimmagine $x \in \mathcal{D}$.

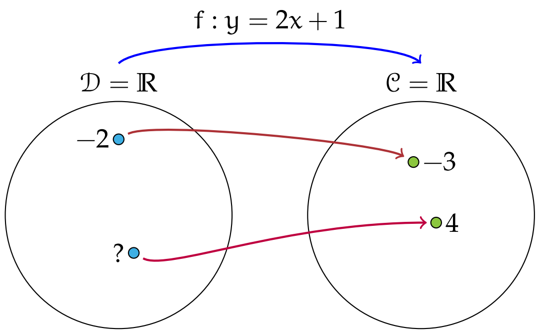


Figura 8.3: Funzioni inverse.

Definizione 8.6. Data una funzione iniettiva $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tale che $y = f(x)$ si definisce la sua *funzione inversa* f^{-1} : IM. $\to \mathcal{D}$ come quella che permette di determinare la controimmagine di un qualunque elemento di IM., ovvero $x = f^{-1}(y)$.

Osserviamo che $\mathcal{D}\left(f^{-1}\right) =$ IM.(f) e IM. $\left(f^{-1}\right) = \mathcal{D}(f)$.

✍ *Esercizio proposto:* 8.12

8.3 Funzioni composte

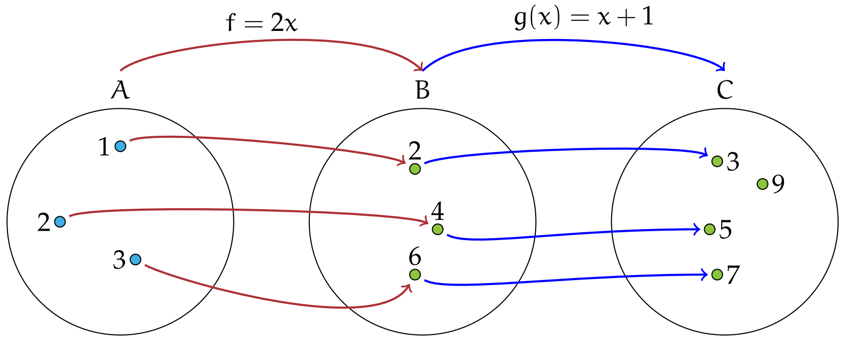
Definizione 8.7. Date due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ si definisce la *funzione composta*

$$g \circ f : A \to C$$

una funzione che a un elemento $a \in A$ associa prima l'elemento $b = f(a) \in B$ e poi l'elemento $c = g(b) \in C$. In un'unica formula si può scrivere $g(f(a)) = c$.

Esempio 8.9. Data la funzione $f(x) = 2x$ e la funzione $g(x) = x^2 + 1$, determina l'espressione analitica della funzione composta.

Prima agisce la funzione f che raddoppia il valore di x. Al valore così ottenuto, che è $2x$, si applica la g che lo eleva al quadrato e gli aggiunge 1. Pertanto la funzione composta quadruplica il quadrato di x e poi aggiunge 1. L'espressione è $g(f(x)) = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1$.



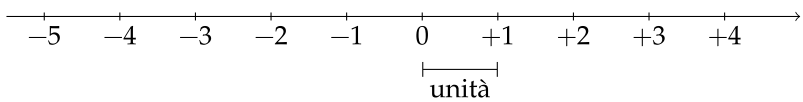
Osserva che la composizione di funzioni non è commutativa. Infatti, nell'esempio precedente, la funzione $f(g(x))$ si ottiene facendo agire prima la $g(x)$ che eleva al quadrato il valore della variabile e lo aumenta di 1 e poi la $f(x)$ che raddoppia il valore di quanto ottenuto; allora $f(g(x)) = 2(x^2 + 1) = 2x^2 + 2$.

✍ *Esercizi proposti:* 8.13, 8.14, 8.15, 8.16

8.4 La retta e gli insiemi numerici

Nello studio degli insiemi numerici abbiamo visto come si possono depositare su una semiretta i numeri naturali; la legge costruttiva di questa rappresentazione genera tra l'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ e i punti della semiretta una corrispondenza avente come dominio $\mathbb{N}$ e come codominio i punti della semiretta. Ad ogni numero naturale possiamo far corrispondere un punto della semiretta, ma non tutti i punti della semiretta sono immagine di un numero naturale: la corrispondenza non è biunivoca.

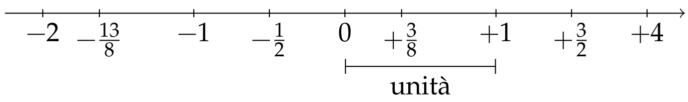
Lo stesso fatto avviene se consideriamo l'insieme $\mathbb{Z}$ come dominio e i punti di una retta orientata come codominio; nella figura seguente viene rappresentata la corrispondenza generata con la legge costruttiva già enunciata nel capitolo dei numeri interi $\mathbb{Z}$.



Ad ogni numero intero possiamo far corrispondere un punto della retta orientata, ma non tutti i punti della retta sono immagine di un numero intero: l'insieme immagine non coincide con il codominio e la corrispondenza non è biunivoca.

Gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono infiniti e la loro caratteristica comune è che tra due naturali consecutivi o tra due interi consecutivi non possiamo trovarne un altro. Si dice che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono due *insiemi discreti*.

Consideriamo ora l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali; sappiamo che anche questi numeri, rappresentati da frazioni, possono essere disposti su una retta orientata come mostrato nella figura sottostante.



L'insieme $\mathbb{Q}$ rispetto agli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ presenta un'altra caratteristica: è *denso*, cioè tra due numeri razionali ci sono infiniti altri numeri razionali. Come possiamo confermare questa affermazione?

Osserviamo la figura precedente: fra $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{2}$ si trova certamente il numero 1. Costruiamo il numero $q = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{2}\right)$ ottenuto dividendo per due la somma dei due numeri estremi dell'intervallo considerato, si ottiene $q = \frac{15}{16}$ che è minore di 1 e, a maggior ragione, minore di $\frac{3}{2}$, ma maggiore di $\frac{3}{8}$, come si può verificare trasformando la frazione in una equivalente con denominatore 16. Con lo stesso procedimento possiamo determinare $q_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{15}{16}\right) = \frac{21}{32}$ che risulta maggiore di $\frac{3}{8}$ e minore di q. Con questo procedimento, che non ha mai termine, possiamo determinare infiniti altri numeri razionali compresi tra $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{2}$.

Questa possibilità ci fa supporre che tutti i punti della retta orientata possano essere immagine di un numero razionale, cioè che esista una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{Q}$ e i punti della retta. Invece, no! Benché l'insieme $\mathbb{Q}$ sia infinito e denso, quando pensiamo di aver disposto sulla retta tutti i suoi elementi su quest'ultima rimangono ancora altri punti liberi (es. $\sqrt{2}$). La retta geometrica sembra avere "più punti" di quanti siano i numeri razionali: gli infiniti punti lasciati scoperti dai razionali sono immagine di numeri irrazionali $\mathbb{J}$.

L'insieme $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$ è l'insieme dei numeri reali, cui Cantor attribuì la cardinalità (o potenza) del *continuo* $\aleph_1$ (superiore a quella *numerabile* dei numeri naturali $\aleph_0$). La retta geometrica orientata è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$, quindi ad ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta orientata e un punto della retta è immagine di un solo numero reale (razionale o irrazionale).

Definizione 8.8. Si chiama *ascissa di un punto* sulla retta reale il numero reale α che è la sua immagine nella corrispondenza biunivoca.

$$\overline{OD}^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow \overline{OD} = \sqrt{3}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 8.17, 8.18, 8.19

8.5 Il metodo delle coordinate cartesiane

Abbiamo definito prodotto cartesiano di due insiemi non vuoti A e B l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartenga ad A e il secondo a B. Mediante proprietà caratteristica si scrive: $A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Esempio 8.10. Il prodotto cartesiano dei due insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y\}$ è

$$A \times B = \{(1; x), (1; y), (2; x), (2; y), (3; x), (3; y)\}$$

e graficamente si può rappresentare con un diagramma cartesiano come nella figura 8.4.

Sappiamo che una retta orientata, fissata una unità di misura arbitraria, è l'immagine geometrica dell'insieme dei numeri reali: ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta e un qualunque punto della retta è immagine di un solo numero reale.

8.5.1 Introduzione al sistema di riferimento cartesiano ortogonale

Preso l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, costruiamo il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: esso è costituito dall'insieme delle coppie ordinate tali che il primo elemento sia un numero reale come pure il secondo elemento. In $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avremo coppie il cui primo elemento è 0, coppie il cui primo elemento è un numero positivo e infine coppie il cui primo elemento è un numero negativo, coppie che possiamo sinteticamente rappresentare nel seguente modo:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(0; 0), (0; +), (0; -), (+; 0), (-; 0), (+; +), (+; -), (-; +), (-; -)\}.$$

È possibile dare una rappresentazione grafica di questo insieme di infiniti elementi?

Consideriamo sul piano una coppia di rette perpendicolari, indichiamo con O il loro punto di intersezione, fissiamo convenzionalmente un verso di percorrenza su ciascuna retta (convenzionalmente sull'orizzontale da sinistra a destra e sulla verticale dal basso all'alto) e infine scegliamo un segmento arbitrario come unità di misura. Indichiamo con x l'asse orizzontale che chiamiamo *asse delle ascisse* e con y l'asse verticale che chiamiamo *asse delle ordinate* (figura 8.5).

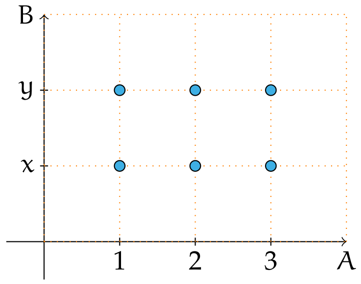


Figura 8.4

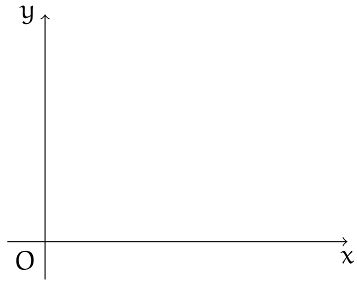


Figura 8.5: Il piano cartesiano.

Definizione 8.9. Si chiama *riferimento cartesiano ortogonale monometrico* la coppia di rette orientate, perpendicolari, dotate di unità di misura.

Gli assi dividono il piano in quattro zone chiamate *quadranti* che sono numerati come in figura 8.6. Ogni punto dell'asse delle ascisse è immagine di un numero reale: O è l'immagine di zero, i punti alla sua destra rappresentano i numeri reali positivi, quelli alla sua sinistra tutti i numeri reali negativi; analogamente sull'asse delle ordinate il punto O è l'immagine dello zero, sopra di questo si collocano i numeri positivi e sotto i numeri negativi (figura 8.7).

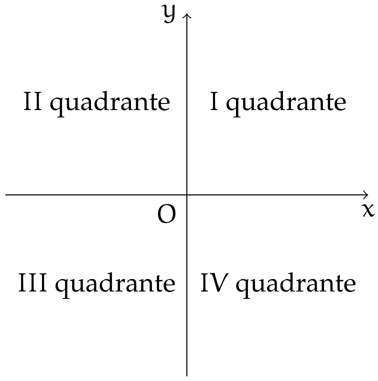


Figura 8.6: I quattro quadranti del piano cartesiano.

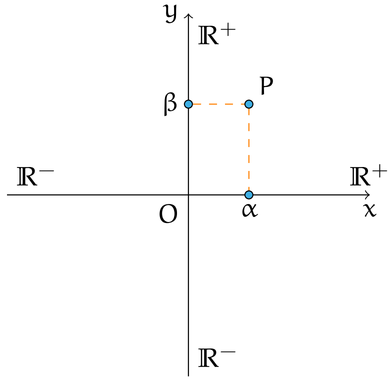


Figura 8.7: Numeri positivi e negativi sul piano cartesiano.

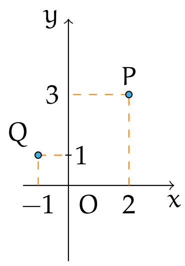


Figura 8.8

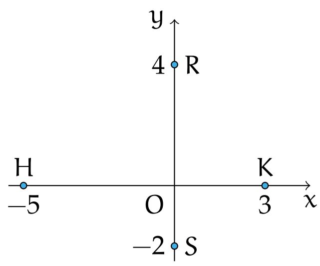


Figura 8.9

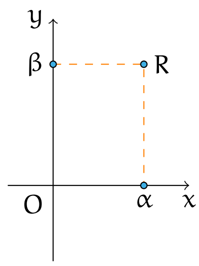


Figura 8.10: Ascissa e ordinata di un punto.

Per rappresentare gli elementi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cioè le coppie ordinate di numeri reali $(\alpha; \beta)$ procediamo nel seguente modo:

- determiniamo sull'asse x il punto A immagine del numero reale α;
- da A tracciamo la retta parallela all'asse y;
- determiniamo sull'asse y il punto B immagine del numero reale β;
- da B tracciamo la retta parallela all'asse x.

Il punto P, intersezione delle rette tracciate, è l'immagine della coppia ordinata $(\alpha; \beta)$ (figura 8.7). Il punto O, immagine della coppia $(0; 0)$, è chiamato *origine* del sistema di riferimento.

Esempio 8.11. Determiniamo l'immagine delle coppie ordinate $(2; 3)$ e $(-1; 1)$.

Nella figura 8.8 è tracciata la costruzione descritta sopra: P è il punto del piano immagine della coppia $(2; 3)$ e Q è il punto immagine della coppia $(-1; 1)$. Rappresenta le coppie $(4; -1)$ e $(-4; 1)$. Quali punti rappresentano le coppie con un elemento uguale a zero?

Esempio 8.12. Determiniamo l'immagine delle seguenti coppie: $(0; 4)$, $(0; -2)$, $(-5; 0)$, $(3; 0)$.

Osserviamo nella figura 8.9 che il punto immagine dello zero sull'asse x coincide con O, quindi la coppia $(0; 4)$ sarà associata al punto R dell'asse y e la coppia $(0; -2)$ al punto S dello stesso asse. Analogamente, poiché il punto immagine dello zero sull'asse y coincide con O, le coppie $(-5; 0)$ e $(3; 0)$ sono associate rispettivamente ai punti H e K dell'asse x.

Prima conclusione: ogni coppia di numeri reali è rappresentata da un punto del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico.

Prendiamo ora un punto R (figura 8.10 a pagina 221) del piano sul quale sia stato fissato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico e tracciamo da R la parallela all'asse y che interseca l'asse x nel punto A. A questo punto è associato un numero reale α. Analogamente da R tracciamo la parallela all'asse x che interseca l'asse y nel punto B immagine di un numero reale β. Al punto R associamo la coppia di numeri reali $(\alpha; \beta)$.

Diremo che R è il punto di coordinate $(\alpha; \beta)$, α si chiama *ascissa* del punto R e β *ordinata* del punto R. Spesso le coordinate del punto R sono indicate con $(x_R; y_R)$.

Seconda conclusione: ogni punto del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico individua una coppia ordinata di numeri reali.

In conclusione, esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e l'insieme dei punti del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Possiamo dunque "confondere" coppia di numeri reali con punto del piano e diremo, secondo gli esempi precedenti, "P è il punto $(2; 3)$" o "P è il punto immagine della coppia $(2; 3)$" o ancora "P è il punto di coordinate $(2; 3)$".

Un po' di storia

Nel II secolo a.C. Ipparco[1] compilò il primo catalogo stellare in cui precisò la posizione di circa 850 stelle sulla sfera celeste mediante due numeri: latitudine e longitudine. La posizione di un punto era dunque individuata attraverso una coppia di numeri. Ancora oggi attraverso latitudine e longitudine viene individuato un punto sulla superficie terrestre. I romani, nel fondare una città, segnavano due solchi perpendicolari (cardo e decumano) ai quali riferivano la posizione di case, monumenti, strade.

Nel XVII secolo con le opere di Pierre de Fermat[2] e di René Descartes[3] il metodo di rappresentare punti con coppie di numeri divenne un procedimento matematico per descrivere enti geometrici attraverso numeri, equazioni, disequazioni e tradurre le relazioni tra elementi della geometria in relazioni tra enti dell'algebra.

La geometria analitica tratta quindi questioni geometriche con metodi di tipo algebrico.

✍ *Esercizio proposto:* 8.20

8.5.2 Distanza tra due punti

Assegnato nel riferimento cartesiano ortogonale il punto $P(\alpha; \beta)$, il numero reale $|\alpha|$ rappresenta la misura della distanza del punto P dall'asse y e il numero reale $|\beta|$ rappresenta la misura della distanza di P dall'asse x.

[1] noto anche come Ipparco di Nicea o di Rodi, è stato un astronomo, matematico e geografo della Grecia antica (190 a.C.- 120 a.C.).
[2] matematico e magistrato francese (1601 - 1665).
[3] filosofo e matematico francese noto anche con il nome italianizzato Renato Cartesio (1596 - 1650).

Esempio 8.13. Determinare la misura della distanza dagli assi coordinati dei punti $P(+1;-3)$, $Q(+5;+5)$, $R(-2;+3)$, $S(-5;-1)$ (figura 8.11).

Dati: $P(+1;-3)$.

Obiettivo: $PH \perp$ asse x, il segmento PH è la distanza di P dall'asse x; $PK \perp$ asse y, il segmento PK è la distanza di P dall'asse y.

Per quanto detto sopra si ha $\overline{PH} = |-3| = -(-3) = 3$; $\overline{PH} = |+1| = 1$. Completate la soluzione dell'esempio, seguendo la traccia.

Vogliamo ora determinare la misura $\overline{AB}$ di un segmento AB, inserito in un riferimento cartesiano ortogonale monometrico O_{xy}, conoscendo le coordinate degli estremi A e B del segmento stesso.

Caso I i due punti hanno la stessa ascissa. Il segmento AB è parallelo all'asse y e può presentarsi in diverse posizioni rispetto all'asse x (figura 8.12).

Esempio 8.14. Determinare la misura della distanza tra i punti $A(2;7)$ e $B(2;3)$.

Dati: $A(2;7)$, $B(2;3)$.

Obiettivo: $\overline{AB}$.

Procedura risolutiva: $\overline{AB} = \overline{AH} - \overline{BH} = y_A - y_B = 7 - 3 = 4$.

Esempio 8.15. Determinare la misura della distanza tra i punti $A(5;5)$ e $B(5;-3)$.

Dati: $A(5;5)$, $B(5;-3)$.

Obiettivo: $\overline{AB}$.

Procedura risolutiva: $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = y_A + (-y_B) = y_A - y_B = 5 - (-3) = 8$.

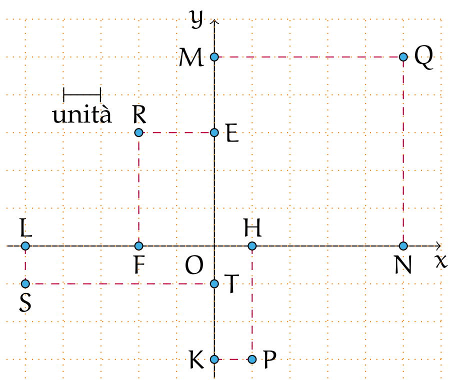


Figura 8.11

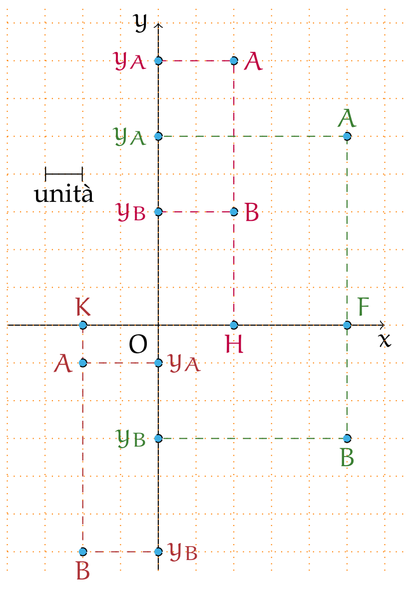


Figura 8.12

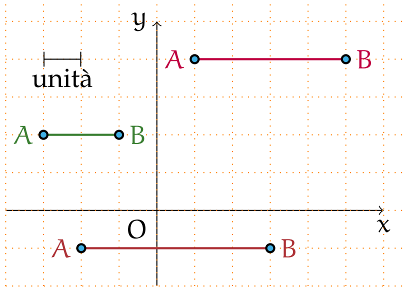


Figura 8.13: I due punti hanno la stessa ordinata.

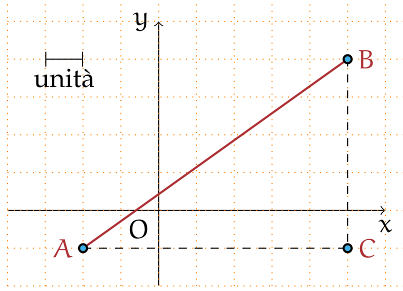


Figura 8.14: Il segmento ha una direzione diversa da quella degli assi coordinati.

Esempio 8.16. Determinare la misura della distanza tra i punti $A(-2;-1)$ e $B(-2;-6)$.

Dati: $A(-2;-1)$, $B(-2;-6)$.

Obiettivo: $\overline{AB}$.

Procedura risolutiva: $\overline{AB} = \overline{BK} - \overline{AK} = -(y_B) - (-y_A) = y_A - y_B = -1 + 6 = 5$.

Osserviamo che in ogni caso abbiamo sottratto dall'ordinata maggiore l'ordinata minore; generalizzando possiamo concludere: la misura del segmento AB parallelo all'asse delle ordinate è $\overline{AB} = |y_A - y_B|$ indipendentemente da quale estremo abbia ordinata maggiore.

Caso II i due punti hanno la stessa ordinata. Il segmento AB (figura 8.13) è parallelo all'asse x e può presentarsi in diverse posizioni rispetto all'asse y.

Seguendo il procedimento applicato nel primo caso, dopo aver rilevato le coordinate degli estremi del segmento AB nella figura 8.13, verifica che in ogni caso $\overline{AB} = |x_A - x_B|$.

La misura del segmento AB parallelo all'asse delle ascisse è $\overline{AB} = |x_A - x_B|$ indipendentemente da quale estremo abbia ascissa maggiore.

Caso III è questo il caso generale: il segmento ha una direzione diversa da quella degli assi coordinati (figura 8.14).

Dati: $A(x_A; x_B)$, $B(y_A; y_B)$.

Obiettivo: $\overline{AB}$.

Procedura risolutiva: tracciando da A la parallela all'asse x e da B la parallela all'asse y si determina il vertice C del triangolo rettangolo ABC di cui AB è l'ipotenusa. Per il teorema di Pitagora si ottiene: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_C - y_B)^2}$. Poiché $x_C = x_B$ e $y_C = y_A$ sostituendo si ha: $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

La misura del segmento AB, note le coordinate dei suoi estremi, è quindi:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 8.21, 8.22, 8.23, 8.24, 8.25, 8.26, 8.27, 8.28, 8.29, 8.30, 8.31, 8.32, 8.33

8.5.3 Punto medio di un segmento

Ricordiamo il teorema di Talete:

Teorema 8.1 (di Talete)**.** *Un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali* r *e* r' *determina su esse segmenti che mantengono tra loro le proporzioni, cioè* $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$.

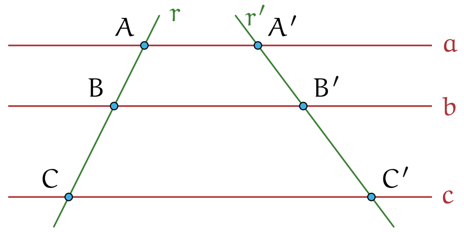


Figura 8.15: Il teorema di Talete.

Richiamiamo anche la definizione di punto medio di un segmento:

Definizione 8.10. Il *punto medio di un segmento* AB è il punto M interno al segmento che lo divide in due parti congruenti: $\overline{AM} = \overline{MB}$.

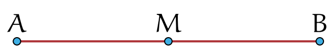


Figura 8.16: Il punto medio.

Se si conoscono le coordinate degli estremi $A(x_A; y_a)$ e $B(x_B; y_B)$ di un segmento possiamo determinare le coordinate del suo punto medio $M(x_M; y_M)$ (figura 8.17).

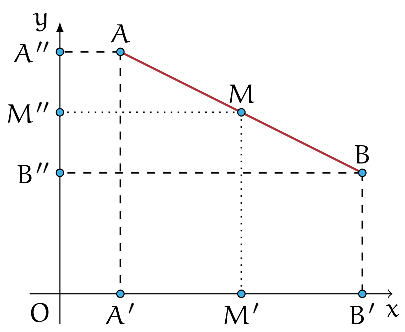


Figura 8.17: Le coordinate del punto medio.

Essendo $\overline{AM} = \overline{MB}$ per il teorema di Talete $\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$; si ha inoltre $A'(x_A; 0)$, $B'(x_B; 0)$, $M'(x_M; 0)$ e quindi $x_M - x_A = x_B - x_M$ da cui $2x_M = x_A + x_B$ e dunque $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

Con ragionamento analogo, tracciando dai punti A, B, M le parallele all'asse x, si ricava $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Le coordinate del punto medio M di un segmento AB, con $A(x_A; x_B)$ e $B(x_B; y_B)$ sono quindi:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Esempio 8.17. Dato il segmento di estremi $A\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$, $B\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ determinare le coordinate del suo punto medio M.

Dati: $A\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$, $B\left(2; -\frac{1}{2}\right)$, $\overline{AM} = \overline{MB}$.

Obiettivo: $M(x_M; y_M)$.

Procedura risolutiva: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{3}{4}+2}{2} = \frac{5}{8}$; $y_M = \frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{4}$ quindi $M\left(\frac{5}{8}; \frac{1}{4}\right)$.

✍ *Esercizi proposti:* 8.34, 8.35, 8.36, 8.37, 8.38

8.6 Il grafico di una funzione

Ricordiamo le definizioni 8.1 e 8.2. Una funzione f è una corrispondenza univoca tra due insiemi non vuoti: ad ogni elemento x (variabile indipendente) del dominio associa uno e un solo valore y del codominio (variabile dipendente). L'elemento y, corrispondente di un elemento x del dominio, viene detto immagine di x nella funzione f e si scrive $y = f(x)$.

Le funzioni numeriche, cioè aventi per dominio e codominio insiemi numerici, possono essere espresse:

- con *linguaggio comune*, purché in modo preciso e inequivocabile (esempio: La funzione f "associa ad ogni numero razionale il suo triplo");
- attraverso un *algoritmo* (figura 8.18), cioè una serie di istruzioni per trasformare il valore della variabile indipendente (in ingresso) nel valore della variabile dipendente (in uscita);

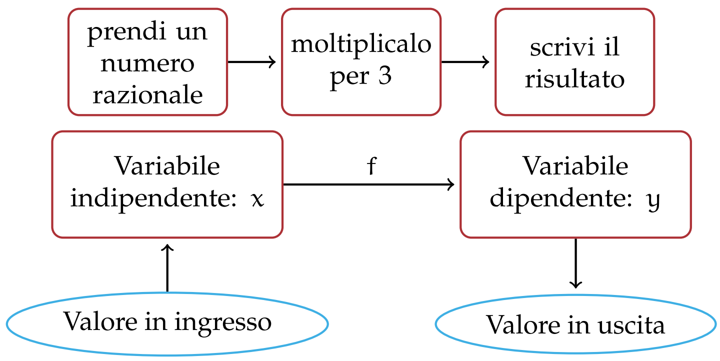


Figura 8.18: Funzione numerica espressa tramite un algoritmo.

- mediante una *tabella*:

x	-2	0	3	7	10
y	-6	0	9	21	30

- con una *formula* che indica il calcolo che si effettua sulla variabile indipendente per determinare in modo univoco il valore della variabile dipendente. Per esempio: $y = 3x$.

Esempio 8.18. Traccia su un piano quadrettato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Completa la tabella per la funzione $y = 2x$ avente come dominio e codominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

x	0		$1/2$	2	-3	
y		2				5

Ogni coppia $(x; y)$ determina nel riferimento cartesiano un punto; rappresenta i punti le cui coordinate sono le coppie ordinate contenute nella tabella. Puoi osservare che i punti trovati sono allineati su una retta passante per l'origine del riferimento.

Definizione 8.11. Si chiama *grafico di una funzione* l'insieme di tutti e soli i punti del piano cartesiano che rappresentano le coppie ordinate costruite tramite la funzione assegnata.

❑ **Osservazione** I pochi punti ottenuti dalla compilazione della tabella possono essere uniti con un tratto continuo perché assegnando alla variabile indipendente altri valori reali, ad esempio compresi tra 0 e 2, si potrebbero determinare infiniti punti che risulterebbero allineati con i precedenti.

✍ *Esercizi proposti:* 8.39, 8.40

8.6.1 Funzione di proporzionalità diretta

x	0	-1	$1/2$	2	-3	$-5/2$
y	0	2	-1	-4	6	5
y/x						

Compila la terza riga della tabella contenente il rapporto tra la variabile dipendente y e la variabile indipendente x. Cosa osservi? Completa: $\frac{y}{x} =$..................................

Definizione 8.12. Una funzione in cui risulta costante e diverso da zero il rapporto tra la variabile dipendente e la variabile indipendente si chiama *funzione di proporzionalità diretta*. In simboli, y direttamente proporzionale a $x \Leftrightarrow \frac{y}{x} = k$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$ o anche $y = k \cdot x$.

Il grafico di una funzione di proporzionalità diretta è una *retta passante per l'origine*; la costante k si chiama *coefficiente angolare* della retta.

Nella figura 8.19 è rappresentata una retta passante per l'origine del riferimento; essa forma con l'asse orientato delle x un angolo α ; la costante k ci dà informazioni su tale angolo. In particolare se la costante di proporzionalità è *positiva*, l'angolo α è *acuto*, se la costante è *negativa* allora l'angolo α è *ottuso*. Se $k = 1$ l'angolo è di 45° e la retta è la bisettrice del I e III quadrante.

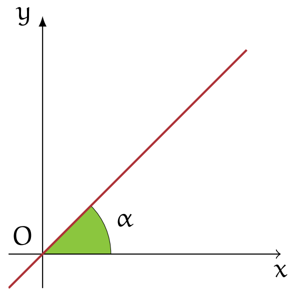


Figura 8.19: Coefficiente angolare di una funzione.

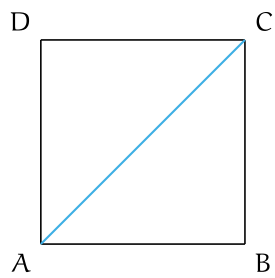


Figura 8.20

Problema 8.19. Nel quadrato $ABCD$ di figura 8.20 il cui lato misura x, determinare il perimetro e la diagonale.

Soluzione Abbiamo i dati: $\overline{AB} = x$ con $x > 0$ e l'obiettivo: $2p$, $\overline{AC}$.

$2p = 4 \cdot x$, al variare del lato varia il perimetro, che risulta essere dunque funzione del lato. Indicato con y il perimetro scriviamo $y = 4x$, funzione di proporzionalità diretta con $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$, coefficiente $k = 4$. La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine (figura 8.21).

Determiniamo ora la diagonale: per il teorema di Pitagora si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$$
$$\Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{2 \cdot x^2} = x \cdot \sqrt{2}.$$

Indicando con y la diagonale si ha la funzione di proporzionalità diretta $y = \sqrt{2} \cdot x$ con coefficiente $k = \sqrt{2}$, di dominio $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$. La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine (figura 8.22).

♦

✍ *Esercizi proposti:* 8.41, 8.42, 8.43, 8.44, 8.45

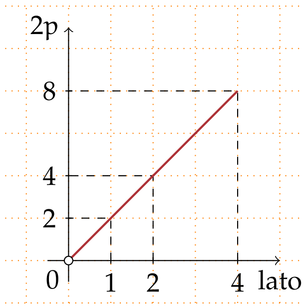


Figura 8.21: Il perimetro 2p in funzione del lato.

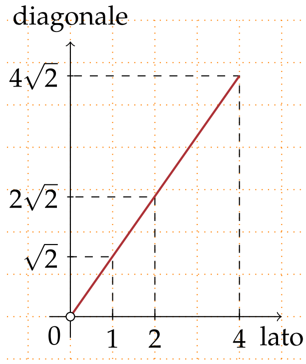


Figura 8.22: La diagonale in funzione del lato.

8.6.2 La funzione costante

La figura 8.23 rappresenta una funzione in cui $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ e l'insieme IM. $= \{2\}$.

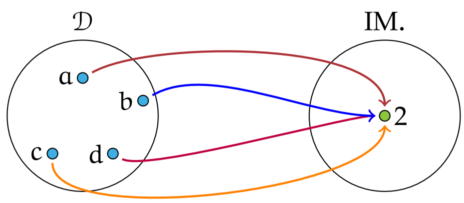


Figura 8.23: Funzione con $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ e IM. $= \{2\}$.

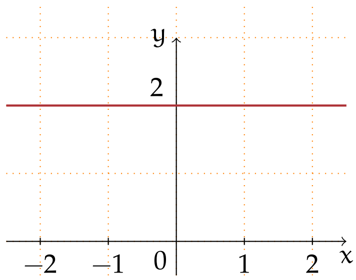


Figura 8.24: Funzione costante.

Definizione 8.13. Si chiama *funzione costante* la legge che associa ad ogni valore assunto dalla variabile indipendente sempre lo stesso valore della variabile dipendente; in simboli: $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = k, k \in \mathbb{R}$.

Rappresentiamo la funzione del grafo come formula, compiliamo la tabella e infine tracciamo il suo grafico nel riferimento cartesiano ortogonale.

Formula: $y = 2$.

Tabella:

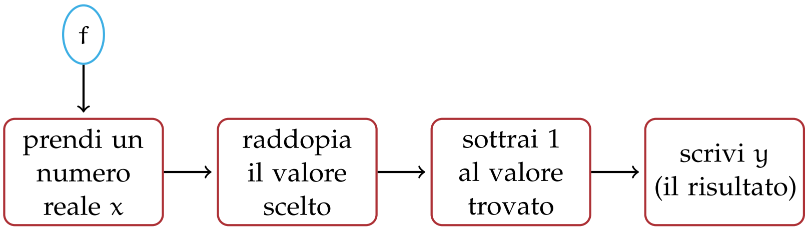
x	-2	0	-3	1	2
y	2	2	2	2	

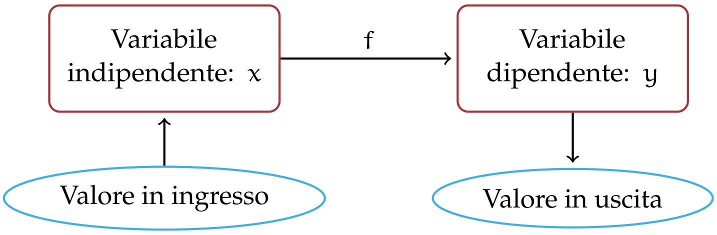
Il grafico di una funzione costante è una retta parallela all'asse delle ascisse (figura 8.24). Osserviamo che se k è positivo la retta sta nel semipiano delle ordinate positive (I e II quadrante); se k è negativo la retta sta nel semipiano delle ordinate negative (III e IV quadrante); se $k = 0$ allora la retta coincide con l'asse x delle ascisse.

✍ *Esercizi proposti:* 8.46, 8.47, 8.48, 8.49

8.6.3 La funzione lineare

Le seguenti istruzioni individuano una funzione:





Completa:

- la funzione data si esprime con linguaggio comune: "la differenza tra ....";
- la formula che indica il legame algebrico tra la variabile indipendente e la variabile dipendente è $y = $ ....

La tabella che ne rappresenta alcuni valori è:

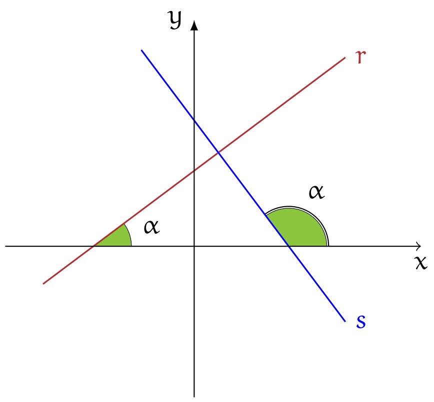
x	-2	0		
y			0	

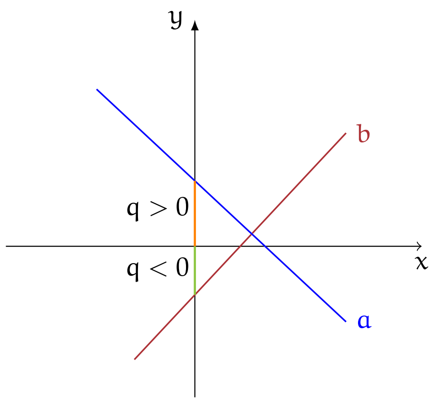
Rappresenta i punti del grafico in un riferimento cartesiano ortogonale. Rispondi: i punti trovati sono allineati? la funzione è una proporzionalità diretta?

Definizione 8.14. Una qualunque funzione espressa dalla formula $y = m \cdot x + q$ con m, $q \in \mathbb{R}$, il cui grafico è una retta, è detta *funzione lineare*.

Significato dei coefficienti m e q nella funzione lineare $y = mx + q$

- Se $m = 0$ la funzione è $y = q$, il suo grafico è una retta parallela all'asse x;
- se $m \neq 0$ esso è il coefficiente angolare della retta; ci dà informazioni sull'angolo che la retta forma con l'asse orientato delle ascisse: se $m > 0$ l'angolo formato con l'asse delle ascisse è un angolo acuto; se $m < 0$ l'angolo è ottuso;
- se $q = 0$ la funzione è $y = ax$, il suo grafico è una retta passante per l'origine;
- se $q \neq 0$ esso è l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle ordinate (asse y).





❍ **Conclusione** la funzione costante e la funzione di proporzionalità diretta sono funzioni lineari.

Esempio 8.20. Riferendoti ai grafici precedenti, completa con uno dei segni $>$, $<$, $=$.

- nella formula della funzione avente r come grafico si ha $m \dots\ 0$ e $q \dots\ 0$;
- nella formula della funzione avente s come grafico si ha $m \dots\ 0$ e $q \dots\ 0$;
- nella formula della funzione avente a come grafico si ha $m \dots\ 0$ e $q \dots\ 0$;
- nella formula della funzione avente b come grafico si ha $m \dots\ 0$ e $q \dots\ 0$.

Assegnata una tabella di corrispondenza è possibile determinare la formula della funzione lineare.

Esempio 8.21. Stabilisci se la tabella assegnata rappresenta una funzione lineare e determina la formula che la descrive.

x	-2	-1	0	1	$2/3$
y	-8	-5	-2	1	0

Procedura risolutiva: segno nel riferimento cartesiano i punti corrispondenti alle coppie ordinate $(x; y)$ date dalla tabella e osservo che il grafico è una retta non passante per l'origine. Non si tratta dunque di una proporzionalità diretta (il rapporto y/x non è costante!). Per determinare la formula devo stabilire il valore di m (coefficiente angolare) e di q. Dalla tabella individuo il valore $q = -2$, infatti per $x = 0$ si ha $y = -2$. Per determinare m, sommo 2 (l'opposto di -2) a tutte le ordinate e trovo la tabella della proporzionalità diretta $y = 3x$.

x	-2	-1	0	1	$2/3$
y	-6	-3	0	3	2

Quindi la formula della funzione lineare cercata è $y = 3x - 2$. Questo procedimento è possibile perché nella tabella è già evidente il valore di q.

✍ *Esercizi proposti:* 8.50, 8.51, 8.52

8.6.4 La funzione di proporzionalità inversa

Problema 8.22. La base e l'altezza di un rettangolo $ABCD$ misurano rispettivamente 3cm e 4cm. Determina la sua area.

Soluzione . . . .

♦

Se le misure dei lati sono numeri interi, esistono altri rettangoli equivalenti a quello dato? Costruisci i rettangoli equivalenti, indicando accanto a ciascuno la misura dei lati. Se le misure fossero numeri reali, potresti determinare *tutti* i rettangoli equivalenti a quello assegnato?

Generalizziamo: i lati x e y di tutti i rettangoli equivalenti a quello dato sono legati dalla condizione $x \cdot y = 12$ con $x, y \in \mathbb{R}^+$.

x	6	8	10	1/3	4/3
y	2	3/2	6/5	36	9

Osserviamo che se fissiamo il valore di x il lato y vale $y = \frac{12}{x}$ come nella tabella. Rappresenta ora nel riferimento cartesiano ortogonale i punti individuati dalla tabella: essi si collocano nel primo quadrante perché . . . . Ti sembrano allineati?

Definizione 8.15. Una funzione in cui il prodotto tra la variabile dipendente e la variabile indipendente risulta costante e diverso da zero si chiama *funzione di proporzionalità inversa*. In simboli: y inversamente proporzionale a $x \Leftrightarrow x \cdot y = k$ con $k \in \mathbb{R}_0$ e $x \neq 0$ o anche $y = \dfrac{k}{x}$.

Il grafico di una funzione di proporzionalità inversa è una curva chiamata *iperbole*.

Analizziamo tale funzione e rappresentiamo il suo grafico a secondo dei valori della costante k.

Caso $k > 0$ Quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili x e y sono senz'altro concordi; al numero positivo x corrisponde il numero positivo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel primo quadrante; al numero negativo x corrisponde il numero negativo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel terzo quadrante.

Esempio 8.23. Rappresentare graficamente la funzione $y = \frac{2}{x}$. Per far questo assegniamo a x alcuni valori, positivi e negativi:

x	-3	-1	$-1/2$	1	4	1/2	3
y	$-2/3$	-2	-4	2	1/2	4	2/3

Riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel primo e terzo quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di x potrà avere come immagine $y = 0$ in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero (in questo caso è 2). Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}_0$ e l'insieme immagine è $IM. = \mathbb{R}_0$.

Il grafico di questa funzione (figura 8.25) non ha punti appartenenti agli assi coordinati. Questa curva è una *iperbole*; essa è formata da due rami che si collocano nel I e III quadrante.

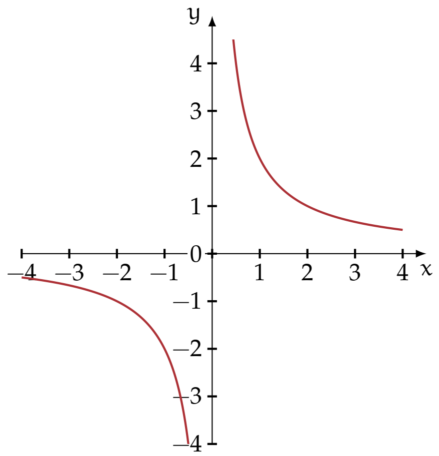


Figura 8.25: La funzione $y = \frac{2}{x}$.

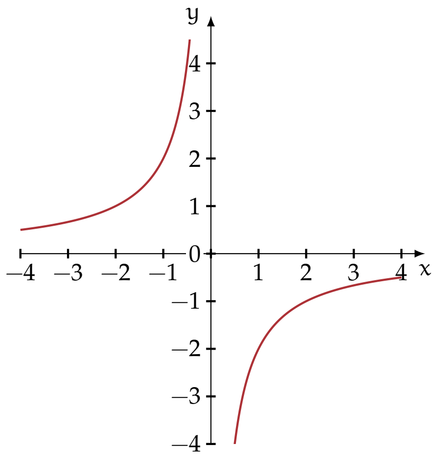


Figura 8.26: La funzione $y = -\frac{1}{2x}$.

Caso $k < 0$ Quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili x e y sono senz'altro discordi; al numero positivo x corrisponde il numero negativo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel quarto quadrante; al numero negativo x corrisponde il numero positivo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel secondo quadrante.

Esempio 8.24. Rappresentare graficamente la funzione $y = -\frac{1}{2x}$. Per far questo assegniamo a x alcuni valori, positivi e negativi.

x	-2	-1	$-1/2$	1	2	$1/2$	$3/2$
y	$1/4$	$1/2$	1	$-1/2$	$-1/4$	-1	$-1/3$

Riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel secondo e quarto quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di x potrà avere come immagine $y = 0$ in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero, ma in questo caso è $-\frac{1}{2}$. Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}_0$ e l'insieme immagine è $\text{IM.} = \mathbb{R}_0$.

Il grafico di questa funzione (figura 8.26) non ha punti appartenenti agli assi coordinati. Questa curva è una *iperbole*; essa è formata da due rami che si collocano nel II e IV quadrante.

✍ *Esercizi proposti:* 8.53, 8.54

8.6.5 La funzione di proporzionalità quadratica

È assegnata la tabella che esprime il legame tra due variabili reali; determina se essa rappresenta una funzione costante, una funzione lineare, una funzione di proporzionalità diretta, di proporzionalità inversa, oppure nessuno di questi tipi:

x	-2	-1	$1/2$	0	2	3	$3/2$
y	4	1	$1/4$	0	4	9	$9/4$

Come avrai notato dall'analisi delle coppie assegnate, la tabella associa ad ogni valore della variabile indipendente il suo quadrato. Il dominio di tale funzione è $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, mentre l'immagine è IM. $= \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. La formula con cui si esprime il legame algebrico delle due variabili è $y = x^2$. Costruiamo il suo grafico (figura 8.27), utilizzando i punti della tabella.

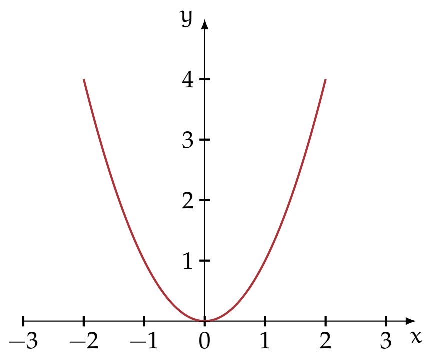


Figura 8.27: La funzione $y = x^2$.

Definizione 8.16. Una funzione in cui risulta costante e diverso da zero il rapporto tra la variabile dipendente e il quadrato della variabile indipendente si chiama *funzione di proporzionalità quadratica*. In simboli: y proporzionale a $x^2 \Leftrightarrow \frac{y}{x^2} = k$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$ o anche $y = k \cdot x^2$.

Il grafico di una funzione di proporzionalità quadratica è una curva passante per l'origine, chiamata *parabola*. Il punto $O(0;0)$ si chiama *vertice* della parabola.

✍ *Esercizi proposti:* 8.55, 8.56, 8.57, 8.58, 8.59, 8.60, 8.61, 8.62

8.6.6 Funzione lineare a tratti

Problema 8.25. La ditta "Farvit" produce viti che vengono vendute a peso in imballaggi particolari il cui peso non supera i 10kg; la tabella dei prezzi esposta nel magazzino degli ordini è la seguente:

Peso	Costo (€)
peso $\leqslant$ 4kg	$1{,}5 \cdot$ peso
4Kg $<$ peso $\leqslant$ 8kg	$0{,}5 \cdot$ peso $+ 4$
8Kg $<$ peso $\leqslant$ 10kg	12

Soluzione Pensando il peso come variabile indipendente che possa assumere qualunque valore reale positivo, possiamo rappresentare la tabella esposta con un grafico (figura 8.28).

Osserviamo che il punto C rappresenta il costo di un pacco di 8kg; il punto D è l'estremo di un segmento aperto a sinistra. Per un peso di $8,1$kg il costo è di € 10. Il grafico tracciato è formato da segmenti appartenenti a rette diverse: in questi casi si dice che la funzione è definita per casi.

Qual è il costo di una confezione di 3kg? Costo = ... Segnate il punto corrispondente sul grafico. Il punto E cosa rappresenta? .... Stabilite dominio e codominio della funzione Costo.

♦

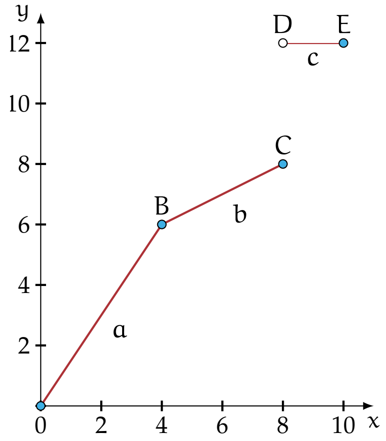


Figura 8.28

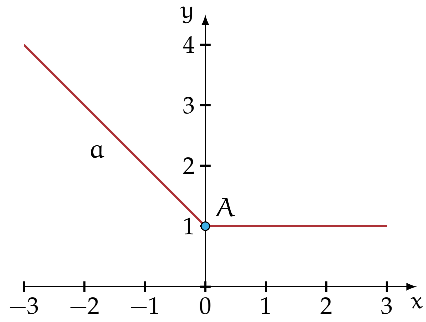


Figura 8.29

Definizione 8.17. Diciamo che una funzione è *definita per casi* quando è definita da espressioni diverse su sottoinsiemi diversi del dominio.

Esempio 8.26. Tracciate il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} f_1: \quad y = 1 - x & \text{per } x \leqslant 0 \\ f_2: \quad y = 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}.$$

Passo I individuiamo il dominio che risulta dall'unione dei sottoinsiemi in cui è definita ciascuna espressione; quindi $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f_1} \cup \mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}$.

Passo II f_1 è una funzione lineare, quindi determiniamo due punti per tracciarne il grafico: $A(0;1)$ e $B(-1;2)$; f_2 è una funzione costante.

Passo III tracciamo il grafico (figura 8.29) che risulta formato dall'unione di due semirette aventi la stessa origine $A(0;1)$.

❑ **Osservazione** I grafici dei due esempi precedenti hanno una notevole differenza: le due semirette del primo esempio hanno la stessa origine, il grafico si può tracciare senza sollevare la matita dal foglio, le semirette del secondo esempio hanno invece origine diversa e il grafico non può essere tracciato senza sollevare la matita dal foglio. Diciamo nel primo caso che la funzione è *continua* nel dominio, nel secondo caso che è *discontinua*.

✍ *Esercizio proposto:* 8.63

8.6.7 Funzione valore assoluto

Particolare importanza assume la funzione valore assoluto definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} y = x & \text{se } x \geqslant 0 \\ y = -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

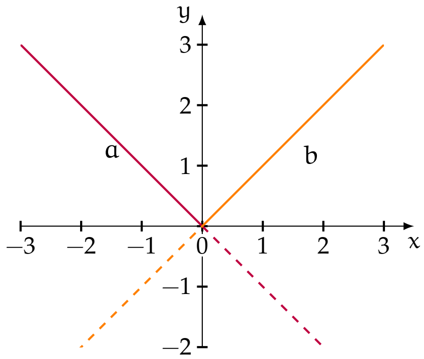


Figura 8.30: Metodo per ottenere il grafico della funzione di valore assoluto.

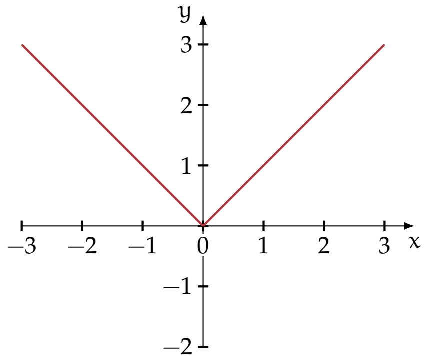


Figura 8.31: La funzione valore assoluto.

Vogliamo tracciarne il grafico. Nel riferimento cartesiano ortogonale tracciamo la retta $y = x$ e su di essa evidenziamo la semiretta b avente l'origine in O i cui punti appartengono al I quadrante; analogamente tracciamo la retta $y = -x$ e su di essa evidenziamo la semiretta a avente l'origine in O i cui punti appartengono al II quadrante. Nella figura 8.30 sono rappresentati i passi descritti e nella figura 8.31 il grafico della funzione valore assoluto come unione delle due semirette evidenziate.

❍ **Conclusione** il grafico della funzione valore assoluto di equazione $y = |x|$ è formato da due semirette aventi come origine l'origine del riferimento cartesiano. La funzione è continua, è nulla per $x = 0$ e positiva per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, l'insieme immagine è IM. $= \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 8.64, 8.65, 8.66

8.7 Esercizi

8.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

8.1 - Funzioni

8.1. È vero che la corrispondenza che associa ad ogni regione italiana il suo capoluogo di provincia è una funzione?

a) Completa: $\mathcal{D} = \text{I. D.} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$
b) è vero che IM. = {città d'Italia}?
c) completa $f(\text{Liguria}) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots;\ f(\dots\dots\dots\dots\dots\dots) = \text{Cagliari}$?

8.2. Assegnati gli insiemi $A = \{\text{mare, ruspa, fegato, generale}\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ la corrispondenza che associa ad ogni elemento di A il numero di lettere di cui è composta la parola è una funzione?

a) Rappresentala con grafico sagittale e stabilisci l'insieme immagine;
b) quale relazione sussiste tra B e IM.?

8.3. Quali tra le seguenti relazioni sono funzioni?

Dominio	Codominio	Relazioni
libri	autori	a ogni libro associa l'autore
canzoni	cantanti	a ogni canzone associa il cantante
portoni di una via	numeri	a ogni portone associa il numero civico
computer	sistemi operativi	a ogni computer associa il S.O. installato
canzoni	orari	a ogni canzone associa la sua durata
libri	numeri interi	a ogni libro associa il suo numero di pagine
studenti della classe	voti	a ogni studente associa il voto di matematica
materie	libri	a ogni materia associa i testi in adozione

8.4. Si è ammessi a una facoltà universitaria se nel test d'ingresso si è avuto un punteggio compreso tra 60 incluso e 100 incluso. La corrispondenza che associa ad ogni studente che ha superato il test il punteggio ottenuto è una funzione? Se sì di che tipo è la funzione?

8.5. Spiega perché la funzione che associa a ciascuna persona il suo codice fiscale è biunivoca.

8.2 - Funzioni tra insiemi numerici

8.6. Nella corrispondenza che associa ad ogni intero il suo valore assoluto (esempio 8.5 a pagina 215), è vero che scelto un qualunque numero naturale è possibile determinare almeno un numero intero di cui è immagine? Completate: $f(\dots\dots) = 45$. L'osservazione precedente permette di concludere che tale funzione è suriettiva? Fate la rappresentazione sagittale della funzione.

8.7. Data la funzione $y = x - 2$ con dominio $\mathbb{N} - \{0, 1\}$ e codominio $\mathbb{N}$ completa l'analisi dell'esempio 8.7 a pagina 216:

a) elementi diversi del dominio hanno immagini diverse, quindi tale funzione è iniettiva; si ha anche $\text{IM.} = \mathcal{C} = \mathbb{N}$ e pertanto la funzione è suriettiva, quindi $\dots\dots\dots\dots;$

b) preso $y = 8$ sapresti trovare l'elemento del dominio di cui è immagine? . . . . ;

8.8. Stabilisci se la funzione $f : y = \frac{1}{x}$ è iniettiva. Nell'insieme immagine c'è lo zero? Completate $\mathcal{C} = \text{IM.} = \ldots$ Completate la tabella

$x \in \mathbb{Q}_0$	-2	$-7/8$	$+1$				-1	
$y \in \mathbb{Q}_0$				$+1/3$	$-12/5$	$-7/8$		-1

8.9. Consideriamo la funzione f che associa ad ogni numero razionale il suo triplo.

$\mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{Q}$; la sua espressione in forma analitica è $f : y = \ldots\ldots\ldots$

$\mathcal{D} = \text{I. D.} = \mathbb{Q}$; possiamo moltiplicare per 3 qualunque numero razionale.

$\mathcal{C} = \text{IM.} = \mathbb{Q}$; infatti per ogni numero razionale y c'è un numero razionale x di cui y è il triplo, basta dividere y per 3.

a) qual è l'immagine di 0? . . . .
b) quale elemento del dominio ha per immagine 5? . . . .
c) è vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva? . . . .
d) è vero che -1 è immagine di -3? . . . .
e) la funzione è iniettiva? . . . .
f) la funzione è biunivoca? . . . .

Fai il grafo sagittale della funzione.

8.10. Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare l'insieme di definizione, l'insieme immagine e stabilire se la funzione è iniettiva o suriettiva.

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \to 2x$;
b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \to x^2$;
c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \to \frac{1}{x}$;
d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \to 2x$;
e) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \to \frac{1}{x}$.

8.11. Per ciascuna delle funzioni di seguito elencate, da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, riempite le colonne della tabella.

$y = f(x)$	$f(x)$ è iniettiva?	$x = f^{-1}(y)$
$y = 2x$		
$y = x + 2$		
$y = 2x - 2$		
$y = x^2$		
$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$		
$y = \sqrt{2} \cdot x$		

8.12. Assegnata la funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, definita da $y = x^2 + 1$ non è né iniettiva, né suriettiva. Motiva questa affermazione scegliendo gli opportuni valori di x e di y.

8.3 - Composizione di funzioni

8.13. Date le funzioni $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3x + 2$ che hanno per dominio rispettivamente $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$. Scrivi le espressioni analitiche delle funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

8.14. Date le seguenti funzioni f cerca due funzioni g e h tali che $g \circ h = f$.

$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
$y = (x-1)^2$	$y = x^2$	$y = x - 1$
$y = 4x^2$		
$y = 5x - 2$		
$y = \dfrac{x-5}{5}$		
$y = \sqrt{x+4}$		

8.15. Date le funzioni f e g determina le funzioni composte richieste.

$f(x)$	$g(x)$	$f \circ g$	$g \circ f$	f^{-1}	$g \circ f^{-1}$
$y = 2x$	$y = x + 1$				
$y = x - 2$	$y = x^2$				
$y = \dfrac{x-1}{2}$	$y = 3x + 1$				
$y = \dfrac{1}{2}x + 1$	$y = 2x - 1$				

8.16. Date le funzioni f e g determina le funzioni composte richieste.

$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$	$g(f(x))$
$y = 2x$	$y = x^2$		
$y = x^2$	$y = x^3$		
$y = 2x$	$y = 3x$		
$y = 4x$	$y = x + 41$		
$y = x + 1$	$y = x + 2$		
$y = 2x + 1$	$y = x^2 - 1$		
$y = 3 - x$	$y = \dfrac{2}{x}$		

8.4 - La retta e gli insiemi numerici

8.17. Determina sulla retta reale i punti immagine dei seguenti numeri reali: $\alpha = \frac{3}{2}\sqrt{2}$; $\beta = \frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\delta = -\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$; $\lambda = \sqrt{3} - 3$.

8.18. Verifica che il numero $\chi = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ non è uguale al numero $\omega = \sqrt{5}$, usando la rappresentazione sulla retta orientata.

8.19. Stabilisci il valore di verità della proposizione: "poiché tra 2 e 3 non vi è nessun altro numero naturale, anche tra $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ non vi è nessun numero reale".

8.5 - Il metodo delle coordinate cartesiane

8.20. Per ciascuna coppia di punti indica in quale quadrante si trova, se si trova su un asse indica l'asse: $(0;-1)$, $\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right)$, $\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{3};1\right)$, $\left(1;-\frac{5}{3}\right)$, $(-8;9)$, $\left(-2;-\frac{1}{4}\right)$, $(-1;0)$.

Completa l'osservazione conclusiva:

- tutte le coppie del tipo $(+;+)$ individuano punti del . . . .;
- tutte le coppie del tipo $(\ldots;\ldots)$ individuano punti del IV quadrante;
- tutte le coppie del tipo $(-;+)$ individuano punti del . . . .;
- tutte le coppie del tipo $(-;-)$ individuano punti del . . . .;
- tutte le coppie del tipo $(\ldots;0)$ individuano punti del . . . .;
- tutte le coppie del tipo $(\ldots;\ldots)$ individuano punti dell'asse y.

8.21. Sono assegnati i punti $A(3;-1)$, $B(3;5)$, $M(-1;-1)$, $N(-1;-7)$. È vero che $\overline{AB} = \overline{MN}$?

8.22. Sono assegnati i punti $A(1;5)$, $B(-4;5)$, $C(-4;-2)$, $D(5;-2)$. Quale poligono si ottiene congiungendo nell'ordine i quattro punti assegnati? Determinare l'area del quadrilatero $ABCD$.

8.23. Determina l'area del quadrilatero $MNPQ$ sapendo che $M(6;-4)$, $N(8;3)$, $P(6;5)$, $Q(4;3)$.

8.24. Determina $\overline{AB}$ sapendo che $A(7;-1)$ e $B(-3;-6)$.

8.25. Determina la distanza di $P(-3;2{,}5)$ dall'origine del riferimento.

8.26. Calcola la misura del perimetro del triangolo ABC di vertici $A(3;-2)$, $B(4;1)$, $C(7;-4)$.

8.27. Determina il perimetro del quadrilatero di vertici $A(1;5)$, $B(-4;5)$, $C(-4;-2)$, $D(5;-2)$.

8.28. Determina il perimetro del quadrilatero di vertici $M(6;-4)$, $N(8;3)$, $P(6;5)$, $Q(4;3)$.

8.29. Determina il perimetro e la misura delle diagonali del quadrilatero di vertici $A(1;-3)$, $B(4;3)$, $C(-3;1)$, $D(-6;-5)$.

8.30. Verifica che il triangolo di vertici $E(4;3)$, $F(-1;4)$, $G(3;-2)$ è isoscele.

8.31. Il triangolo ABC ha il lato BC appoggiato sull'asse x; il vertice B ha ascissa $\frac{5}{4}$, il vertice C segue B e $\overline{BC} = \frac{17}{2}$. Determina le coordinate del vertice C, l'area e il perimetro del triangolo sapendo che il terzo vertice è $A(-1;5)$.

8.32. I punti $F(3;0)$, $O(0;0)$, $C(0;5)$ sono i vertici di un rettangolo; determina le coordinate del quarto vertice, il perimetro, l'area e la misura delle diagonali del rettangolo.

8.33. I punti $O(0;0)$, $A(4;5)$, $B(9;5)$, $C(3;0)$ sono i vertici di un trapezio. Determina perimetro e area del trapezio $OABC$.

8.34. Determina le coordinate del punto medio dei segmenti i cui estremi sono le seguenti coppie di punti:

a) $A(-\sqrt{2};0)$, $B(0;\sqrt{2})$;
b) $A\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{6};3\right)$;
c) $A(-1;4)$, $B(1;-4)$;
d) $A\left(0;-\frac{3}{2}\right)$, $B(-2;-1)$;
e) $A\left(1+\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $B\left(-\sqrt{2};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;
f) $A\left(\frac{7}{5};-\frac{7}{5}\right)$, $B(1;-1)$;
g) $A\left(-3;\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2};-3\right)$.

8.35. I vertici del triangolo ABC sono i punti $A\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{6};1\right)$, $C\left(\frac{4}{3};0\right)$, determina le coordinate dei punti M, N, P, punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC.

8.36. I vertici del triangolo ABC sono i punti $A(-3;5)$, $B(3;-5)$, $C(3;5)$, i punti M, N, P sono i punti medi rispettivamente dei lati AB, AC, BC. Determina il perimetro di ABC e di MNP. Quale relazione sussiste tra i perimetri ottenuti? Secondo te vale la stessa relazione anche tra le aree dei due triangoli?

8.37. Verifica che il triangolo di vertici $A(2;3)$, $B(6;-1)$, $C(-4;-3)$ è rettangolo (è sufficiente verificare che le misure dei lati verificano la relazione di Pitagora). È vero che CB è l'ipotenusa? Verifica che AM, con M punto medio di BC è metà di BC stesso. Come sono i triangoli AMC e AMB?

8.38. Verifica che i segmenti AB e CD di estremi $A\left(\frac{1}{2};2\right)$, $B\left(-\frac{3}{4};-2\right)$, $C(3;1)$, $D\left(-\frac{7}{2};-1\right)$ hanno lo stesso punto medio. È vero che $AC = BD$?

8.6 - Il grafico di una funzione

8.39. Sono assegnate alcune funzioni con una formula; compila le tabelle a seguito di ciascuna e rappresenta graficamente le funzioni.

$f_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad y = \frac{1}{2}x$:

x	2	0	−2	4	−4
y	1				

$f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad y = 2 - 3x$:

x	0	1	−1	2/3	−2/3
y	2				

$f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad y = -x$:

x	1	−1	0	2	−2
y	−1				

$f_4 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad y = -x - 4$:

x	−2	−1	0	1/2	−1/2
y	−2				

8.40. Esprimi con linguaggio comune la funzione f_1 dell'esercizio precedente e rispondi alle domande:

a) qual è l'immagine di 0? $y = \ldots\ldots$;
b) quale elemento del dominio ha per immagine 5? $x = \ldots\ldots$;
c) è vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva? Perché?
d) è vero che −1 è immagine di −2? Perché?

8.41. Dopo aver determinato per ciascuna delle seguenti funzioni il coefficiente angolare k, tracciane il grafico in un riferimento cartesiano ortogonale:

a) $f_1 : y = \frac{1}{2}x$;
b) $f_2 : y = x$;
c) $f_3 : y = \frac{4}{3}x$;
d) $f_4 : y = \frac{3}{5}x$;
e) $f_5 : y = 5x$;
f) $f_6 : y = -\frac{1}{2}x$;
g) $f_7 : y = -x$;
h) $f_8 : y = -\frac{3}{4}x$.

8.42. Riporta in uno stesso riferimento cartesiano ortogonale le prime cinque funzioni dell'esercizio precedente. Evidenzia con un colore diverso la funzione f_2, calcola poi il coefficiente angolare k compilando la seguente tabella:

f	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
k					

Cancella i termini errati presenti nelle seguenti affermazioni:

a) Tutte le funzioni hanno coefficiente angolare positivo/negativo;
b) Tutte le rette formano con l'asse orientato delle x un angolo ottuso/acuto;
c) Tutte le rette aventi coefficiente minore di 1 stanno sopra/sotto la f_2;
d) Tutte le rette aventi coefficiente maggiore di 1 stanno sopra/sotto la f_2.

8.43. Ripeti l'esercizio precedente per le altre tre funzioni (f_6, f_7 e f_8) evidenziando la funzione f_7; costruisci l'analoga tabella e cancella i termini errati presenti nelle seguenti affermazioni:

a) Tutte le funzioni hanno coefficiente angolare positivo/negativo;
b) Tutte le rette formano con l'asse orientato delle x un angolo ottuso/acuto;
c) Tutte le rette aventi coefficiente minore di -1 stanno sopra/sotto la f_7;
d) Tutte le rette aventi coefficiente maggiore di -1 stanno sopra/sotto la f_7.

8.44. Se x rappresenta la misura del lato di un triangolo equilatero, determina la misura della sua altezza (al variare della misura del lato). Nel riferimento cartesiano ortogonale traccia il grafico della funzione ottenuta.

8.45. Quale deve essere la misura del lato di un quadrato per avere la diagonale di 2m?

8.46. Traccia nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico delle funzioni: $y = -2$, $y = 6$, $y = 0$, $y = -1$, $y = 3$.

8.47. Traccia nel riferimento cartesiano le funzioni $y = 1$ e $y = -3$; nello stesso riferimento traccia la funzione $y = 2x$. Le tre rette individuano nel piano due punti P e Q. Determina la distanza tra P e Q.

8.48. Le due funzioni f_1 e f_2 di proporzionalità diretta assegnate dalle tabelle seguenti delimitano sulla funzione $y = -2$ un segmento; determina la misura del segmento e il suo punto medio:

f_1	x	-2	0	3	-1
	y	2	0	-3	1
f_2	x	1	0	3	-2
	y	4	0	12	-8

8.49. Traccia il grafico cartesiano delle funzioni $f_1 : y = 2x$, $f_2 : y = -\frac{1}{2}x$, $f_3 : y = 2$ e indica con A e B rispettivamente i punti di intersezione di f_1 con f_3 e di f_2 con f_3. Considera il triangolo AOB (O è l'origine del riferimento). È vero che $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$? Sai trarre una caratteristica del triangolo AOB? Traccia nello stesso riferimento la funzione $f_4 : y - 4$ e indica con C e D rispettivamente i punti di intersezione di f_1 con f_4 e di f_2 con f_4. Calcola l'area del quadrilatero $ABCD$.

8.50. Sono assegnate le funzioni lineari: $f_1 : y = \frac{1}{2}x - 2$, $f_2 : y = -x - \frac{3}{4}$, $f_3 : y = 6x - 6$. Rappresentale in un riferimento cartesiano ortogonale dopo aver compilato per ciascuna una tabella di valori.

8.51. Segna nel riferimento cartesiano ortogonale i punti assegnati tramite la tabella:

x	-3	$-3/2$	0	3	6
y	-2	-1	0	2	4

La funzione assegnata è una proporzionalità diretta?

Scrivi la formula $y = \ldots\ldots\ldots$

Completa ora la tabella avente i medesimi valori della variabile indipendente, ma i valori della variabile dipendente siano ottenuti dai precedenti diminuiti di 2:

x	-3	$-3/2$	0	3	6
y			-2		

Scrivi la formula della nuova funzione $y = \ldots\ldots\ldots$

Traccia il suo grafico nello stesso riferimento. È una funzione lineare?

8.52. La tabella seguente individua coppie di punti allineati; trova la formula che descrive ciascuna funzione lineare e traccia il suo grafico:

f_1	x	5	-1	0	3	1
	y	-2	4	-3	0	2
f_2	x	-4	$-4/3$	0	$-1/3$	$4/3$
	y	-2	0	1	$3/4$	2
f_3	x	-6	-1	0	3	1
	y	$-11/3$	$-1/3$	$1/3$	$7/3$	1

8.53. Traccia il grafico delle seguenti funzioni di proporzionalità inversa:

a) $f_1 : y = -\frac{3}{2x}$;
b) $f_2 : y = \frac{1}{x}$;
c) $f_3 : y = \frac{5}{x}$;
d) $f_4 : y = \frac{-3}{x}$;
e) $f_5 : y = -\frac{1}{x}$;
f) $f_6 : y = -\frac{2}{5x}$.

8.54. Traccia nelle stesso riferimento cartesiano ortogonale la curva $\gamma : y = -\frac{1}{2x}$ e le rette $r_1 : y = 2$ e $r_2 : y = -2$. Verifica che l'origine del riferimento è il punto medio del segmento avente per estremi i punti $A_1 = r_1 \cap \gamma$ e $A_2 = r_2 \cap \gamma$.

8.55. Traccia il grafico delle seguenti funzioni di proporzionalità quadratica:

a) $f_1 : y = -x^2$;
b) $f_2 : y = x^2$;
c) $f_3 : y = -\frac{1}{2}x^2$;
d) $f_4 : y = -\frac{5}{2}x^2$;
e) $f_5 : y = \frac{3}{4}x^2$;
f) $f_6 : y = \frac{7}{3}x^2$.

8.56. Dai grafici dell'esercizio precedente trai le conclusioni sulla parabola $y = k \cdot x^2$, completando

a) se $k > 0$ allora i punti della parabola si trovano . . . .;
b) se $k < 0$ allora i punti della parabola si trovano . . . .;
c) se $k > 1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = x^2$? . . . .;
d) se $0 < k < 1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = x^2$? . . . .;
e) se $k < -1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = -x^2$? . . . .;
f) se $-1 < k < 0$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = -x^2$? . . . .

8.57. Determina la distanza del punto di ascissa $x = -2$ della parabola $y = 3x^2$ dal suo vertice.

8.58. Sono assegnate le funzioni $f_1 : y = (-x)^2$ e $f_2 : y = -x^2$ di proporzionalità quadratica. Spiega se e perché sono o non sono la stessa funzione. Danne di ciascuna la descrizione in linguaggio comune. Costruisci per ciascuna una tabella di valori e costruisci il rispettivo grafico. Puoi confermare la risposta data alla prima domanda?

8.59. Completa la seguente tabella:

Funzione	In linguaggio comune	Formula	Tipo
f_1	Associa ad ogni x reale il valore $-2/3$		
f_2	Associa ad ogni x reale il triplo del suo quadrato		
f_3		$y = -5x^2$	
f_4	Associa ad ogni x reale il suo doppio aumentato di $3/2$		
f_5	Associa ad ogni x reale $\neq 0$ l'opposto del suo reciproco		
f_3		$y = -5x$	

Traccia nel riferimento cartesiano ortogonale le funzioni assegnate. Per quali di esse è vero che per qualunque x del dominio è IM. $= \mathbb{R}$?

8.60. Il rettangolo $ABCD$ ha il lato AB triplo del lato BC. Indica $\overline{BC} = x$; determina il perimetro del rettangolo in funzione di x: $2p =$ . . . . Spiega perché è necessaria la condizione $x > 0$; rappresenta graficamente la funzione perimetro nel riferimento cartesiano. Determina ora l'area in funzione di x: Area $=$ . . . .; rappresenta la funzione area, nello stesso riferimento.

8.61. Il triangolo rettangolo ABC, retto in A ha i cateti l'uno doppio dell'altro. Indica la misura del cateto minore $\overline{AB} = x$ e spiega perché è necessaria la condizione $x > 0$.

Determina l'area del triangolo in funzione di x: Area $=$ . . . .; rappresenta questa funzione nel riferimento cartesiano ortogonale. Stabilisci le misure dei cateti se l'area è di $20cm^2$.

Calcola il perimetro del triangolo in funzione di x: $2p =$ . . . .; rappresenta come varia la funzione perimetro al variare di x nel riferimento cartesiano ortogonale.

8.62. Nel triangolo isoscele ABC il lato obliquo AB è doppio della base BC; indica $\overline{BC} = x$ e determina in funzione di x il perimetro del triangolo. $2p =$ . . . . Di che funzione si tratta? Descrivila e rappresentala nel riferimento cartesiano ortogonale, dopo aver fissato le opportune condizioni sulla variabile indipendente.

Se il perimetro è 120cm, quanto misurano i lati del triangolo? Calcola, in questo caso, l'area del triangolo e la misura delle altezze relative ai lati uguali.

8.63. Traccia il grafico delle seguenti funzioni.

$$f_1(x) = \begin{cases} y = x+1 & \text{se } x \geqslant -1 \\ y = x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} y = -1 & \text{se } x > 1 \\ y = 2x & \text{se } x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} y = x^2 & \text{se } x \geqslant 1 \\ y = \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} y = x & \text{se } x > 1 \\ y = 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ y = -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} y = -1 & \text{se } x > 1 \vee x < -1 \\ y = x & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ y = -x & \text{se } -1 < x \leqslant 0 \end{cases} \qquad f_6(x) = \begin{cases} y = x+2 & \text{se } x < -1 \\ y = x^2 & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ y = -x+2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$f_7(x) = \begin{cases} y = -2 & \text{se } x < -2 \\ y = -2x+1 & \text{se } x \geqslant -2 \end{cases} \qquad f_8(x) = \begin{cases} y = -1 & \text{se } x < 0 \\ y = x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y = -x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

8.64. Traccia il grafico della funzione $y = |x+1|$.

8.65. Un caseificio vende mozzarelle a € 4,50 al chilo ai clienti che ne acquistano fino 10kg; per i clienti che fanno acquisti superiori ai 10kg vende a € 4,00 al kg per la parte che eccede i 10kg e per i primi 10kg vende sempre a € 4,50/kg. Per i clienti dei grandi supermercati che acquistano quantità superiori a 100kg vende a € 3,50 al kg. Codifica con opportune formule la funzione costo:

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots & \text{se } x \leqslant 10 \\ \ldots\ldots\ldots & \text{se } 10 < x \leqslant 100 \\ \ldots\ldots\ldots & \text{se } x > 100 \end{cases}.$$

Determina il costo dei seguenti ordini:

kg	3,5	11,8	78	120			
€					360	57	35

Rappresenta graficamente la funzione nel riferimento cartesiano ortogonale.

8.66. Dai grafici delle funzioni di seguito riportati, per ognuna di esse stabilisci insieme di definizione $\mathcal{D}$, insieme immagine IM. e verifica se la funzione è iniettiva, suriettiva o biettiva.