Prof. Roberto Capone

Funzioni reali di una variabile reale

Corso di Matematica I 2016/2017

Corso di studi in Ingegneria Chimica

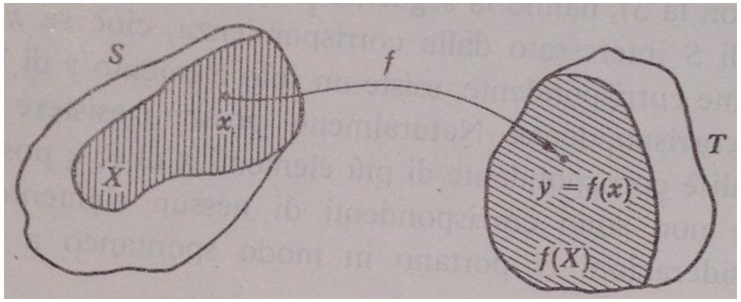
Verso il concetto di funzione

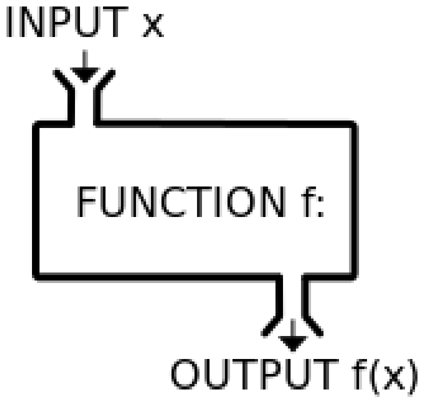
Il termine funzione già appare in alcuni scritti del matematico Leibniz (1646-1716). Tuttavia, in un primo momento tale termine venne usato in riferimento a espressioni analitiche che danno la dipendenza di una quantità numerica da altre. Successivamente la nozione ha subito delle generalizzazioni ottenendo, nel secolo scorso, la sua formulazione definitiva.

Definizione

Dati due insiemi S e T e una parte X di S, si chiama funzione da S verso T, definita in X o anche funzione di X in T, una corrispondenza tra elementi di S ed elementi di T la quale ad ogni elemento x di X fa corrispondere uno ed un solo elemento y di T

Verso il concetto di funzione





L'insieme X si chiama insieme di definizione o anche dominio della funzione f; il sottoinsieme T costituito dagli elementi che sono corrispondenti per mezzo di f di elementi di X si chiama insieme dei valori o anche codominio della funzione f.
Si dice anche che f è una funzione definita nella parte X di S e a valori nell'insieme T

Funzioni iniettive, suriettive, biettive

Definizione

Una funzione $f: X \subseteq S \to T$ si dice una funzione di X su tutto T o anche una funzione suriettiva, se il codominio della funzione, f(X) coincide con T; ovvero, equivalentemente, se ogni elemento y di T è corrispondente per mezzo di f di almeno un elemento x di X

Definizione

Una funzione $f: X \subseteq S \to T$ si dice iniettiva se, a due qualunque elementi $x^{'}$ e $x^{''}$ distinti di X fa corrispondere due elementi $f(x^{'})$ e $f(x^{''})$ anch'essi distinti

Funzioni iniettive

Definizione analoga è la seguente:

Una funzione $f: X \subseteq S \to T$ si dice iniettiva se ogni elemento di T ha al massimo una controimmagine in S o, ciò che è lo stesso, se manda elementi distinti in elementi distinti.

Geometricamente dire che ogni elemento di R ha al massimo una controimmagine equivale a dire che ogni retta orizzontale deve intersecare il grafico della funzione al massimo in un punto

Funzioni iniettive

Data una funzione reale di variabile reale $y = f(x)$:

- Per dimostrare che f non è iniettiva basta esibire una coppia di elementi distinti x_1, x_2, appartenenti all'insieme di definizione della funzione tali che $f(x_1) = f(x_2)$;
- Per provare, invece che f è iniettiva, occorre mostrare che $\forall x_{1,} x_2 \in I.D.$ vale l'implicazione

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

Funzioni suriettive

La definizione di funzione suriettiva può essere data anche nel seguente modo:
Una funzione $f: X \subseteq S \to T$ si dice suriettiva se ogni elemento di T ha almeno una controimmagine in A e ciò vuol dire che f è suriettiva quando si verifica che

$$\forall y \in T: \exists x \in X \mid f(x) = y$$

Geometricamente
Una funzione reale di variabile reale (per cui si assume come codominio R) è suriettiva se e solo se ogni retta orizzontale deve intersecare il grafico della funzione in almeno un punto.

Funzioni iniettive, suriettive, biettive

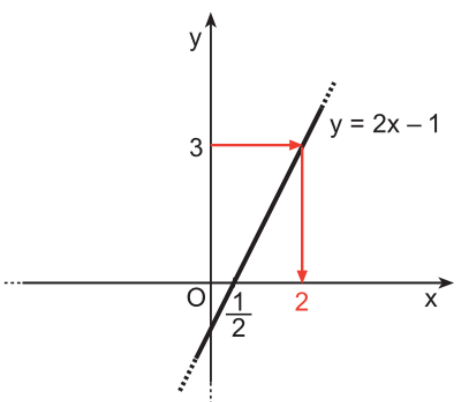
Definizione

Una funzione si dice biiettiva (o biunivoca) se è sia iniettiva sia suriettiva

ESEMPIO

$y = 2x - 1$

- Suriettiva
- Iniettiva
- Biiettiva

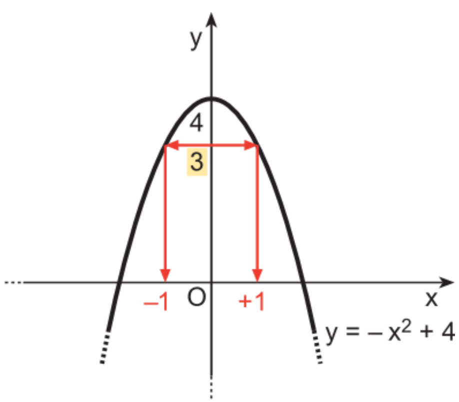


ESEMPIO

$y = -x^2 + 4$

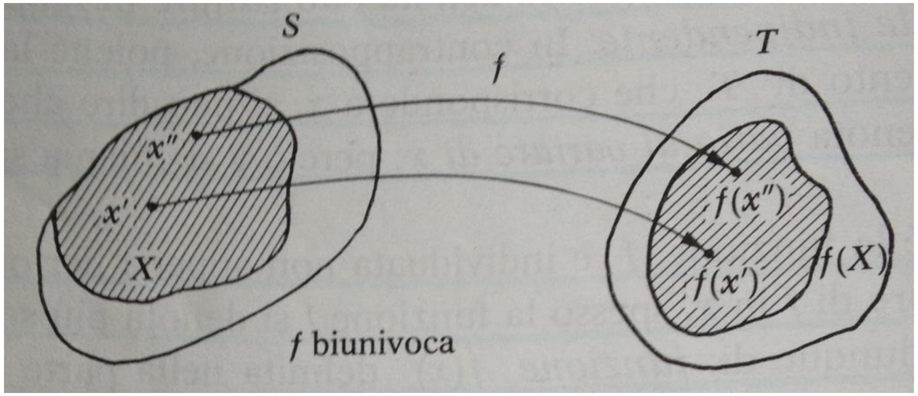
- Suriettiva se
  $y \in \left]-\infty; 4\right]$

- Non iniettiva se
  $x \in \left]-\infty; +\infty\right[$

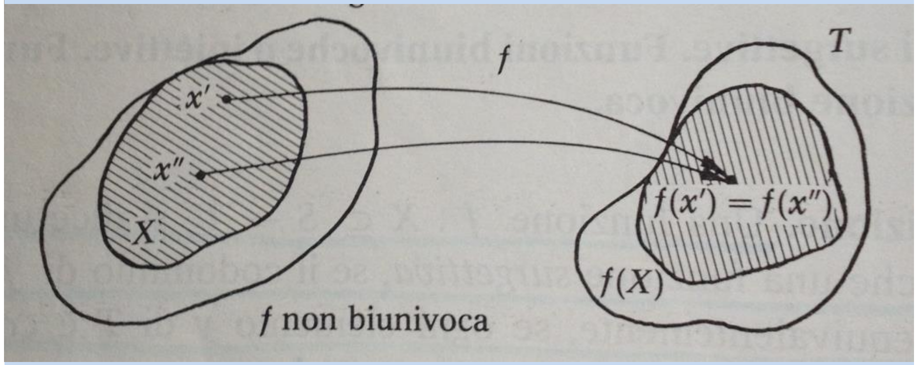


Funzioni biettive

Si può anche dire che la funzione $f: X \subseteq S \to T$ è biunivoca se ogni elemento y del codominio di f è il corrispondente per mezzo di f di un solo elemento x di X; ovvero, equivalentemente, se $\forall y \in T$ o non esiste nessun $x \in X$ tale che $y = f(x)$ o, se ne esiste uno, questo è unico. È anche ovvio che la funzione f non è biunivoca se e solo se esiste almeno una coppia (x', x'') di elementi di X tale che $x' \neq x''$ in corrispondenza dei quali si ha $f(x') = f(x'')$



$$x' \neq x'' \to f(x') \neq f(x'')$$



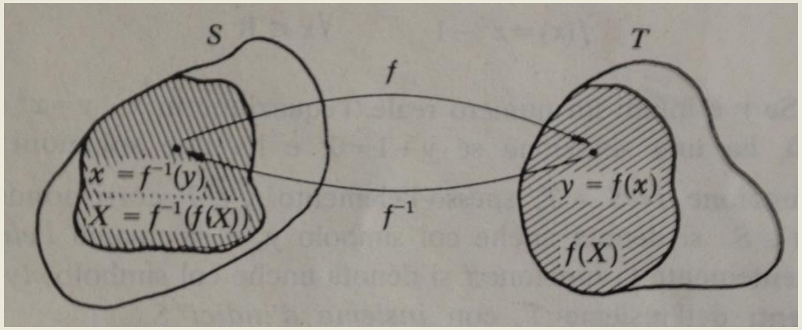
$$\exists (x', x''), \text{con } x' \neq x'' \mid f(x') = f(x'')$$

La funzione inversa

Definizione

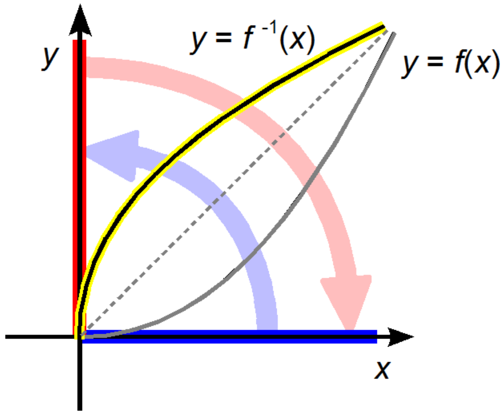
Funzione inversa

Data la funzione biiettiva f definita nella parte X di S e a valori nell'insieme T. Si chiama funzione inversa di f la funzione, definita in f(X) e a valori in S, che ad ogni elemento y di f(X) fa corrispondere quell'elemento x di X al quale la f fa corrispondere y, cioè quell'elemento x di X tale che y=f(x)



Data una funzione biiettiva reale di variabile reale $y = f(x)$,
disegnare il grafico di f^{-1} equivale a partire dalle ordinate di f e ricavare le ascisse.

Ordinate e ascisse si scambiano i ruoli.



Il grafici di f e di f^{-1} sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

La funzione inversa

Teorema

La funzione inversa di una funzione biunivoca è anch'essa biunivoca

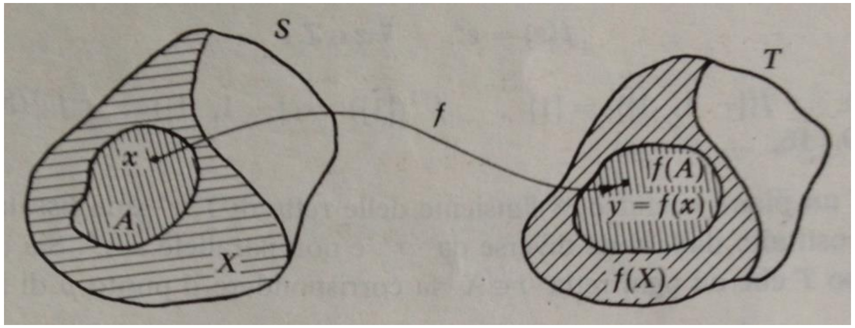
Dimostrazione

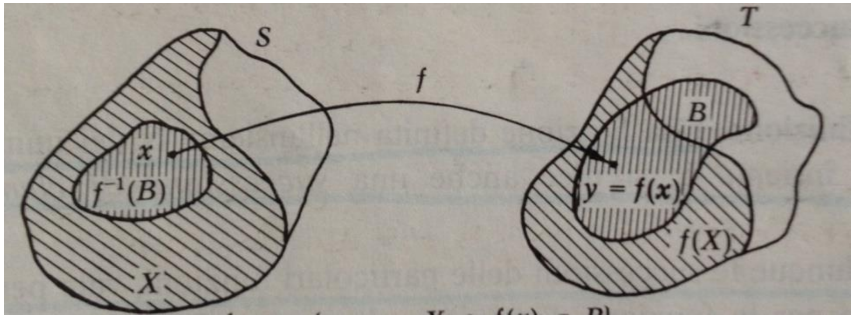
Infatti, la funzione f^{-1}, inversa della f, a elementi distinti fa corrispondere elementi ancora distinti, così come la f

Immagine e immagine reciproca

Definizione

Sia f una funzione da S verso T, definita nella parte X di S. Se A è una parte di X, si chiama immagine di A per mezzo di f, e si denota col simbolo f(A), il sottoinsieme di T costituito dagli elementi y corrispondenti per mezzo di f degli elementi x di A. se B è una parte di T, si chiama antimmagine di B per mezzo di f o controimmagine o immagine reciproca, il sottoinsieme di X costituito dagli elementi x i cui corrispondenti per mezzo di f appartengono a B.





Restrizione e prolungamento di una funzione

Definizione

Se f è definita nella parte X di S e a valori nell'insieme T e X' è una parte non vuota di X, si chiama **restrizione** di f a X' la funzione definita in X' e a valori in T che ad ogni elemento x di X' assume lo stesso valore che assume f.

Definizione

Siano S e T due insiemi, X' una parte propria di S, X una parte di S tale che $X' \subset X$, g una funzione di X' in T. Una funzione f di X in T si dice **prolungamento** di g su X se la restrizione di f a X' coincide con g o, ciò che è lo stesso, se $f(x) = g(x)\ \forall x \in X'$

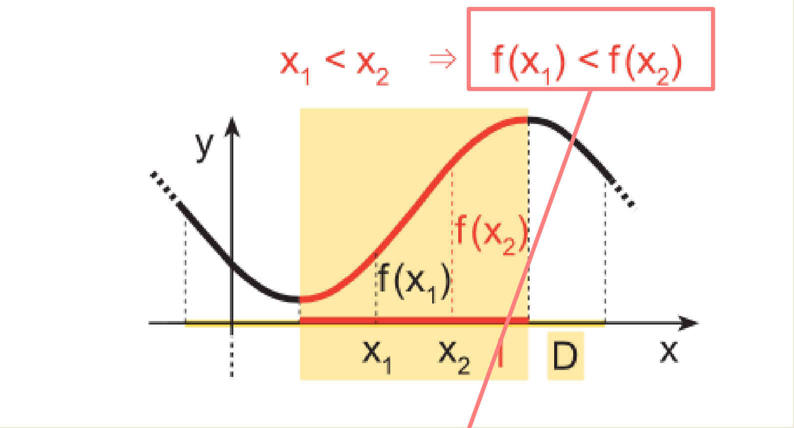
Funzioni crescenti e decrescenti

DEFINIZIONE

Funzione crescente

Una funzione $y = f(x)$ di I.D. $X \subseteq R$ si dice crescente in senso stretto in un intervallo I, sottoinsieme di X,

se, comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I,
con $x_1 < x_2$,
risulta $\boxed{f(x_1) < f(x_2)}$.

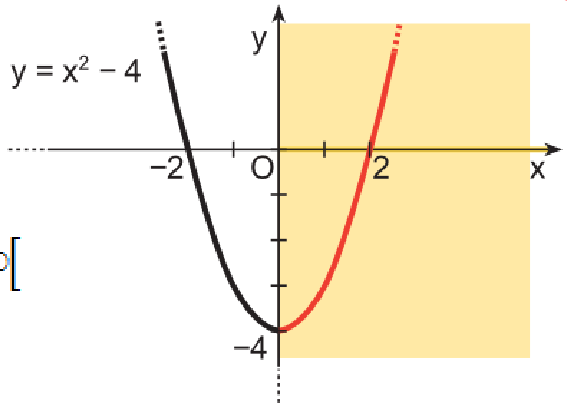


ESEMPIO

$y = x^2 - 4$

Crescente in

$I = [0;+\infty[$



Funzione non decrescente

Se, invece di $\boxed{f(x_1) < f(x_2)}$, vale

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

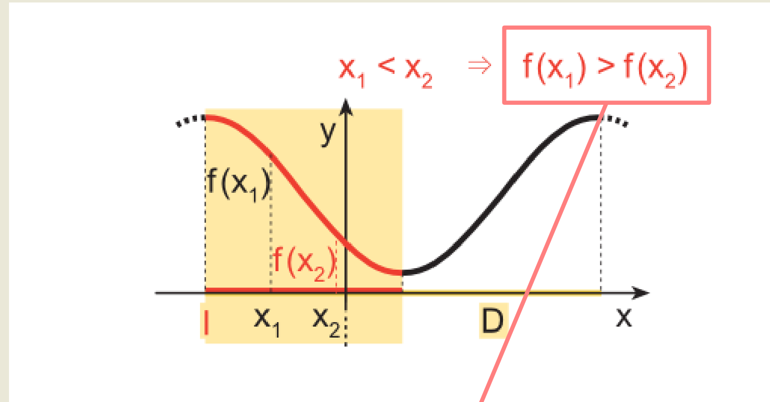
la funzione è **crescente in senso lato** o **non decrescente**.

Funzioni crescenti e decrescenti

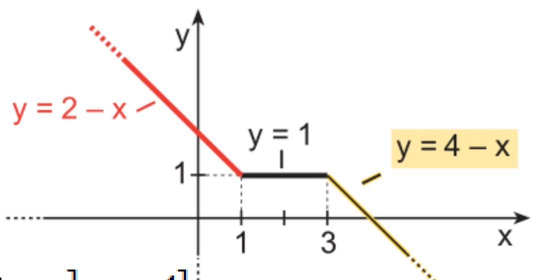
DEFINIZIONE

Funzione decrescente

Una funzione $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbf{R}$ si dice decrescente in senso stretto in un intervallo I, sottoinsieme di D,
se, comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I, con $x_1 < x_2$,
risulta $\boxed{f(x_1) > f(x_2)}$.



ESEMPIO



Decrescente in $]-\infty; 1]$

Non crescente in **R**

Funzione non crescente

Se, invece di $\boxed{f(x_1) > f(x_2)}$, vale

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

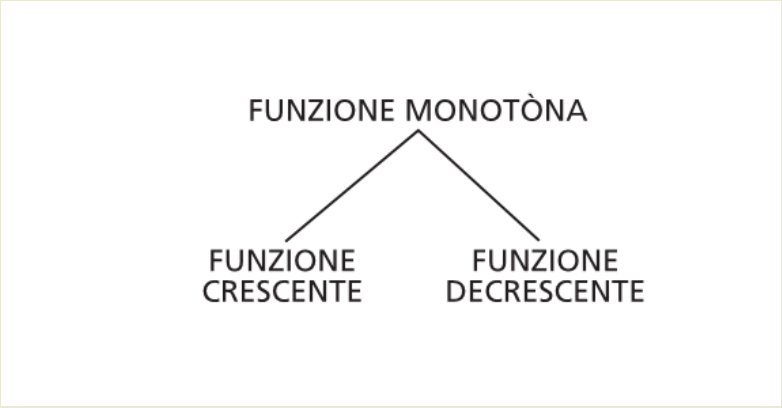
la funzione è **decrescente in senso lato** o **non crescente**.

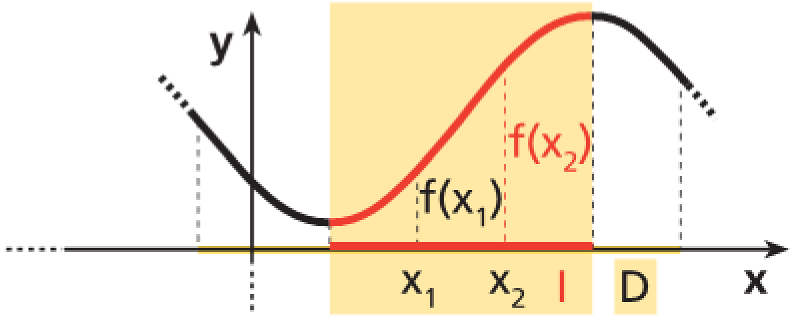
Funzioni crescenti e decrescenti

DEFINIZIONE

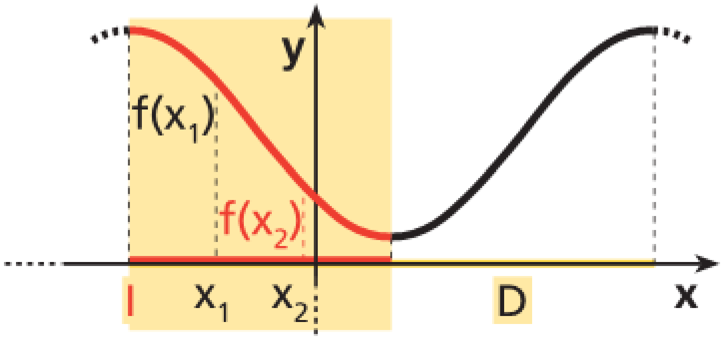
Funzione monotona

Una funzione di dominio $D \subseteq \mathbf{R}$ si dice monotòna in senso stretto in un intervallo *I*, sottoinsieme di *D*,
se, in quell'intervallo è sempre crescente o sempre decrescente in senso stretto.





Funzione monotòna crescente in *I*



Funzione monotòna decrescente in *I*

Funzioni reali di una variabile

Una funzione f definita in un sottoinsieme X dell'insieme dei numeri reali e a valori nell'insieme dei numeri reali si chiama anche funzione reale di una variabile reale

L'aggettivo reale unito alla parola funzione sta a significare che una tale funzione è a valori nell'insieme dei numeri reali

L'aggettivo reale unito alla parola variabile sta a significare che nella scrittura f(x), la x denota una variabile reale

Estremi di una funzione

Definizione

Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di R. Si dice che f è dotata di minimo (risp. massimo) in X se il suo codominio f(X) è dotato di minimo (risp. massimo) o, ciò che è lo stesso se

$\exists \bar{x} \in X \ (risp. \bar{\bar{x}} \in X) | \mathrm{f}(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in X \ (risp. f(x) \leq f(\bar{\bar{x}})$

Se ciò si verifica, il minimo (risp. massimo) di f(x) si chiama il minimo (risp. massimo) della funzione f in X e si denota con uno dei seguenti simboli:

$$minf, \min_{x \in X} f(x) (risp. maxf, \max_{x \in X} f(x))$$

Estremi di una funzione

Definizione

Sia f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di R. si dice che f è limitata inferiormente (risp. superiormente) in X se il suo codominio f(X) è limitato inferiormente (risp. superiormente) o, ciò che è lo stesso, se esiste un numero reale k tale che si abbia

$$k \leq f(x), \forall x \in X \qquad (risp. f(x) \leq k, \forall x \in X)$$

Un tale numero si chiama un minorante (risp. maggiorante) della f in X.

La funzione si dice limitata in X se è ivi limitata sia inferiormente, sia superiormente.

Se f è limitata inferiormente (risp. superiormente) in X, l'estremo inferiore (risp. superiore) di f in X si denota con uno dei seguenti simboli

$$inf\mathrm{f}, \inf_{x \in X} f(x) \qquad (risp. supf, \sup_{x \in X} f(x))$$

Funzioni pari e funzioni dispari

DEFINIZIONE

Funzione pari

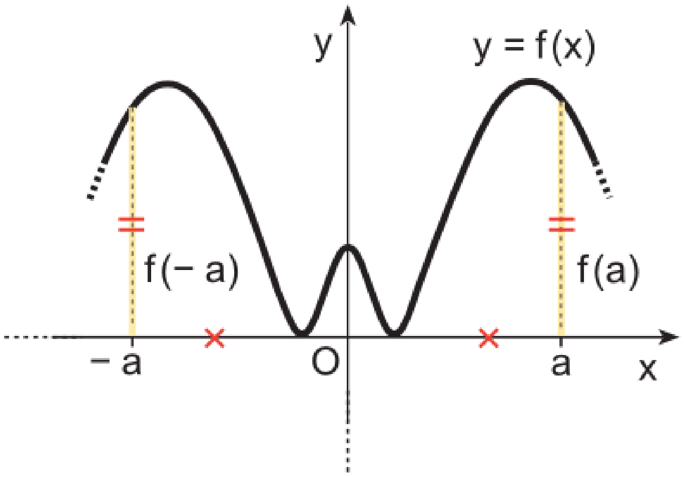
Indichiamo con X un sottoinsieme di **R** tale che, se $x \in X$, allora $-x \in X$. Una funzione $y = f(x)$ si dice pari in X se $f(-x) = f(x)$ per qualunque x appartenente a X.

ESEMPIO

$f(x) = 2x^4 - 1$

$f(-x) = 2(-x)^4 - 1$
$= 2x^4 - 1 = f(x)$

f è **pari**.



Funzioni pari e funzioni dispari

DEFINIZIONE

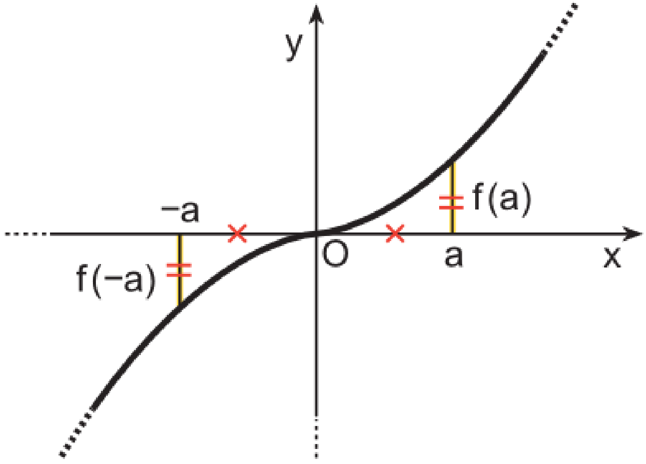
Funzione dispari
Indichiamo con X un sottoinsieme di **R** tale che, se $x \in X$, allora $-x \in X$.
Una funzione $y = f(x)$ si dice dispari in X se $f(-x) = -f(x)$ per qualunque x appartenente a X.

ESEMPIO

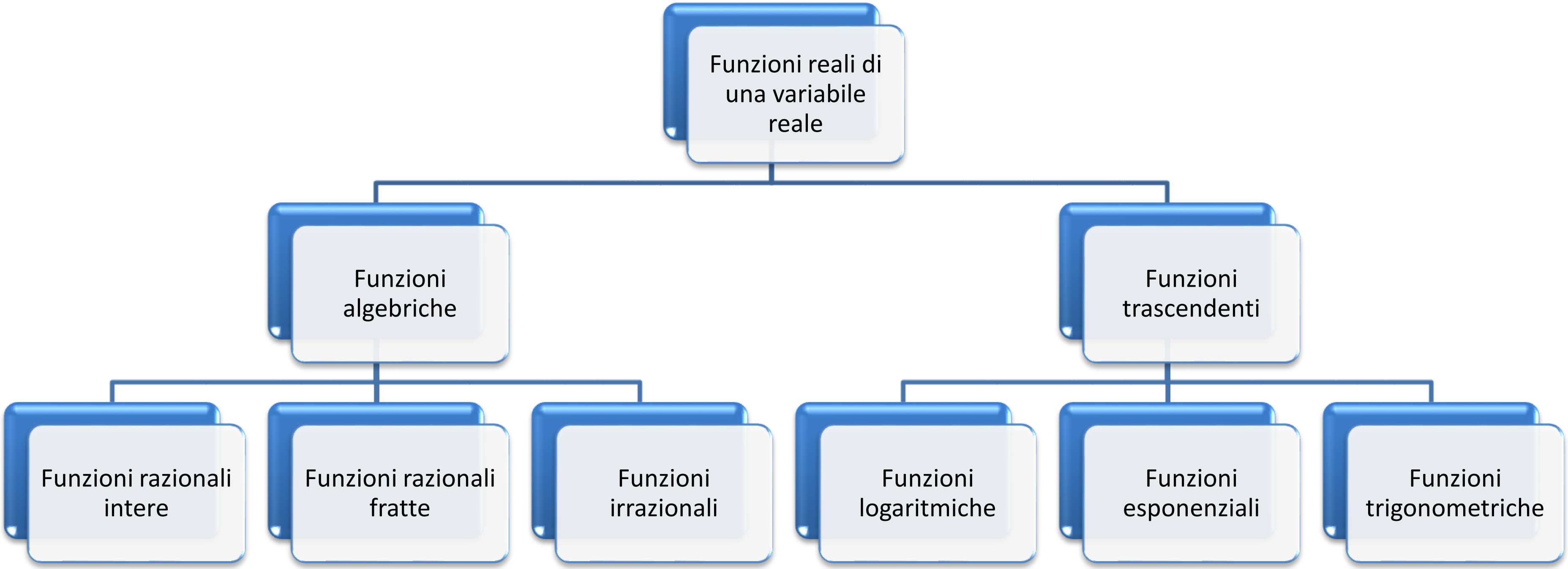
$f(x) = x^3 + x$

$f(-x) = (-x)^3 + (-x)$
$= -x^3 - x = -f(x)$

f è **dispari**.



Classificazione delle funzioni



La funzione lineare

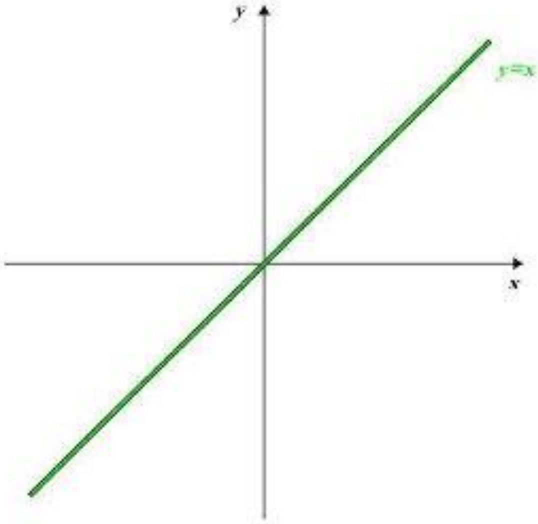
Si tratta di una funzione reale del tipo

$$f(x) = ax + b, \qquad \forall x \in X$$

dove a e b sono due numeri reali.

Se $a = 0$ la funzione si riduce alla funzione costante $f(x) = b$

Se $a = 1, b = 0$ essa si riduce alla funzione identica

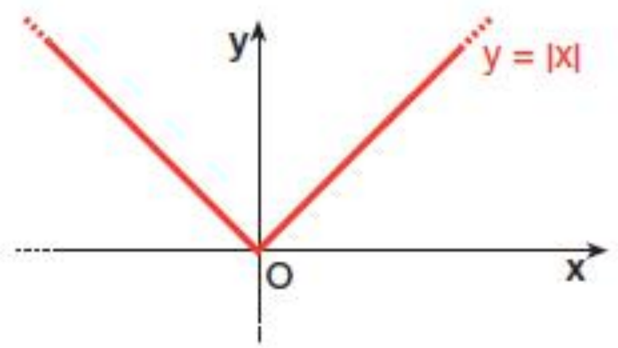


La funzione valore assoluto

La funzione reale f così definita

$$f(x) = |x|, \qquad \forall x \in R$$

si dice funzione valore assoluto.

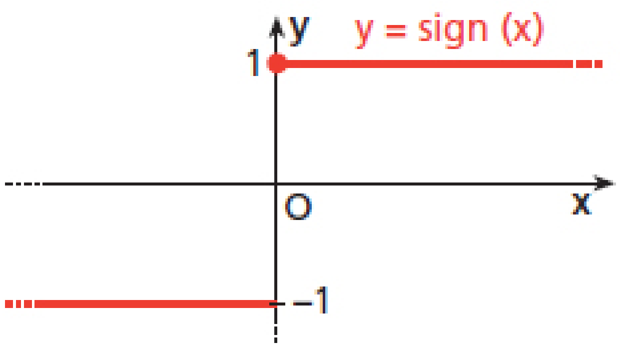


$$y = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

a. La funzione valore assoluto.

Le funzioni signum e parte intera

Per ogni numero reale x, si definisce funzione sign(x) la funzione sotto riportata



$$y = \begin{cases} 1 & \text{se } x \ge 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

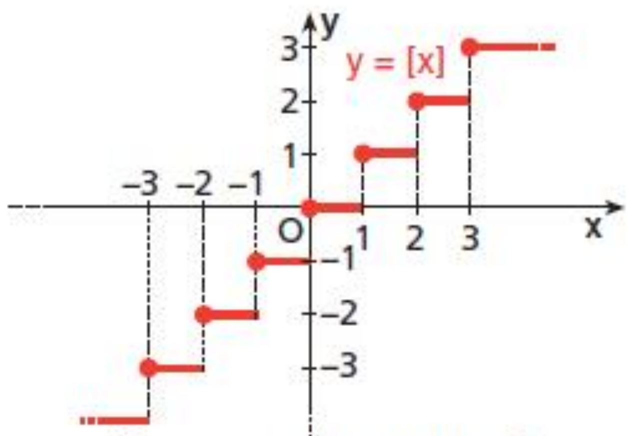
b. La funzione segno.

Per ogni numero reale x denotiamo con $[x]$ la parte intera di x, cioè il più grande degli interi non negativi $z \le x, se\ x \ge 0$ e il più piccolo degli interi non positivi $z \ge x, se\ è\ x < 0$.

La funzione reale così definita:

$$f(x) = [x], \forall x \in R$$

Si chiama funzione parte intera



$$y = \begin{cases} n & \text{se } n \le x < n + 1 \\ -(n + 1) & \text{se } -(n + 1) \le x < -n \end{cases}$$

c. La funzione parte intera.

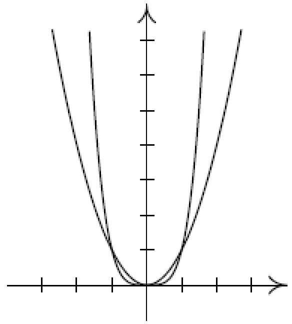
La funzione potenza (con esponente un intero positivo)

Se n è un intero positivo, si chiama funzione potenza di esponente n, la funzione reale così definita

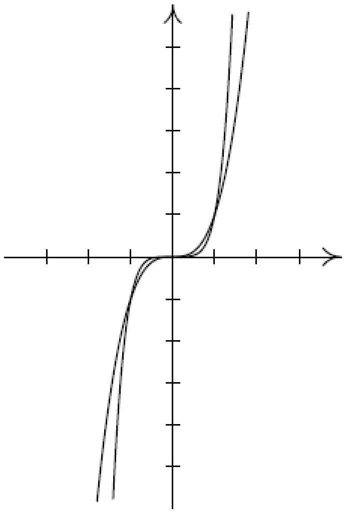
$$f(x) = x^n, \forall x \in R$$

Se n è pari essa è una funzione di R su $[0; +\infty]$ le cui restrizioni agli intervalli $]-\infty; 0]$ e $[0; +\infty[$ sono rispettivamente strettamente decrescente e strettamente crescente.

Se n è dispari, si tratta di una funzione strettamente crescente di R su R



$f(x) = x^n \quad n = 2, 4$



$f(x) = x^n \quad n = 3, 5$

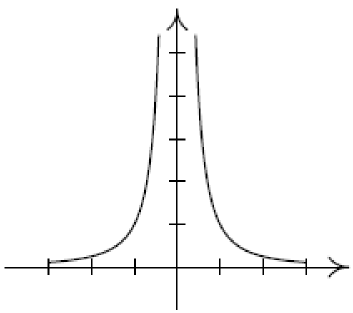
La funzione potenza (con esponente un intero negativo)

Se n è un intero positivo, si chiama funzione potenza con esponente intero negativo –n, la funzione reale così definita

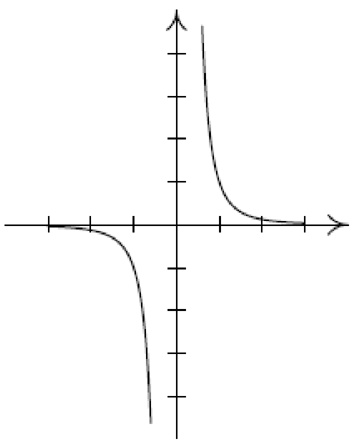
$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \qquad \forall x \in R - \{0\}$$

Se n è pari si tratta di una funzione di $R - \{0\}$ su $]0; +\infty[$ le cui restrizioni agli intervalli $]-\infty; 0]$ e $[0; +\infty[$ sono rispettivamente strettamente crescente e strettamente decrescente.

Se n è dispari si tratta di una funzione di $R - \{0\}$ su $R - \{0\}$ le cui restrizioni agli intervalli $]-\infty; 0]$ e $[0; +\infty[$ sono strettamente decrescenti.



$f(x) = 1/x^2$



$f(x) = 1/x^3$

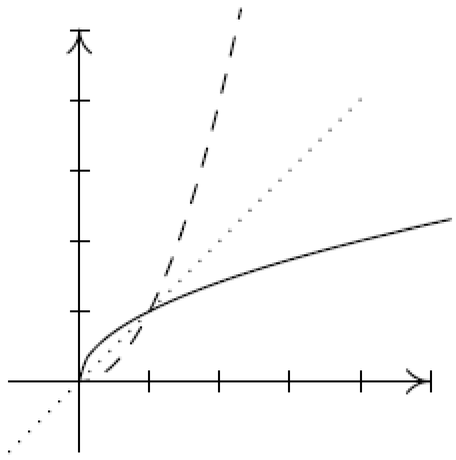
La funzione radice n-esima

Se n è pari, la restrizione di x^n all’intervallo $[0; +\infty[$ è strettamente crescente, quindi e invertibile. La sua inversa è la funzione $f(x) = \sqrt[n]{x}$ tale che

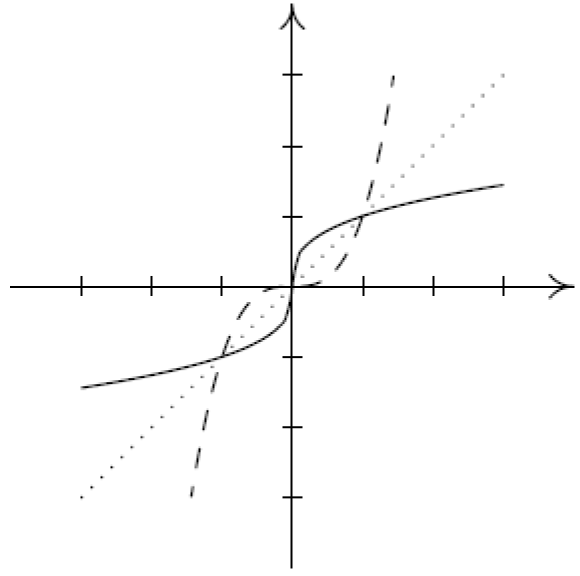
$$x \in [0; +\infty[\ \mapsto \sqrt[n]{x}$$

Se n è dispari, si ha una funzione strettamente crescente, quindi e invertibile. La sua inversa è la funzione $f(x) = \sqrt[n]{x}$ tale che

$$x \in R \mapsto \sqrt[n]{x}$$



$\sqrt[n]{x}$, n pari



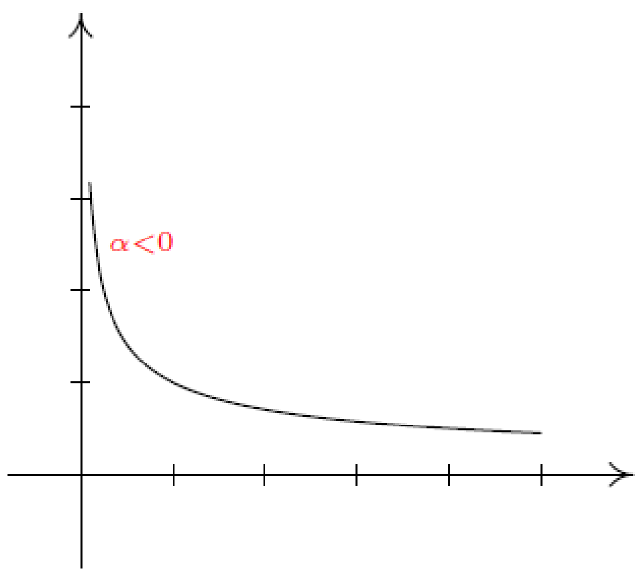
$\sqrt[n]{x}$, n dispari

La funzione potenza (con esponente un numero reale)

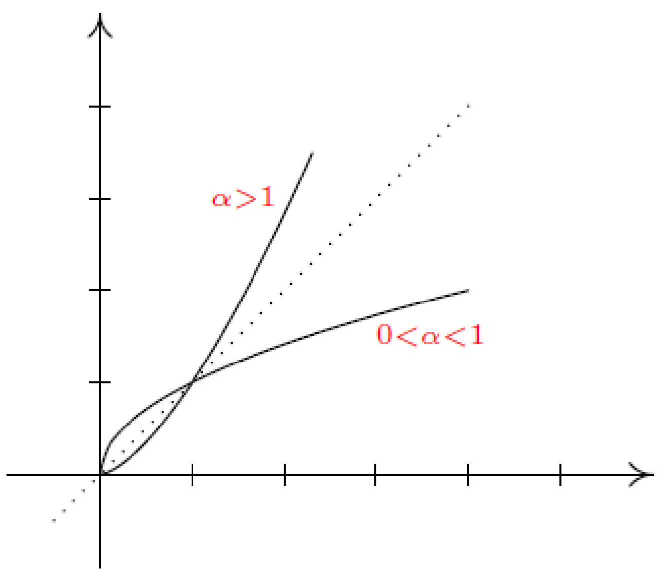
Se α è un numero reale non nullo, si chiama funzione potenza con esponente α la funzione reale

$$f(x) = x^{\alpha}$$

definita nell'intervallo $[0; +\infty[$ *se* α>0, nell'intervallo $]0; +\infty[$ *se* $\alpha < 0$.



$x^{\alpha}, \ \alpha \leq 0$



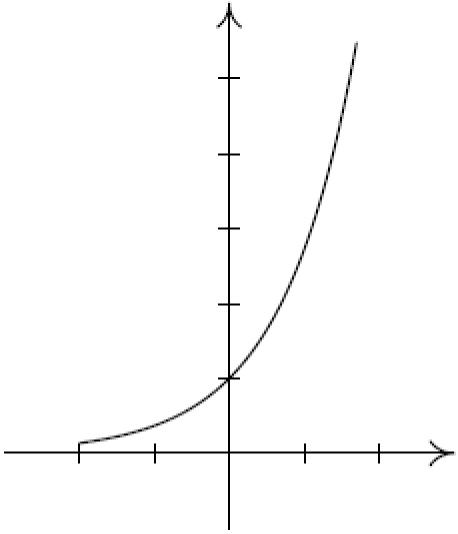
$x^{\alpha}, \ \alpha > 0$

La funzione esponenziale

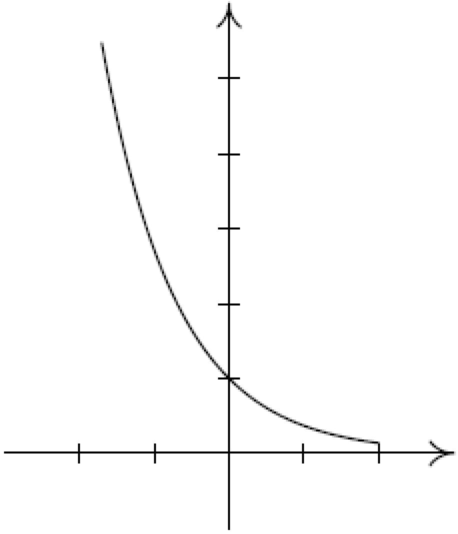
Se a è un numero reale positivo e diverso da 1, si chiama funzione esponenziale di base a, la funzione reale f così definita:

$$f(x) = a^x, \forall x \in R$$

La funzione esponenziale di base a è una funzione di R sull'intervallo $]0; +\infty[$, strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $0 < a < 1$

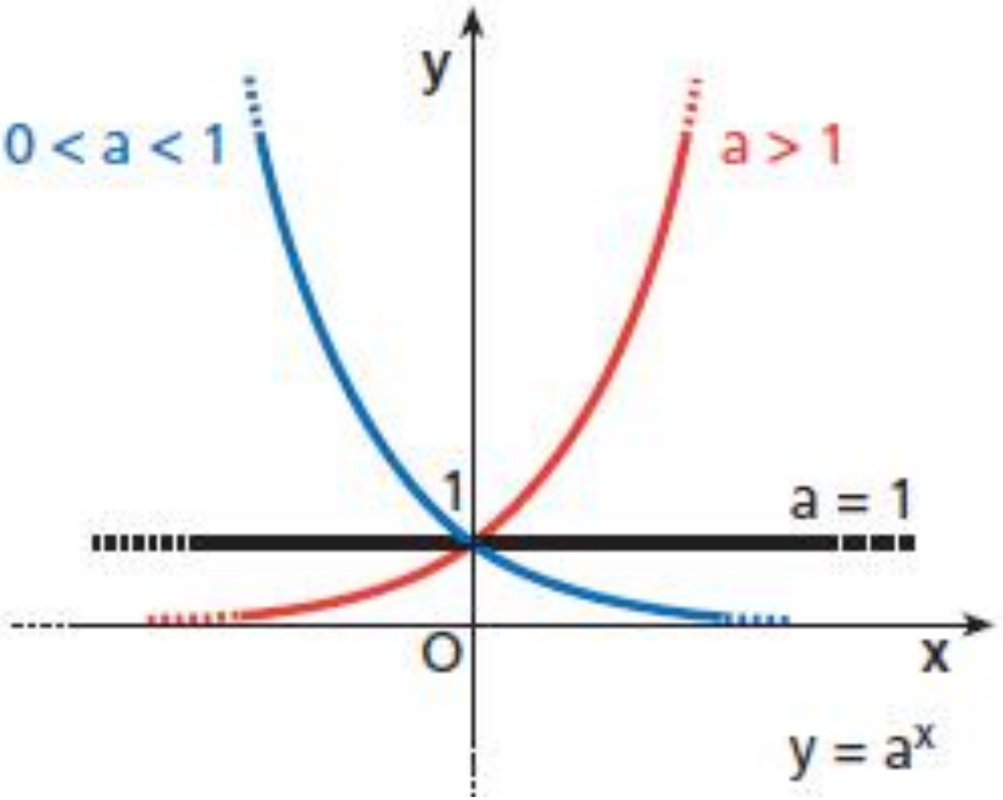


$a > 1$



$0 < a < 1$

La funzione esponenziale

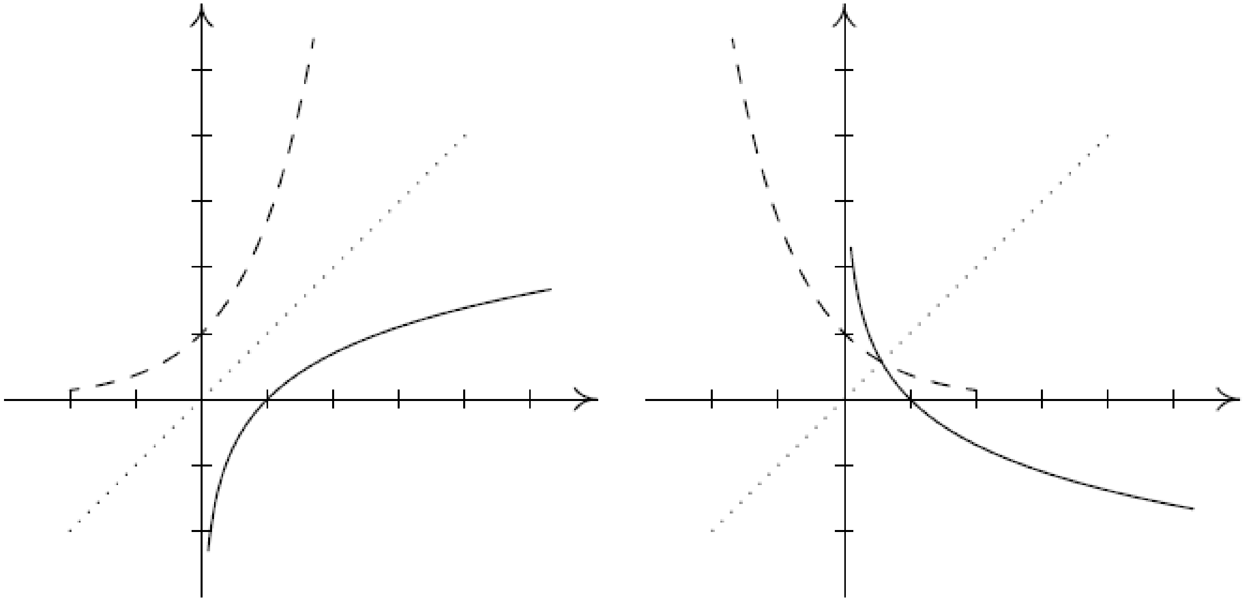


La funzione logaritmo

Se a è un numero reale positivo e diverso da 1, si chiama funzione logaritmo di base a, la funzione reale f così definita

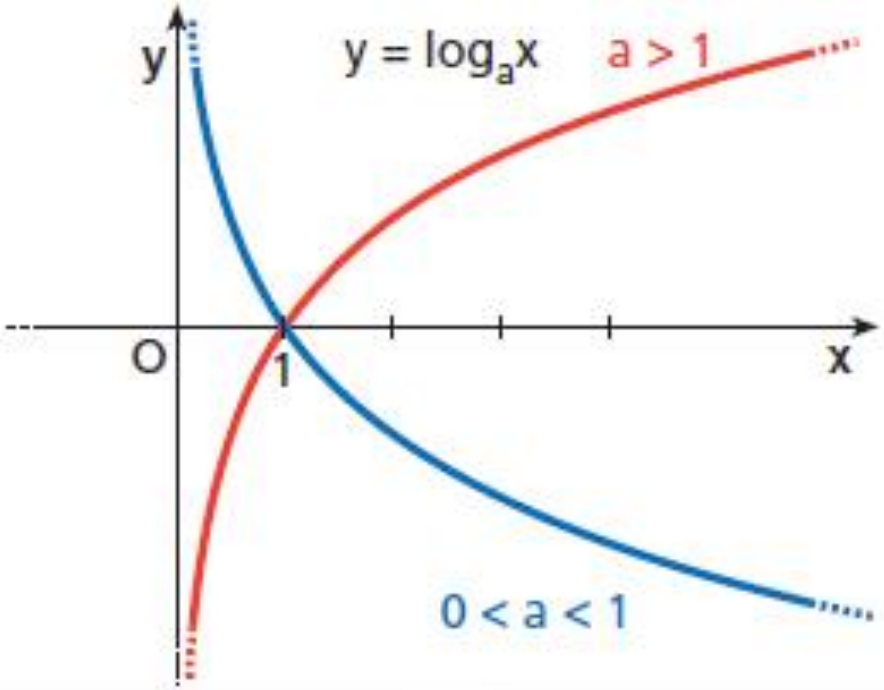
$$f(x) = \log_a x \,, \forall x \in]0; +\infty[$$

Si tratta di una funzione che ha come insieme di definizione $]0; +\infty[$ e come codominio R, strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $0 < a < 1$



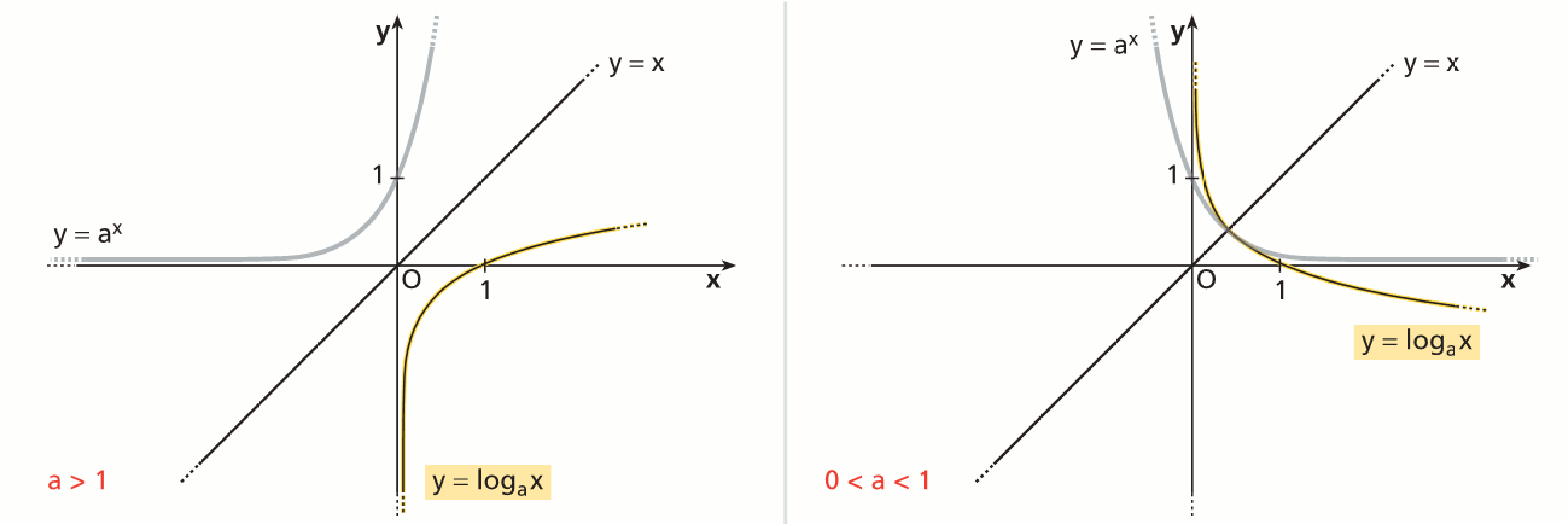
$a > 1$ $\quad$ $0 < a < 1$

La funzione logaritmo



Le funzioni esponenziale e logaritmo

La funzione esponenziale e la funzione logaritmica

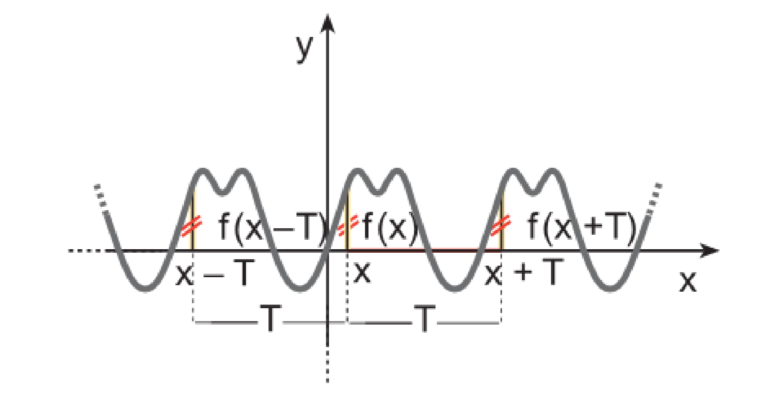


Le funzioni periodiche

DEFINIZIONE

Funzione periodica
Una funzione $y = f(x)$ si dice periodica di periodo T, con $T > 0$, se, per qualsiasi numero k intero, si ha:

$$f(x) = f(x + kT).$$

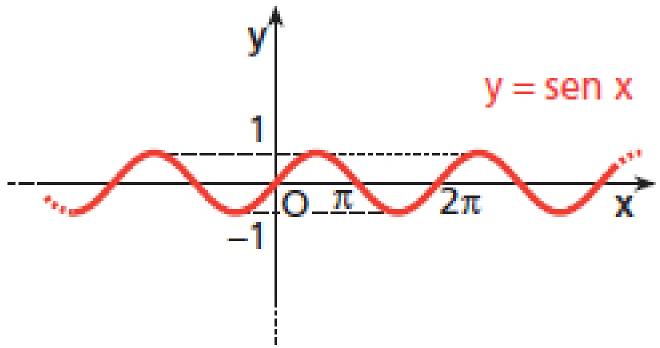


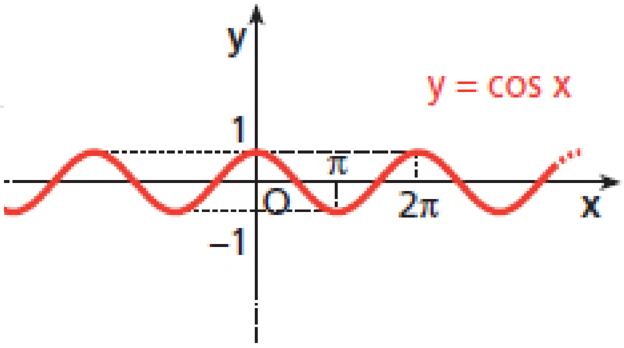
ESEMPIO

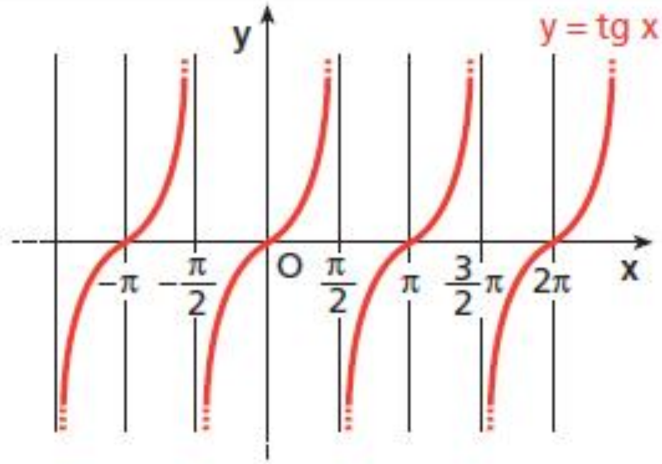
y = sen (x) è periodica di periodo 2π perché sen (x) = sen ($x + 2k\pi$).

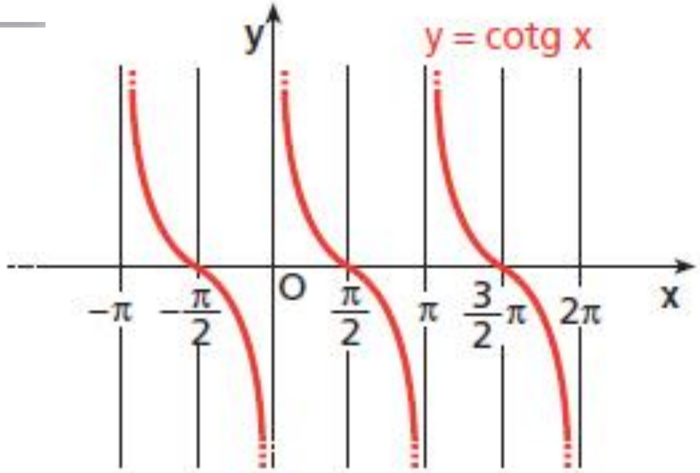
y = tg (x) è periodica di periodo π perché tg (x) = tg ($x + k\pi$).

La funzione seno



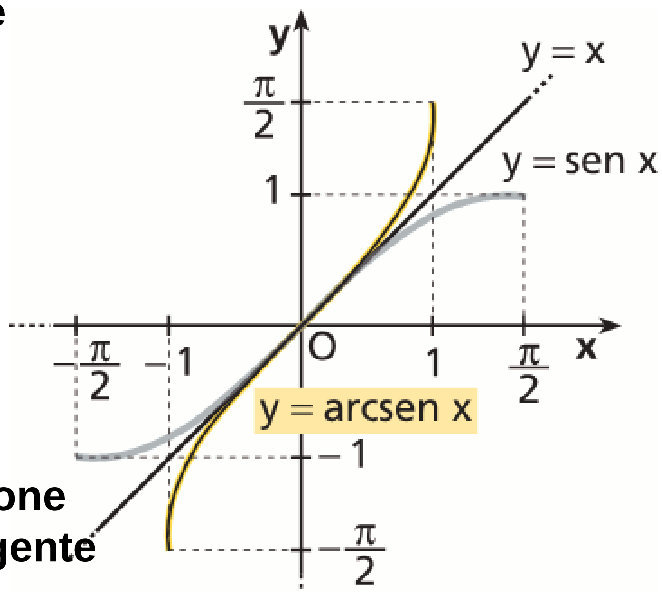




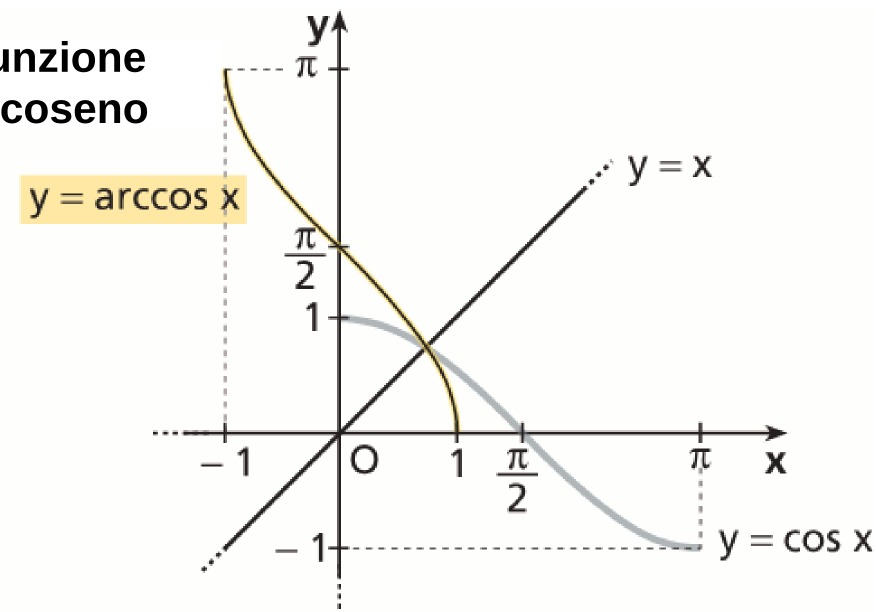


Le funzioni trigonometriche inverse

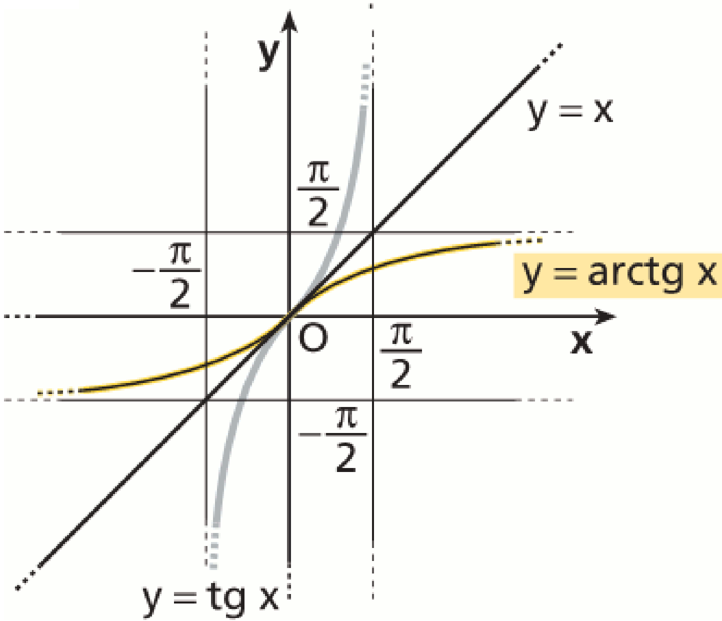
La funzione arcoseno



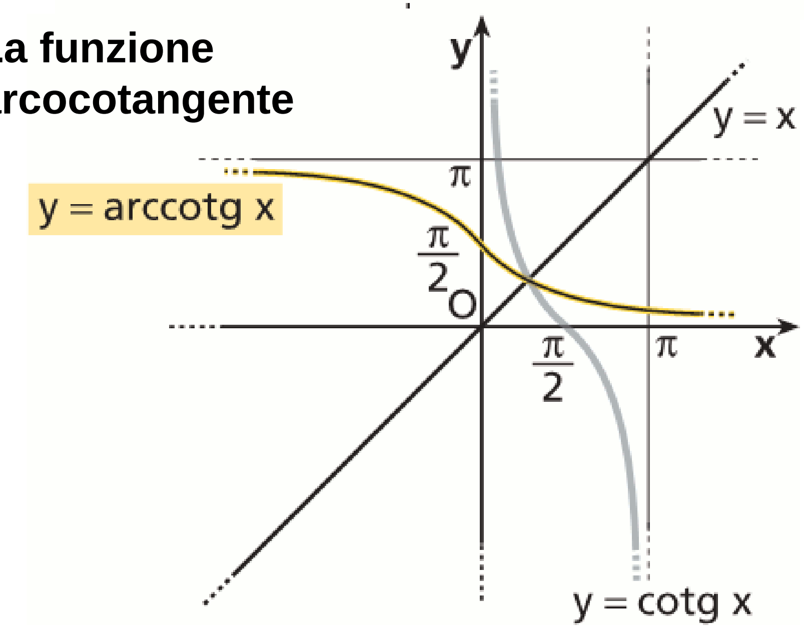
La funzione arcocoseno



La funzione arcotangente

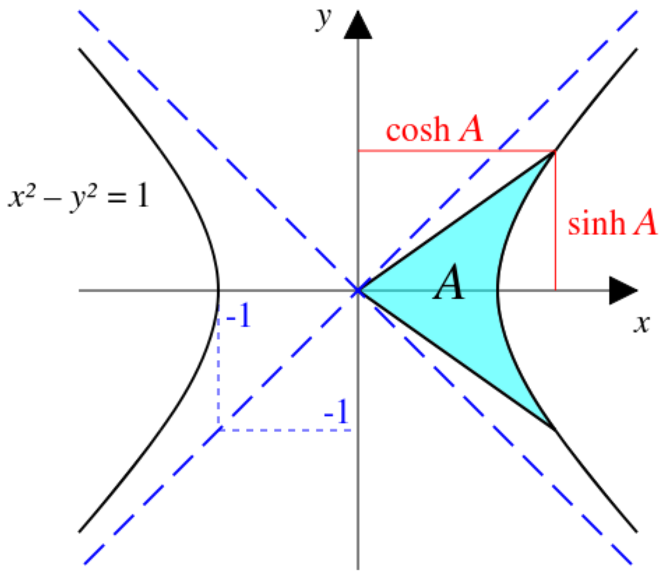


La funzione arcocotangente



Le funzioni iperboliche

Le **funzioni iperboliche** costituiscono una famiglia di funzioni speciali dotate di alcune proprietà analoghe a corrispondenti proprietà delle ordinarie funzioni trigonometriche.
Data una iperbole equilatera unitaria, quindi con $a = b = 1$, centrata con gli assi sugli assi coordinati e dato un angolo α , consideriamo il settore iperbolico di area $\alpha/2$: questo determina un punto **P** come intersezione con l'iperbole; definiamo quindi **seno iperbolico** $sinh$ l'ordinata del punto **P** e **coseno iperbolico** $cosh$ l'ascissa del punto **P**.



Le funzioni iperboliche ed esponenziali

È possibile legare le funzioni iperboliche alla funzione esponenziale:

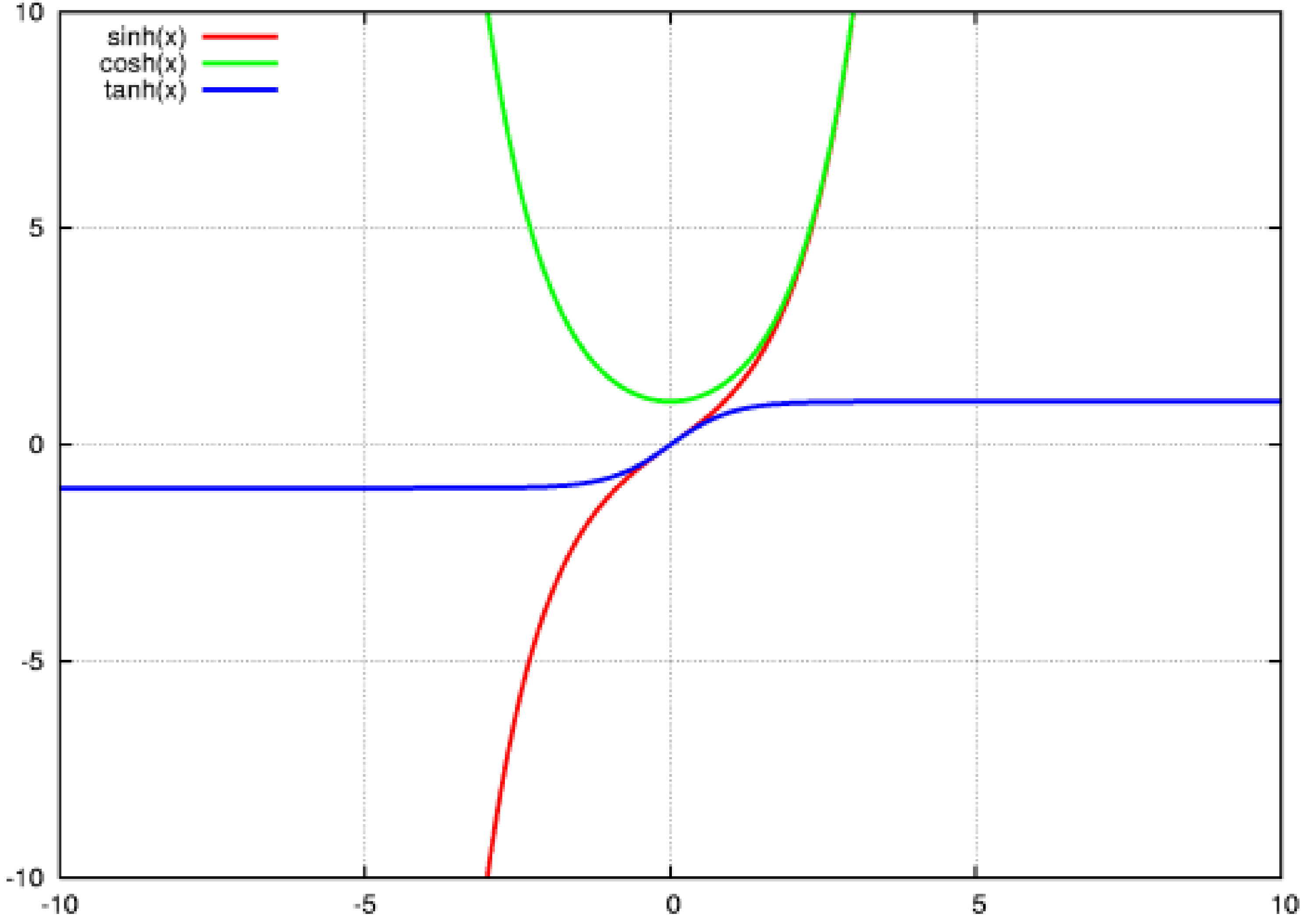
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{1 + e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$$

Le funzioni iperboliche: grafici



Le funzioni iperboliche

Così come al variare della variabile reale t i punti $(cost, sint)$ definiscono la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, analogamente i punti $(cosht, sinht)$ definiscono l'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 1$.
Questa è una conseguenza dell'identità: $(cosht)^2 - (sinht)^2 = 1$
derivabile dalle definizioni mediante funzioni esponenziali con manipolazioni algebriche elementari.

Al contrario delle corrispondenti funzioni trigonometriche, le funzioni iperboliche non sono periodiche.

L'argomento t delle funzioni seno e coseno che definiscono la circonferenza può essere interpretato naturalmente come un angolo; l' argomento t delle funzioni iperboliche rappresenta invece due volte l'area del settore compreso tra il segmento che collega l'origine con il punto $(cosht, sinht)$ su un ramo dell'iperbole equilatera, l'arco di tale iperbole che dal punto si conclude nel punto (1;0) sull'asse x e il segmento sull'asse x da questo punto all'origine.

Le funzioni iperboliche soddisfano molte identità, simili a corrispondenti identità trigonometriche.

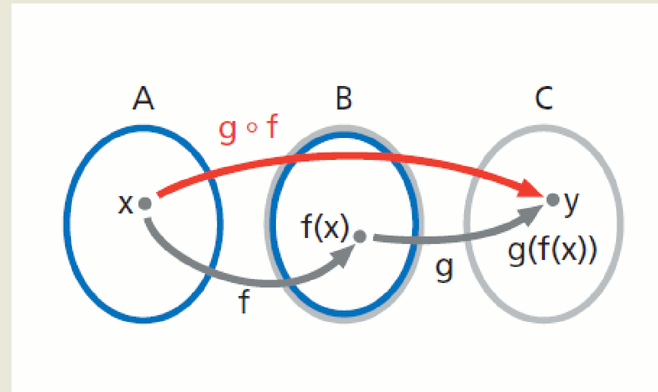
Le funzioni composte

Le funzioni composte

Date le due funzioni $f : A \rightarrow B$

$g : B \rightarrow C$ con $\boldsymbol{f \circ g}$ o $\boldsymbol{y = g\,(f\,(x))}$

indichiamo la funzione, detta funzione composta, da *A a C* che si ottiene associando a ogni *x* di *A* l'immagine mediante *g* dell'immagine di *x* mediante *f.*



ESEMPIO

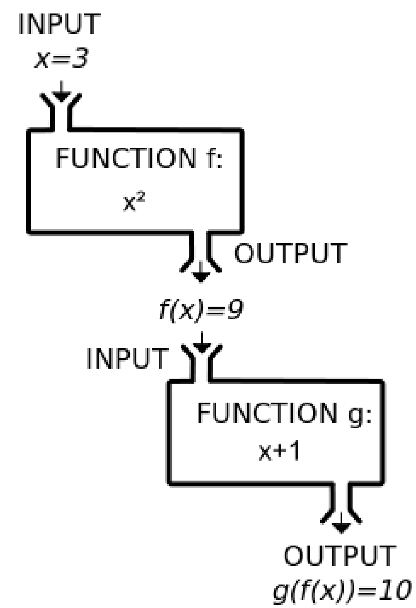
Consideriamo: $f(x) = x^2, g(x) = x + 1$

Otteniamo:

$$g \circ f = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = x^2 + 1$$

$$f \circ g = f\big(g(x)\big) = f(x+1) = (x+1)^2$$

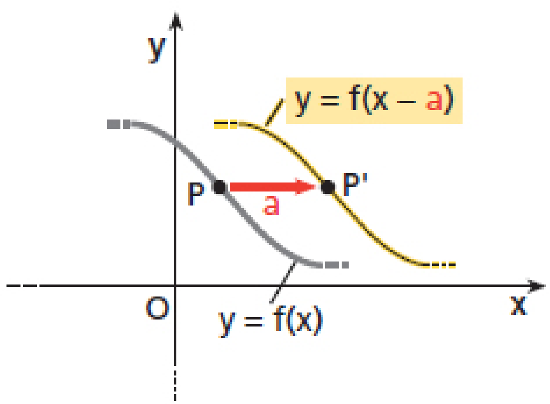
La composizione NON è commutativa



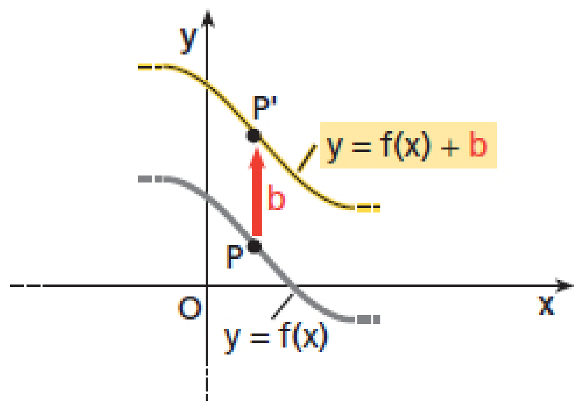
Grafici ottenibili mediante trasformazioni geometriche

Traslazioni

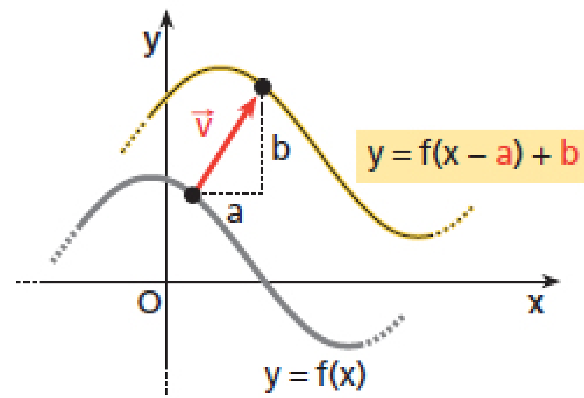
Una **traslazione** è una isometria di equazioni $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$



a. Traslazione di vettore $\vec{v}(a;\, 0)$ parallelo all'asse *x*.



b. Traslazione di vettore $\vec{v}(0;\, b)$ parallelo all'asse *y*.



c. Traslazione di vettore $\vec{v}(a;\, b)$.

La traslazione e il grafico di una funzione

Grafico di una funzione e della funzione traslata secondo il vettore $\bar{v} = (a; b)$

.

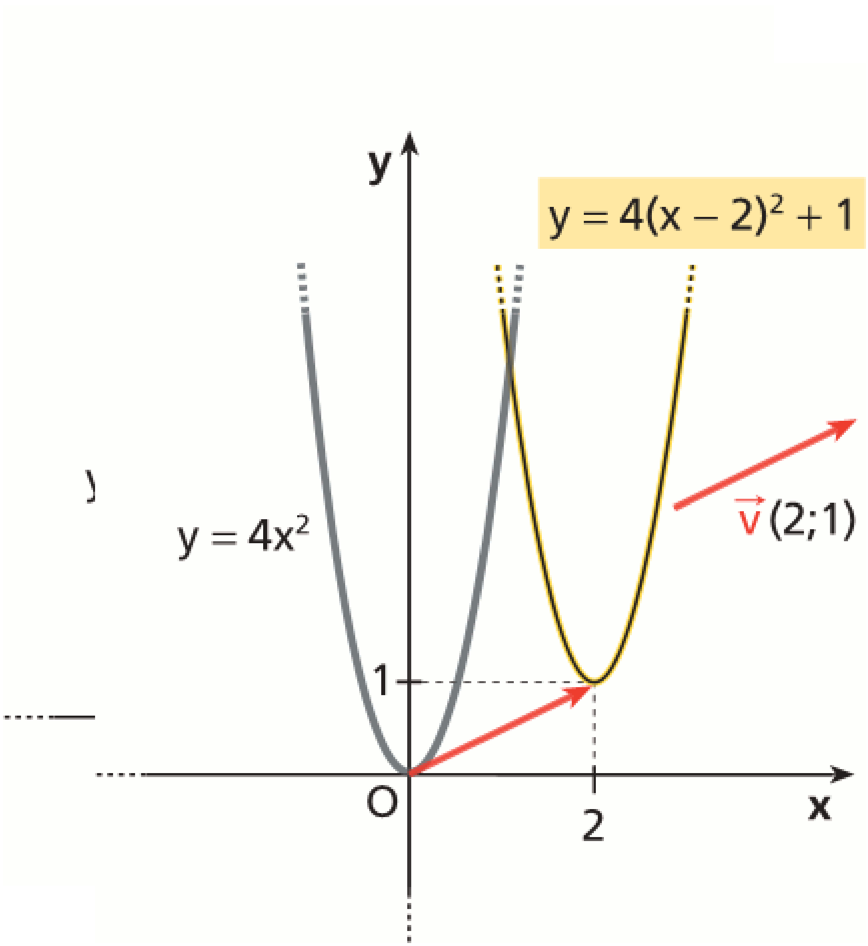
ESEMPIO

Data la funzione $y = 4x^2$
trasliamo il suo grafico secondo il vettore $\vec{v}(2;1)$

$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}$ quindi

$y' - 1 = 4(x' - 2)^2 \longrightarrow y' = 4(x' - 2)^2 + 1$

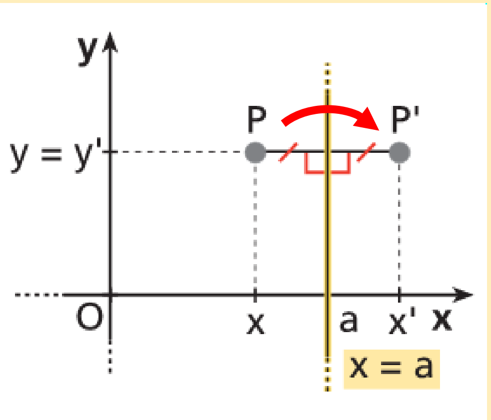
ovvero $y = 4(x - 2)^2 + 1$



Le simmetrie

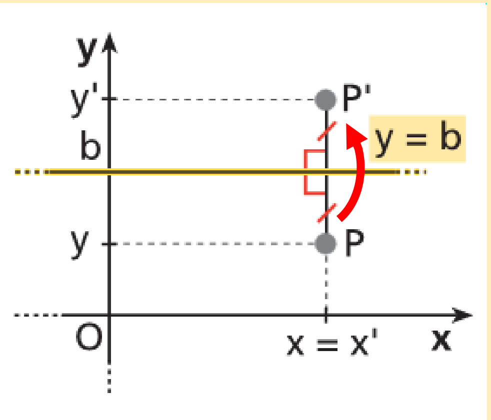
Simmetria rispetto all'asse *x = a*

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$



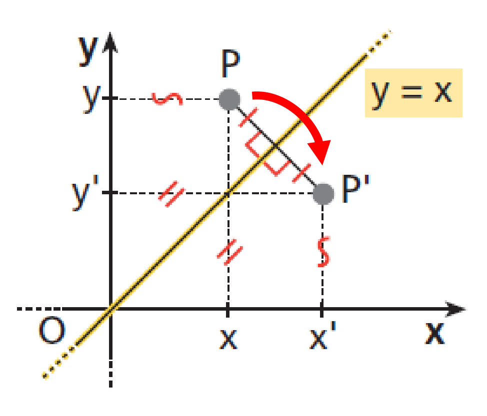
Simmetria rispetto all'asse *y = b*

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$



Simmetria rispetto all'asse *y = x*

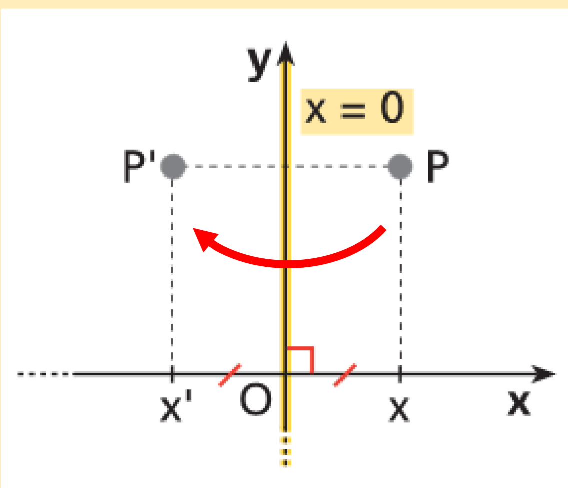
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



Le simmetrie

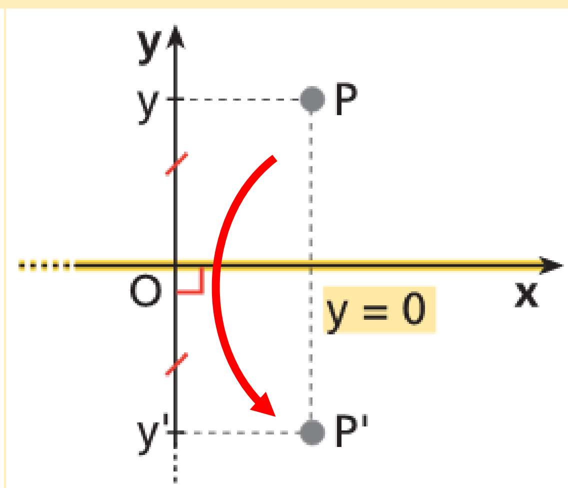
Simmetria rispetto all'asse *x* = 0

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$



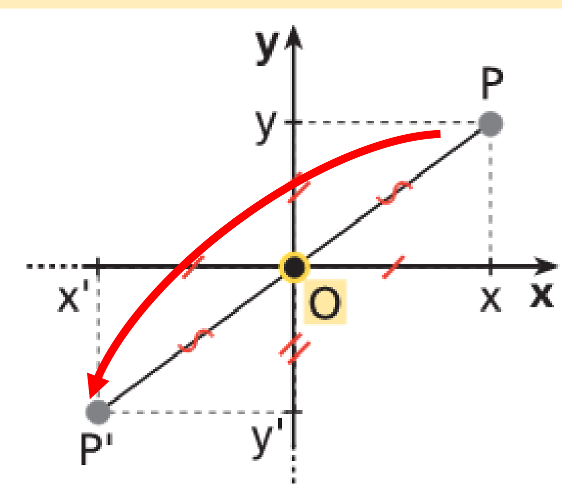
Simmetria rispetto all'asse *y* = 0

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

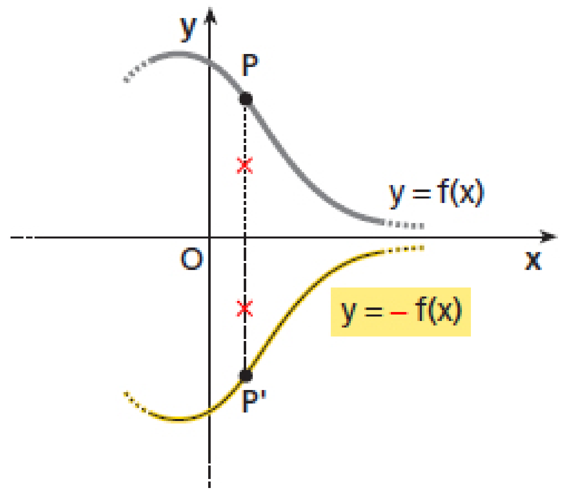


Simmetria centrale

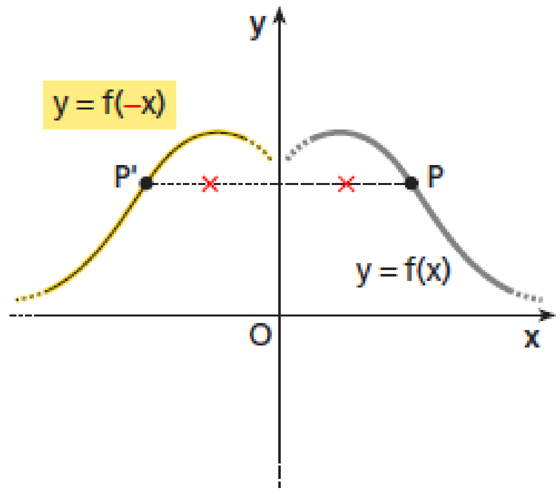
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$



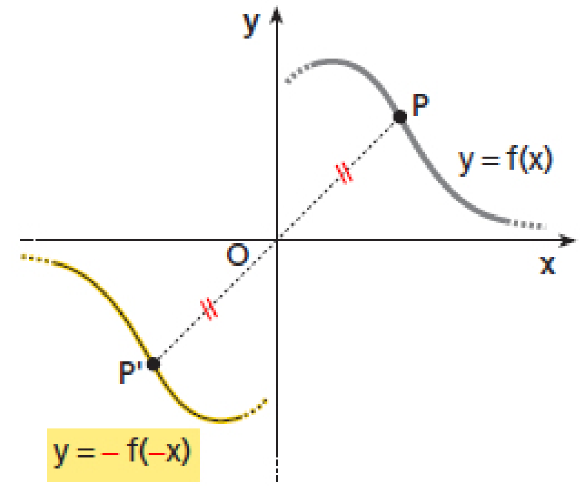
Le simmetrie



a. Simmetria rispetto all'asse *x*.

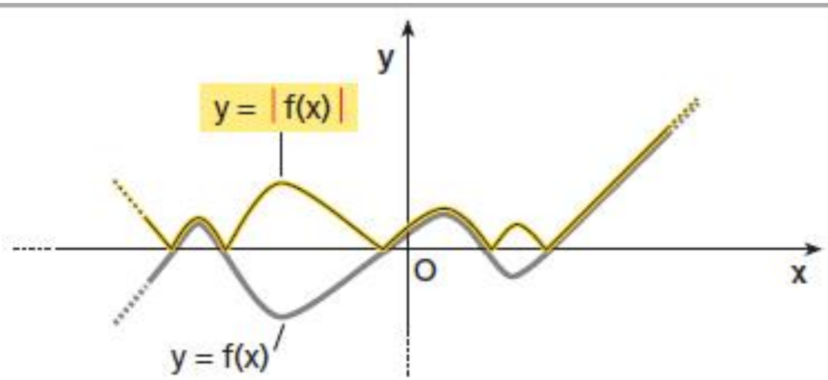


b. Simmetria rispetto all'asse *y*.

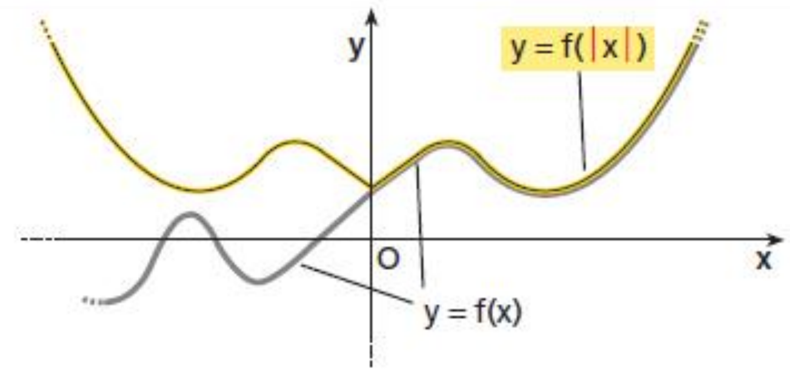


c. Simmetria centrale rispetto a *O*.

Simmetrie e valori assoluti



d. Il grafico di $|f(x)|$, se $f(x) \geq 0$, è lo stesso di $f(x)$; se $f(x) < 0$, è simmetrico rispetto all'asse *x* di quello di $f(x)$.



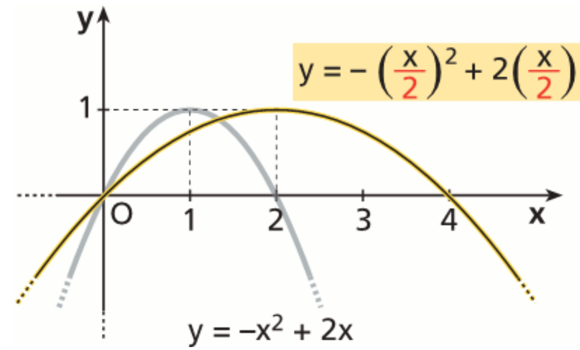
e. Per $x \geq 0$ il grafico è lo stesso di $y = f(x)$, per $x < 0$ il grafico è il simmetrico rispetto all'asse *y* di quello che $y = f(x)$ ha per $x > 0$.

Le dilatazioni

Una **dilatazione** è una trasformazione non isometrica di equazioni $\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases}$ con $m, n \in \mathbb{R}^+$

ESEMPIO

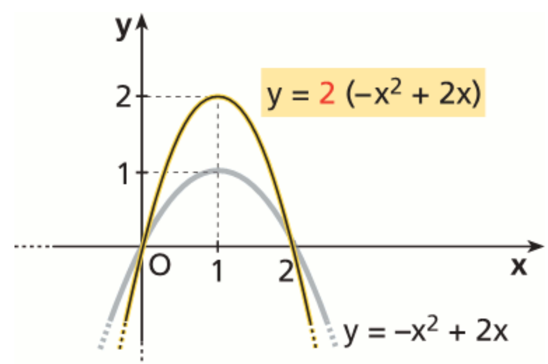
***n* = 1,**
***m* = 2**



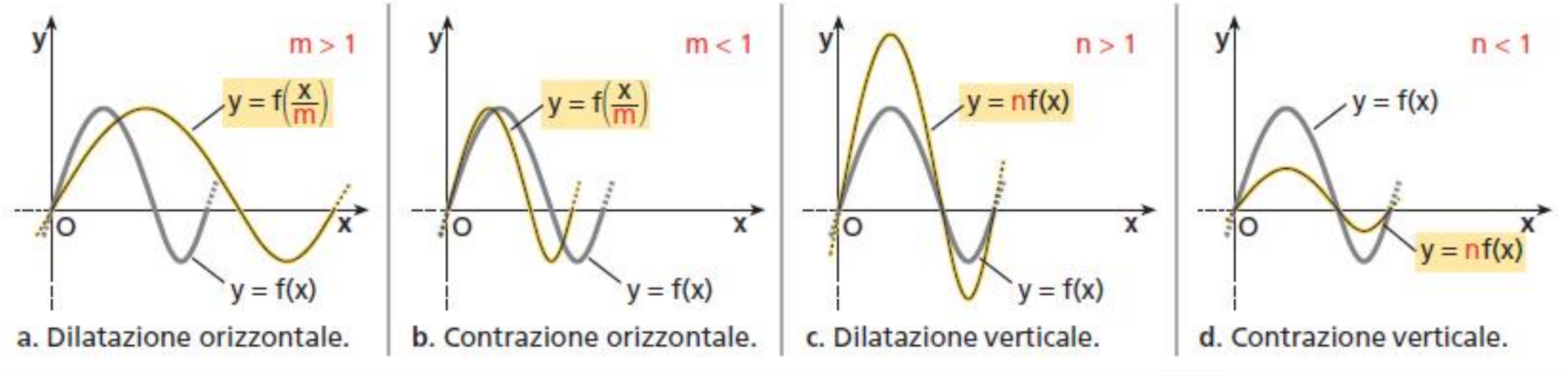
Data la funzione $y = f(x)$, la funzione f' il cui grafico è il corrispondente di f mediante la dilatazione è $y = n f\left(\frac{x}{m}\right)$.

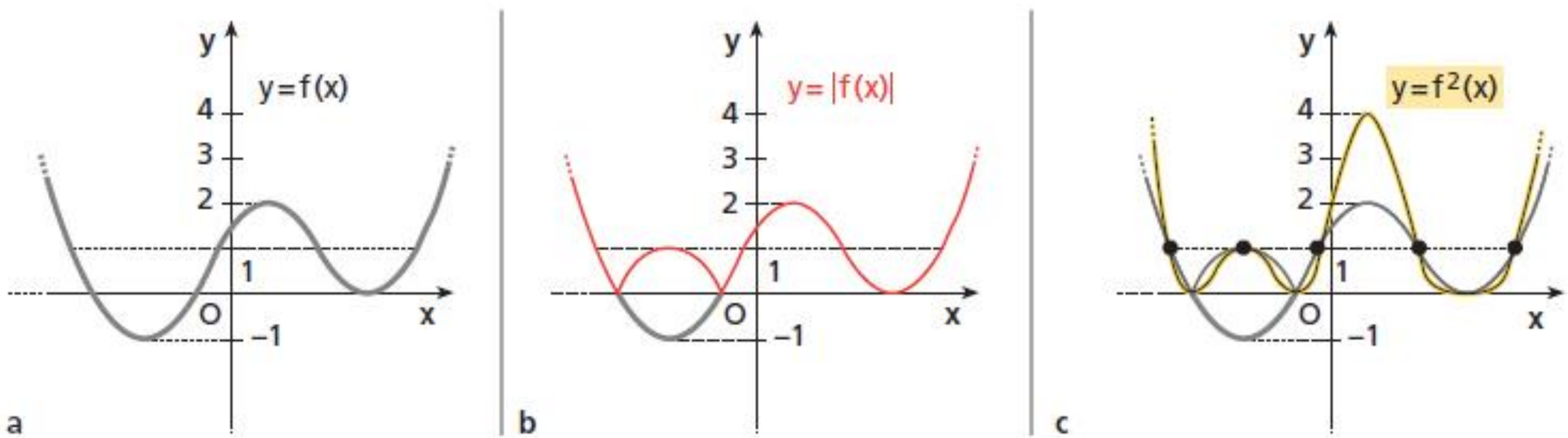
ESEMPIO

***m* = 1,**
***n* = 2**



Le dilatazioni





Calcolo del periodo delle funzioni

Definizione

Siano: f una funzione reale definita nel sottoinsieme X di R, T un numero reale positivo. La funzione f si dice periodica in X, di periodo T se X soddisfa la seguente proprietà:

$$x \in X \Rightarrow x \pm T \in X$$

e per f vale l'uguaglianza

$$f(x \pm T) = f(x), \qquad \forall x \in X$$

Proposizione

Se la funzione $f: X \subseteq R \rightarrow R$ è periodica in X di periodo T, allora l'insieme X gode della proprietà (più forte della precedente):

$$x \in X \Rightarrow x + kT \ \in X, \qquad \forall k \in Z$$

e la funzione f soddisfa l'uguaglianza

$$f(x \pm kT) = f(x), \qquad \forall x \in X \ e \ \forall k \in Z$$

Il periodo delle funzioni $y = sinx$ e $y = cosx$ è 2π; il periodo delle funzioni $y = tgx$ e $y = cotgx$ è π

$y = f_1(x) + f_2(x)$	**Se** $T_1 = T_2 \quad \Rightarrow \quad T = T_1 = T_2$
	Se $T_1 \neq T_2 \quad \Rightarrow \quad T = m.c.m\,(T_1, T_2)$
$y = f_1(x) - f_2(x)$	**Se** $T_1 = T_2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T_1}{2} = \frac{T_2}{2}$
	Se $T_1 \neq T_2 \quad \Rightarrow \quad T = m.c.m\,(T_1, T_2)$
$y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$	**Se** $T_1 = T_2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T_1}{2} = \frac{T_2}{2}$
	Se $T_1 \neq T_2 \quad \Rightarrow \quad T = m.c.m\,(T_1, T_2)$
$y = f(kx)$	$\frac{T}{k}$
$y = \lvert f(x) \rvert$	$\frac{T}{2}$ **per seno e coseno**
	T **per tangente e cotangente**
$y = [f(x)]^{2n}$	$\frac{T}{2}$ **per seno e coseno**
	T **per tangente e cotangente**
$y = [f(x)]^{2n+1}$	**T**
$y = \sqrt[n]{f(x)}$	**T**

Calcolo del periodo delle funzioni

Osservazione

Quando i due periodi presentano una forma frazionaria e sono diversi tra loro, per calcolare il m.c.m. basta esprimere entrambi i periodi mediante frazioni di uguale denominatore e calcolare il m.c.m. dei numeratori e dividerlo per i denominatori

Esempio

Si calcoli il periodo della funzione $y = sin^2x - cos3x$

$$T = m.c.m.\left(2\pi;\ \frac{2}{3}\pi\right) = m.c.m.\left(\frac{2\pi}{2};\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= m.c.m.\left(\frac{3}{3}\pi;\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{6}{3}\pi = 2\pi$$