



# LIMITI E CONTINUITA' DELLE FUNZIONI REALI II

Prof. Roberto Capone  
A.A. 2016/17  
Corso di Studi in Ingegneria Chimica



# La continuità

---

Sia  $f$  una funzione reale di variabile reale definita in  $X$ .

Definizione.

Si dice che  $f$  è continua in un punto  $x_0 \in X$  se  $\forall I' \in \mathfrak{S}(f(x_0)) \exists I \in \mathfrak{S}(x_0)$  tale che:

$f(x) \in I', \forall x \in X \cap I$ , cioè se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall x \in X: |x - x_0| < \delta$$

# La continuità

---

---

## ▪ **Proposizione**

▪ Ogni funzione  $f$  è continua in ogni punto isolato di  $X$ ; inoltre, una funzione  $f$  è continua in un punto  $x_0 \in X \cap DX$  se e solo se esiste il limite di  $f$  in  $x_0$  e si ha

▪  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

## **Dimostrazione.**

Sia  $x_0$  un punto isolato di  $X$  e sia  $I$  un intorno di  $x_0$  tale che  $I \cap X = \{x_0\}$ .

Allora si ha:

$$f(x) = f(x_0) \in I', \forall x \in I \cap X$$

qualunque sia  $I' \in \mathfrak{S}(f(x_0))$  quindi  $f$  è continua in  $x_0$ .

Se  $x_0 \in X \cap DX$  si ha la tesi osservando che per definizione di limite le due definizioni sono equivalenti.

# Esempi

---

1. Ogni funzione costante  $f: x \in X \rightarrow c \in R$  è continua in  $X$ .  
Infatti  $\forall x_0 \in X \cap DX$  si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c = f(x_0)$$

2.  $\forall a, b \in R$  la funzione  $f: x \in R \rightarrow ax + b$  è continua in  $R$ . Infatti  
 $\forall x_0 \in R$  si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (ax + b) = ax_0 + b = f(x_0)$$

3. La funzione

$$f: x \in R \rightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

non è continua in 0, infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0)$$

# Esempi

---

## 4. La funzione di Dirichlet

$$f: x \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è continua in  $x_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$ .

Infatti, preso  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  qualsiasi sia  $\delta > 0$ , se  $x_0 \in \mathbb{Q}$  per la densità di  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ ,

$\exists x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}: |x - x_0| < \delta$  e  $|f(x) - f(x_0)| = 1 \not< \varepsilon$

Analogamente, se  $x \in \mathbb{Q}: |x - x_0| < \delta$  e  $|f(x) - f(x_0)| = 1 \not< \varepsilon$

# Punto di accumulazione

---

## ▪ **Definizione.**

- Se  $x_0 \in X$  ed è un punto di accumulazione a destra (risp. a sinistra) per  $X$ ; si dice che  $f$  è continua a destra (risp. a sinistra) in  $x_0$  se esiste il limite a destra (risp. a sinistra) di  $f$  in  $x_0$  ed è uguale a  $f(x_0)$

## ▪ **Proposizione.**

- Siano  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow R$  due funzioni reali di una variabile reale. Se  $f$  è continua in un punto  $x_0 \in X$  e  $g$  è continua nel punto  $y_0 = f(x_0)$ , allora la funzione composta  $g \circ f$  è continua in  $x_0$

# Prolungamento per continuità di una funzione

---

Se  $X$  e  $Y$  sono due insiemi numerici, si dice che  $X$  è denso rispetto a  $Y$  se:

$$Y \subset X \cup DX$$

Evidentemente:  $X$  è denso rispetto a  $Y$  se e solo se  $\forall \epsilon \in Y$  e  $\forall I_x$  risulta:

$$I \cap X \neq \emptyset$$

## Teorema di prolungamento per continuità

Siano  $X$  e  $Y$  due insiemi numerici con  $X \subset Y$  e  $X$  denso rispetto a  $Y$ .

Per ogni funzione  $f: X \rightarrow R$  continua in  $X$  e convergente in ogni punto di  $Y \setminus X$  esiste un unico prolungamento continuo di  $f$  su  $Y$ ; esso è il prolungamento definito da:

$$g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \forall x_0 \in Y \setminus X$$

# Dimostrazione

---

---

Cominciamo con l'osservare che  $\varphi$  e  $\psi$  sono due funzioni continue in  $Y$  tali che:

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in X$$

denotate con  $\varphi_1$  e  $\psi_1$  rispettivamente le restrizioni di  $\varphi$  e  $\psi$  a  $X$ , in conseguenza del teorema discendente da quello di unicità del limite si ha per ogni  $x_0 \in Y \setminus X$ :

$$\varphi(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi_1(x) = \psi(x_0)$$

Da tale osservazione si deduce che ogni funzione continua  $f: X \rightarrow R$  ha al più un prolungamento continuo su  $Y$ . Resta da provare che il prolungamento  $g$  di  $f$  su  $Y$  è continuo in  $Y$ .

Assegniamo un punto  $x_0 \in Y$ . Dalla continuità di  $f$  in  $x_0$ , si ha:

$$|f(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in X \text{ e tale che } |x - x_0| < \delta$$



# Dimostrazione

---

Sia  $x$  un punto di  $Y \setminus X$  tale che  $|x - x_0| < \delta$  e sia  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di punti di  $X$  convergente a  $x$ .

Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = |x - x_0| < \delta$$

e quindi  $\exists \nu \in \mathbb{N}$  tale che:

$$|x_n - x_0| < \delta, \quad \forall n > \nu$$

Le due precedenti implicano che  $|f(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$  e poiché  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $g(x)$  si ha che:  $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon, \forall x \in Y$  e tale che  $|x - x_0| < \delta$  e quindi  $g$  è continua.

# Teorema degli zeri

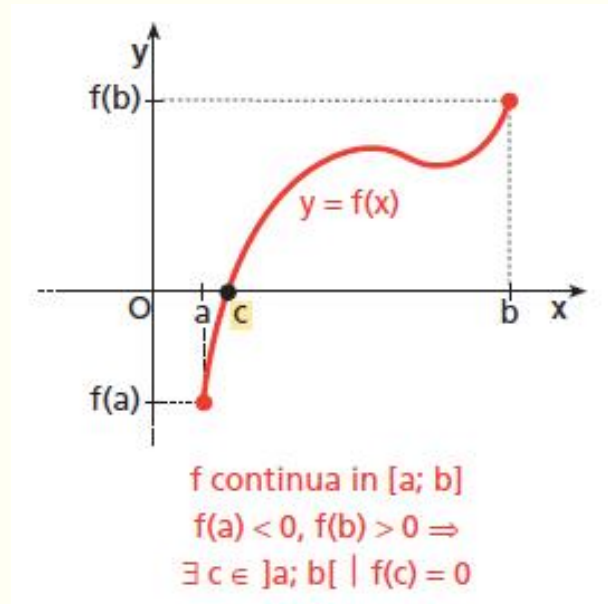
***Una funzione reale  $f$  continua nell'intervallo chiuso e limitato  $[a; b]$  che assuma valori di segno opposto negli estremi di tale intervallo, si annulla in almeno un punto ad esso interno***

## Dimostrazione

Si supponga, per fissare le idee, che  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ . Sia  $c$  l'estremo superiore dei punti  $x \in [a; b]$  tali che  $f(x) < 0$ .

Essendo  $f$  continua in  $a$  e in  $b$ , per il teorema della permanenza del segno  $c \neq a, c \neq b$ , perciò  $c \in [a; b]$  dovendo essere  $f(x) < 0$  in un opportuno intorno destro di  $a$  e  $f(x) > 0$  in un opportuno intorno sinistro di  $b$ , allora nel punto  $c$  dovrà essere  $f(c) = 0$ .

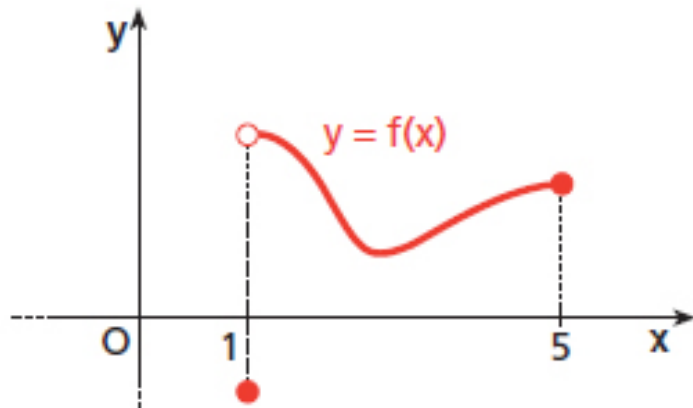
Diversamente, se  $f(c) < 0$ , per la permanenza del segno esisterebbe un intorno di  $c$  nel quale si avrebbe  $f(x) < 0$  in contrasto con il fatto che  $c$  è estremo superiore degli  $x \in [a; b]$  per i quali  $f(x) < 0$



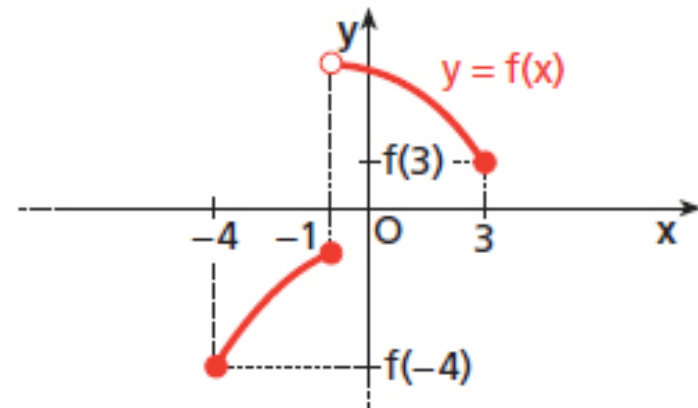
# Teorema degli zeri

---

Nei seguenti due casi non sono verificate le ipotesi del teorema; in particolare nel primo caso la funzione non è definita in un intervallo chiuso, nel secondo caso la funzione non è continua. In questi due casi non esiste alcun punto  $c$  in cui la funzione si annulla.



a. La funzione è continua nell'intervallo  $]1; 5]$ ,  $f(1) < 0$  e  $f(5) > 0$ , ma non esiste alcun punto dell'intervallo in cui essa si annulla.



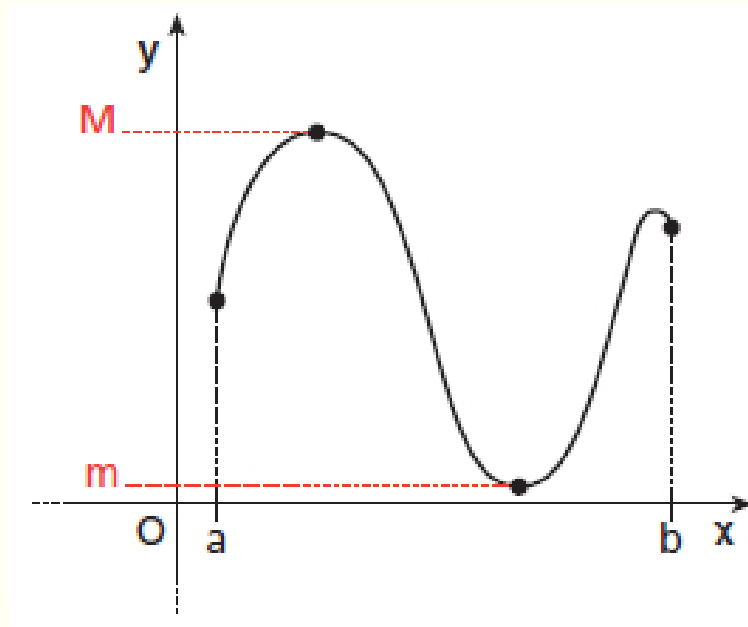
b. La funzione non è continua in  $x = -1$ ;  $f(-4) < 0$  e  $f(3) > 0$ . Non esiste alcun punto dell'intervallo  $[-4; 3]$  in cui essa si annulla.

# Teorema di Weiestrass

---

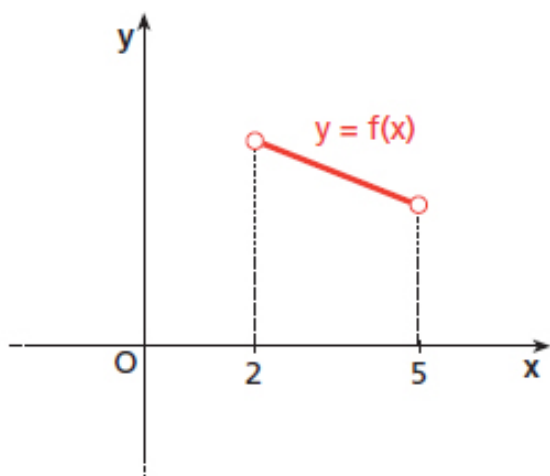
---

*Se  $f$  è una funzione continua in un insieme compatto  $[a; b]$ , ha come codominio un insieme anch'esso compatto e conseguentemente essa è dotata in  $X$  di minimo e di massimo*

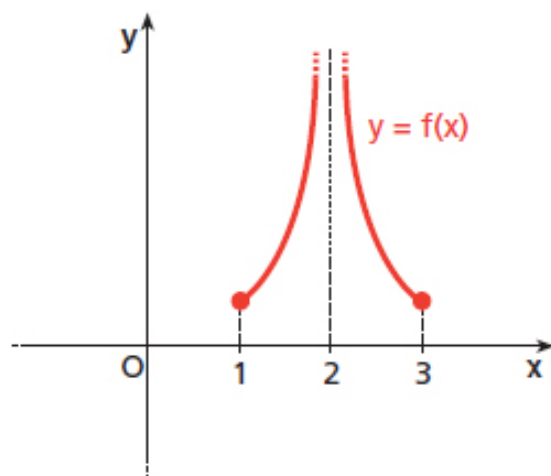


# Casi di non validità del teorema di W.

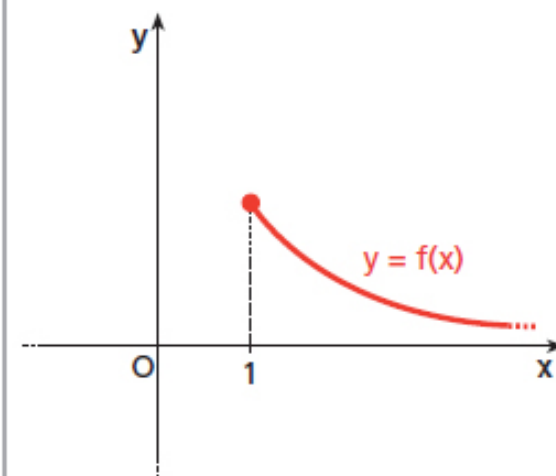
---



a. La funzione è continua nell'intervallo limitato aperto  $]2; 5[$ . Essa è priva di massimo e minimo in questo intervallo, in quanto gli estremi non appartengono all'intervallo.



b. La funzione non è continua nel punto  $x = 2$ . Nell'intervallo  $[1; 3]$  essa assume minimo, ma è priva di massimo.



c. La funzione è continua nell'intervallo illimitato  $[1; +\infty[$ . Non vale il teorema di Weierstrass e la funzione è priva di minimo assoluto.

# I teorema dei valori intermedi

**Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato  $[a; b]$  assume tutti i valori compresi tra  $f(a)$  ed  $f(b)$**

Consideriamo il caso in cui  $f(a) \leq f(b)$ .  
La tesi consiste nel provare che,  
qualunque sia  $y_0 \in [f(a); f(b)]$   
 $\exists x_0 \in [a; b]$  tale che  $f(x_0) = y_0$

se

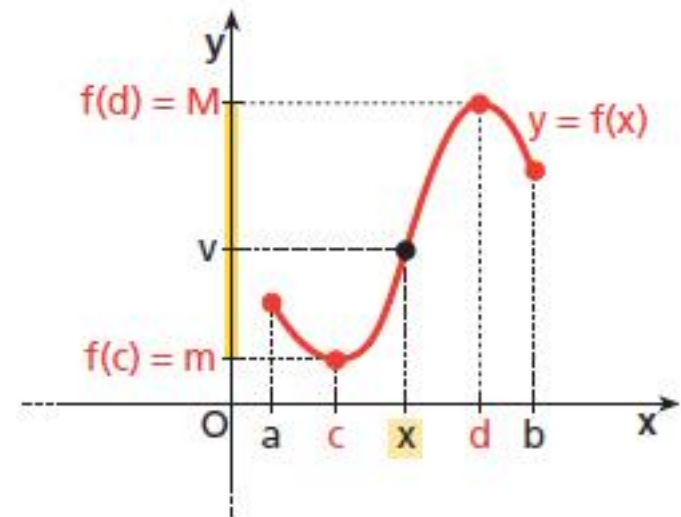
- $y_0 = f(a)$  si può porre  $x_0 = a$
- $y_0 = f(b)$  si può porre  $x_0 = b$
- $y_0 \in (f(a); f(b))$  si può considerare la funzione ausiliaria  $g(x) = f(x) - y_0$   
 $\forall x \in [a; b]$

Essendo  $f(a) < y_0 < f(b)$ , si ha:

$$g(a) = f(a) - y_0 < 0$$

$$g(b) = f(b) - y_0 > 0$$

Per il teorema degli zeri  $\exists x_0 \in (a, b)$  tale che  $g(x_0) = 0$ , cioè  $f(x_0) = y_0$



$f$  continua in  $[a; b] \Rightarrow$   
 $\forall v \mid m \leq v \leq M$   
 $\exists x \in [a; b] \mid f(x) = v$

# Il teorema dei valori intermedi

---

---

Una funzione continua in un intervallo  $[a, b]$  chiuso e limitato assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo

## Dimostrazione

Per il teorema di Weierstrass esistono il massimo  $M$  e il minimo  $m$ .  
Bisogna provare che  $\forall y_0 \in (m, M), \exists x_0 \in [a, b]: f(x_0) = y_0$ .

Indichiamo con  $x_1$  e  $x_2$  le ascisse dei punti di minimo, cioè tali che  $f(x_1) = m, f(x_2) = M$  e consideriamo la funzione ausiliaria:

$$g(x) = f(x) - y_0$$

Essendo  $f(x_1) = m < y_0 < M = f(x_2)$ , risulta:

$$g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0, \quad g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0$$

Per il teorema degli zeri, esiste un valore  $x_0 \in ]a, b[$  |  $g(x_0) = 0$ ,  
cioè, tale che  $f(x_0) = y_0$

# Criterio di invertibilità

---

---

*Una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo  $[a, b]$  chiuso e limitato è invertibile in tale intervallo.*

## Dimostrazione

Proponiamo la dimostrazione nel caso in cui la funzione  $f$  sia strettamente crescente in  $[a, b]$ . Risulta:

$$f(a) < f(x) < f(b), \quad \forall x \in ]a, b[$$

Quindi  $f(a)$  è il minimo della funzione in  $[a, b]$ , mentre  $f(b)$  è il massimo. Per il teorema dei valori intermedi,  $f$  assume tutti i valori compresi tra  $f(a)$  e  $f(b)$ .

Cioè,  $\forall y \in [f(a), f(b)]$  esiste almeno un  $x \in [a, b]$  per cui  $f(x) = y$ .

Tale  $x$  è unico.

Infatti, se esistessero due valori  $x_1$  e  $x_2$ , distinti tra loro, diciamo  $x_1 < x_2$  per cui  $y = f(x_1) = f(x_2)$  allora dovrebbe risultare anche  $f(x_1) < f(x_2)$  dato che  $f$  è strettamente crescente.

Quindi  $f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$  è invertibile.



# La continuità uniforme

---

La continuità di una funzione in un insieme  $X$  è una proprietà di carattere locale della funzione: una funzione  $f$  è continua in  $X$  se è continua in ogni punto  $x_0 \in X$ , se cioè per ogni fissato  $x_0 \in X$  sussiste la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X \mid |x - x_0| < \delta;$$

Pertanto questo  $\delta$  dipende da  $x_0$  oltre che da  $\varepsilon$

In certi casi, si può parlare di continuità globale di  $f$  in  $X$  nel senso che il  $\delta$  per cui sussiste la precedente proprietà può essere determinato indipendentemente da  $x_0$ .

## Definizione

Si dice che  $f: X \rightarrow R$  è uniformemente continua in  $X$  se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \quad \forall x', x'' \in X \mid |x' - x''| < \delta$$

# Il teorema di Cantor

---

---

***Una funzione  $f$  continua in un insieme  $X$  chiuso e limitato è ivi uniformemente continua***

## **Dimostrazione.**

Si ragiona per assurdo. Supponiamo che la funzione  $f$ , continua nell'insieme chiuso e limitato  $X$ , non sia uniformemente continua in  $X$ .

$\exists \varepsilon_0 > 0 \mid \forall \delta > 0, \exists x', x'' \in X$  per cui si ha:

$$|x' - x''| < \delta \text{ e } |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$$

Siano  $x_n$  e  $y_n$  due punti di  $X$  tali che:

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$$



---

Siccome  $X$  è chiuso e limitato, si può estrarre una successione  $\{x_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  estratta da  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convergente ad un punto  $x_0 \in X$ .

Siccome inoltre risulta:

$$|y_{k_n} - x_0| \leq |y_{k_n} - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x_0| < \frac{1}{k_n} + |x_{k_n} - x_0|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

si ha, evidentemente, che anche la successione  $\{y_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $x_0$ .

Dalla continuità di  $f$  in  $x_0$  si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_{k_n}) = f(x_0)$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})) = 0$$

Ma ciò contrasta con il fatto che

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0,$$

# Limiti notevoli

---

Dimostriamo che vale il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Si consideri una circonferenza goniometrica in cui siano noti il seno e la tangente in funzione di un angolo  $x$ . Poiché l'arco  $PA$  assume lo stesso valore dell'angolo al centro che lo sottende e noto che  $PQ = \sin x$  e  $TA = \tan x$ , si ha:

$$\sin x < x < \tan x$$

dividendo tutti i termini per  $\sin x$  e passando al reciproco, si ha:

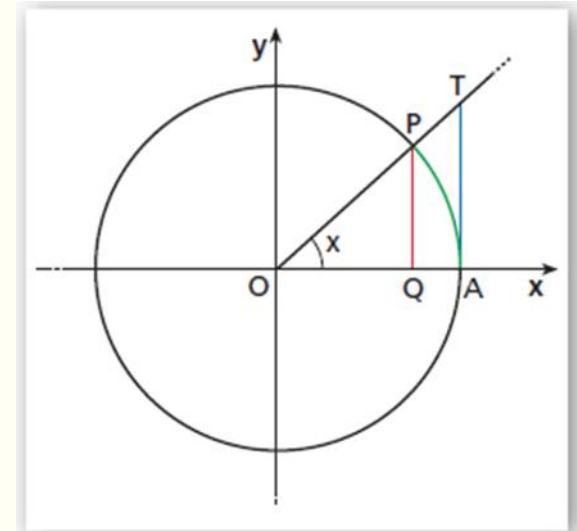
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

In tale relazione, passando al limite per  $x$  che tende a zero, essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

per il teorema dei carabinieri segue anche che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

---

---

**Dimostrazione:**

Moltiplicando il denominatore e il numeratore per  $1 - \cos x$  abbiamo che:

$$\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$$

Ma poiché

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ , si ha:

$$\frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

## Altri limiti notevoli

---

---

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_e a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

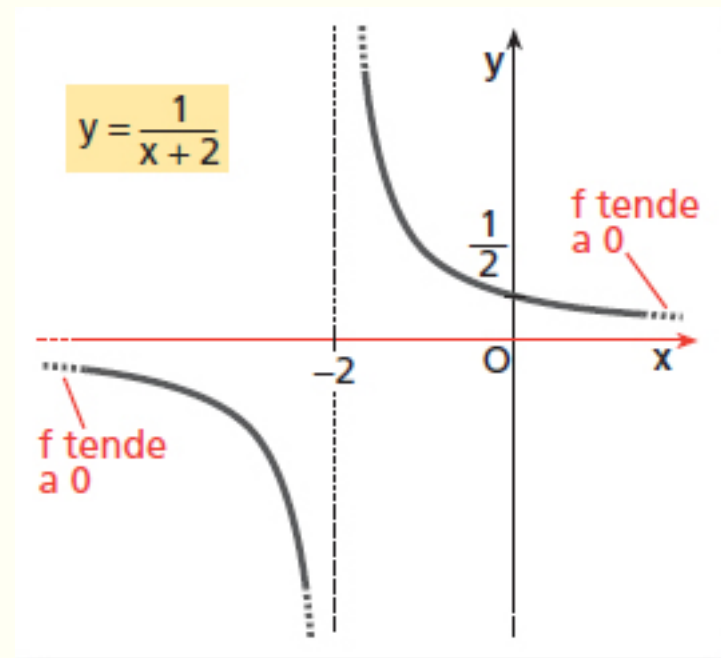
# Infinitesimi ed infiniti

---

Si dice che una funzione è un infinitesimo per  $x \rightarrow \alpha$  quando il limite di  $f(x)$  per  $x \rightarrow \alpha$  è uguale a zero

Per esempio la funzione  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  è un infinitesimo per  $x$  che tende a infinito

Funzioni del tipo  $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{\sqrt{x}}$  e così via sono tutte infinitesimi per  $x \rightarrow \infty$




# Confronto tra infinitesimi

---

Se  $f(x)$  e  $g(x)$  sono entrambi infinitesimi per  $x \rightarrow \alpha$  si dice che  $f(x)$  e  $g(x)$  sono infinitesimi simultanei.

In questo caso, è interessante vedere quale dei due infinitesimi tende a 0 più rapidamente; possiamo stabilire ciò determinando il limite, se esiste, del loro rapporto per  $x \rightarrow \alpha$


$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

- Si dice che  $f(x)$  e  $g(x)$  sono infinitesimi dello stesso ordine
- (essenzialmente vuol dire che tendono a 0 con la stessa rapidità)

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- Si dice che  $f(x)$  è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $g(x)$
- $f$  tende a 0 più rapidamente di  $g$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$$

- Si dice che  $f(x)$  è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a  $g(x)$
- $f$  tende a 0 meno rapidamente di  $g$



# Ordine di un infinitesimo

---

Dati due infinitesimi  $f(x)$  e  $g(x)$ , per  $x \rightarrow \alpha$  si dice che  $f(x)$  è un infinitesimo di ordine  $\gamma$  (con  $\gamma > 0$ ) rispetto a  $g(x)$ , quando  $f(x)$  è dello stesso ordine di  $[g(x)]^\gamma$ , cioè se:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^\gamma} = l \neq 0$$

Diciamo, inoltre, che  $g(x)$  è preso come infinitesimo campione.  
In genere, come infinitesimo campione, si prende:

$$\begin{aligned} g(x) &= x - x_0 && \text{se } x \rightarrow x_0 \\ g(x) &= \frac{1}{x} && \text{se } x \rightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

# Infinitesimi equivalenti

---

Dati due infinitesimi  $f(x)$  e  $g(x)$ , per  $x \rightarrow \alpha$  essi si dicono equivalenti se :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e si scrive  $f \sim g$  e si legge  $f$  è asintoticamente equivalente a  $g$ . Inoltre, uno dei due si dice parte principale dell'altro.

Esempi di infinitesimi equivalenti sono:

$$\sin x \sim x$$

$$\log(1 + x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

# Applicazioni al calcolo dei limiti

---

---

Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 5x)}{\sin 2x}$$

Poiché  $\log(1 + 5x) \sim 5x$  e  $\sin 2x \sim 2x$

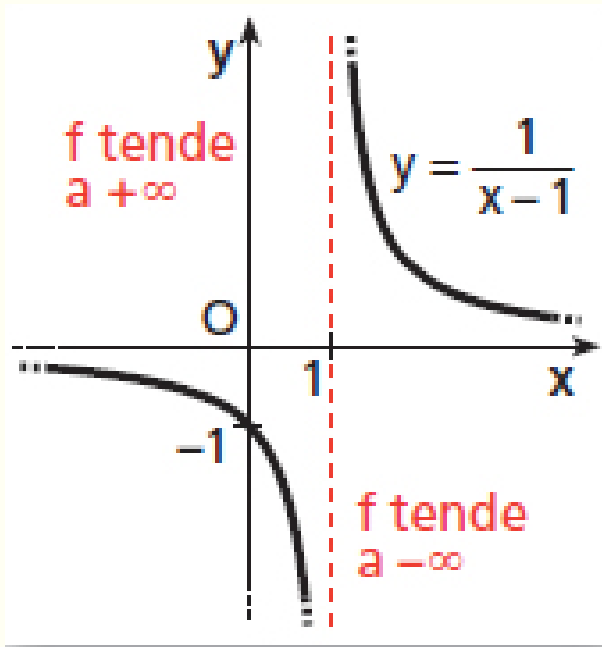
si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 5x)}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

# Gli infiniti

---

Una funzione  $f(x)$  si dice un infinito per  $x \rightarrow \alpha$  quando il limite di  $f(x)$  per  $x \rightarrow \alpha$  vale  $+\infty$ ,  $-\infty$  o  $\infty$



La funzione  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  è un infinito per  $x$  che tende a 1, perché

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$$

# Confronto tra infiniti

---

Per gli infiniti possiamo introdurre dei concetti analoghi a quelli visti per gli infinitesimi. In particolare:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

- Si dice che  $f(x)$  e  $g(x)$  sono infiniti dello stesso ordine
- (essenzialmente vuol dire che tendono a infinito con la stessa rapidità)

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- Si dice che  $f(x)$  è un infinito di ordine inferiore rispetto a  $g(x)$
- $f$  tende a infinito meno rapidamente di  $g$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$$

- Si dice che  $f(x)$  è un infinito di ordine superiore rispetto a  $g(x)$
- $f$  tende a infinito più rapidamente di  $g$

# Ordine di un infinito

---

Dati due infiniti  $f(x)$  e  $g(x)$ , per  $x \rightarrow \alpha$  si dice che  $f(x)$  è un infinito di ordine  $\gamma$  (con  $\gamma > 0$ ) rispetto a  $g(x)$ , quando  $f(x)$  è dello stesso ordine di  $[g(x)]^\gamma$ , cioè se:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^\gamma} = l \neq 0$$

Diciamo, inoltre, che  $g(x)$  è preso come infinitesimo campione.  
In genere, come infinitesimo campione, si prende:

$$g(x) = \frac{1}{x-x_0} \quad \text{se } x \rightarrow x_0$$
$$g(x) = x \quad \text{se } x \rightarrow \pm\infty$$

Dati due infiniti  $f(x)$  e  $g(x)$ , per  $x \rightarrow \alpha$  essi si dicono equivalenti se :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e si scrive  $f \sim g$  e si legge  $f$  è asintoticamente uguale a  $g$

# Gerarchia degli infiniti

## TEOREMA

### Gerarchia degli infiniti

Date le tre famiglie di funzioni

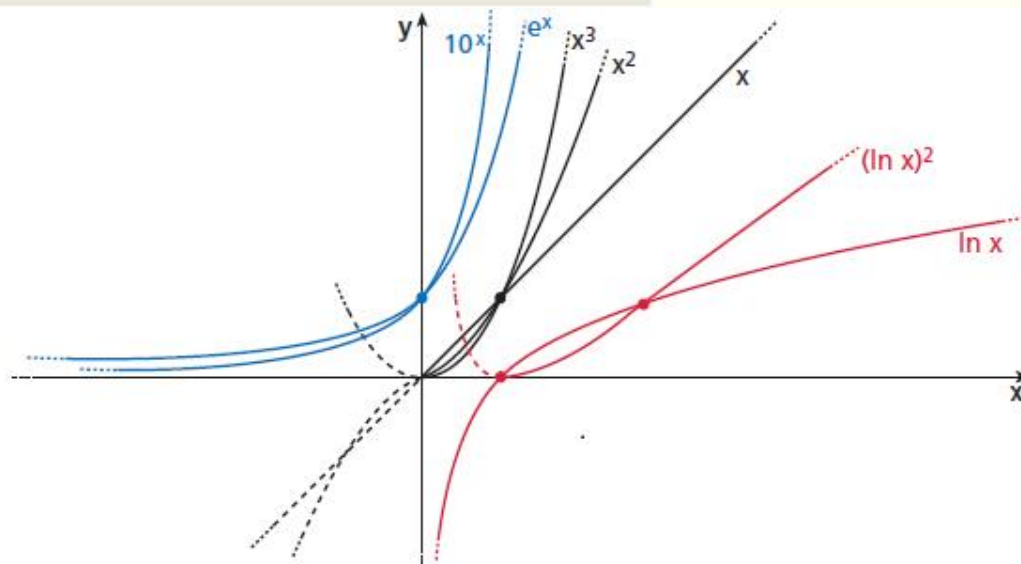
$$(\log_a x)^\alpha, \quad x^\beta, \quad b^x, \quad \text{con } \alpha, \beta > 0 \text{ e } a, b > 1,$$

allora, per  $x \rightarrow +\infty$ , ognuna è un infinito di ordine inferiore rispetto a quella che si trova a destra nell'elenco, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0.$$

Sinteticamente, possiamo scrivere, riferendoci agli ordini di infinito:

$$(\log_a x)^\alpha < x^\beta < b^x.$$



# Applicazioni al calcolo dei limiti

---

---

Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin^3 x + 1 - \cos x}{\log(1 + x^2) + 3\sin x}$$

Al numeratore è presente la somma di 3 infinitesimi:  $2x$ ,  $\sin^3 x$ ,  $1 - \cos x$ .

Questi infinitesimi hanno, rispetto al campione  $x$ , ordine risp. 1, 2 e 3.

Quindi la somma  $\sin^3 x + 1 - \cos x$  ha ordine 2 (in quanto somma di infinitesimi con ordine diverso) e quindi ha ordine superiore rispetto a  $2x$  potendosi, pertanto, trascurare nel calcolo del limite.

A denominatore è presente la somma di due infinitesimi, uno di ordine 2 e uno di ordine 1 rispetto al campione  $x$ : quello di ordine 2 potrà essere trascurato.

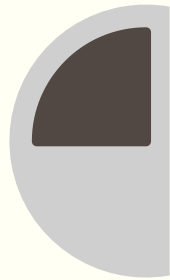
Il limite si riduce allora solo a:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3\sin x} = \frac{2}{3}$$



# Applicazioni allo studio di una funzione: calcolo degli asintoti

---



Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

la retta  $x = x_0$  è un asintoto verticale sinistro per la funzione.

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

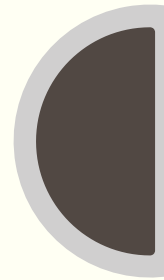
la retta  $x = x_0$  è un asintoto verticale destro per la funzione.

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

la retta  $x = x_0$  è un asintoto verticale completo per la funzione

Asintoti verticali



Se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

la retta  $y=l$  è un asintoto orizzontale sinistro per la funzione.

Se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

la retta  $y=l$  è un asintoto orizzontale destro per la funzione.

Se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

la retta  $y=l$  è un asintoto orizzontale completo per la funzione

Asintoti orizzontali

# Calcolo di eventuali asintoti obliqui

Data la funzione  $y=f(x)$ , se si verifica che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

si dice che la retta  $y = mx + q$  è un asintoto obliquo per il grafico della funzione.

Dimostriamo che la distanza di un generico punto P del grafico di una funzione da un suo asintoto obliquo tende a 0 quando x tende a infinito.

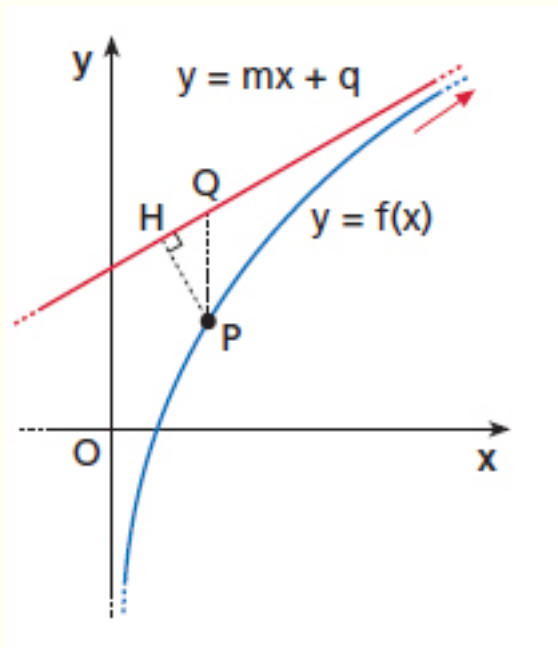
Infatti per la definizione di asintoto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} PQ = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

Ma poiché PQ ed HP sono rispettivamente ipotenusa e cateto del triangolo QHP, si ha:  
 $PQ > PH > 0$

Per il teorema del confronto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} PH = 0$$



# Ricerca degli asintoti obliqui

Se la funzione non presenta un asintoto orizzontale per  $x \rightarrow \infty$  si passa a valutare l'esistenza dell'eventuale asintoto obliquo. L'asintoto obliquo è una retta di equazione  $y = mx + q$ . Per determinarlo dobbiamo calcolare  $m$  e  $q$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

Si noti che la funzione può avere un asintoto obliquo a sinistra, a destra o completo e che talvolta è necessario fare i limiti a  $+\infty$  e a  $-\infty$  separatamente.

