



LIMITI E CONTINUITA' DELLE FUNZIONI REALI II

Prof. Roberto Capone
A.A. 2016/17
Corso di Studi in Ingegneria Chimica



La continuità

Sia f una funzione reale di variabile reale definita in X .

Definizione.

Si dice che f è continua in un punto $x_0 \in X$ se $\forall I' \in \mathfrak{T}(f(x_0)) \exists I \in \mathfrak{T}(x_0)$ tale che:

1. $f(x) \in I', \forall x \in X \cap I$, cioè se:

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall x \in X: |x - x_0| < \delta$

Proposizione

Ogni funzione f è continua in ogni punto isolato di X ; inoltre, una funzione f è continua in un punto $x_0 \in X \cap DX$ se e solo se esiste il limite di f in x_0 e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Dimostrazione.

Sia x_0 un punto isolato di X e sia I un intorno di x_0 tale che $I \cap X = \{x_0\}$.

Allora si ha:

$$f(x) = f(x_0) \in I', \forall x \in I \cap X$$

qualunque sia $I' \in \mathfrak{T}(f(x_0))$ quindi f è continua in x_0 .

Se $x_0 \in X \cap DX$ si ha la tesi osservando che per definizione di limite le due definizioni sono equivalenti.

Esempi

1. Ogni funzione costante $f: x \in X \rightarrow c \in R$ è continua in X .

Infatti $\forall x_0 \in X \cap DX$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c = f(x_0)$$

2. $\forall a, b \in R$ la funzione $f: x \in R \rightarrow ax + b$ è continua in R . Infatti $\forall x_0 \in R$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (ax + b) = ax_0 + b = f(x_0)$$

3. La funzione

$$f: x \in R \rightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

non è continua in 0, infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0)$$

Esempi

4. La funzione di Dirichlet

$$f: x \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è continua in $x_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Infatti, preso $\varepsilon = \frac{1}{2}$ qualsiasi sia $\delta > 0$, se $x_0 \in \mathbb{Q}$ per la densità di $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ in \mathbb{R} ,

$\exists x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}: |x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - f(x_0)| = 1 \not< \varepsilon$

Analogamente, se $x \in \mathbb{Q}: |x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - f(x_0)| = 1 \not< \varepsilon$

Definizione.

Se $x_0 \in X$ ed è un punto di accumulazione a destra (risp. a sinistra) per X ; si dice che f è continua a destra (risp. a sinistra) in x_0 se esiste il limite a destra (risp. a sinistra) di f in x_0 ed è uguale a $f(x_0)$

Proposizione.

Siano $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow R$ due funzioni reali di una variabile reale. Se f è continua in un punto $x_0 \in X$ e g è continua nel punto $y_0 = f(x_0)$, allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in x_0

Prolungamento per continuità di una funzione

Se X e Y sono due insiemi numerici, si dice che X è denso rispetto a Y se:

$$Y \subset X \cup DX$$

Evidentemente: X è denso rispetto a Y se e solo se $\forall \epsilon \in Y$ e $\forall I_x$ risulta:

$$I \cap X \neq \emptyset$$

Teorema di prolungamento per continuità

Siano X e Y due insiemi numerici con $X \subset Y$ e X denso rispetto a Y . Per ogni funzione $f: X \rightarrow R$ continua in X e convergente in ogni punto di $Y \setminus X$ esiste un unico prolungamento continuo di f su Y ; esso è il prolungamento definito da:

$$g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \forall x_0 \in Y \setminus X$$

Dimostrazione

Cominciamo con l'osservare che φ e ψ sono due funzioni continue in Y tali che:

$$\underline{\underline{\varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in X}}$$

denotate con φ_1 e ψ_1 rispettivamente le restrizioni di φ e ψ a X , in conseguenza del teorema discendente da quello di unicit  del limite si ha per ogni $x_0 \in Y \setminus X$:

$$\varphi(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi_1(x) = \psi(x_0)$$

Da tale osservazione si deduce che ogni funzione continua $f: X \rightarrow R$ ha al pi  un prolungamento continuo su Y . Resta da provare che il prolungamento g di f su Y   continuo in Y .

Assegniamo un punto $x_0 \in Y$. Dalla continuit  di f in x_0 , si ha:

$$|f(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in X \text{ e tale che } |x - x_0| < \delta$$

Sia x un punto di $Y \setminus X$ tale che $|x - x_0| < \delta$ e sia $\{x_n\}_{n \in N}$ una successione di punti di X convergente a x .

Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = |x - x_0| < \delta$$

e quindi $\exists \nu \in N$ tale che:

$$|x_n - x_0| < \delta, \quad \forall n > \nu$$

Le due precedenti implicano che $|f(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ e poich  $\{f(x_n)\}_{n \in N}$ converge a $g(x)$ si ha che: $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon, \forall x \in Y$ e tale che $|x - x_0| < \delta$ e quindi g   continua.

Teorema degli zeri

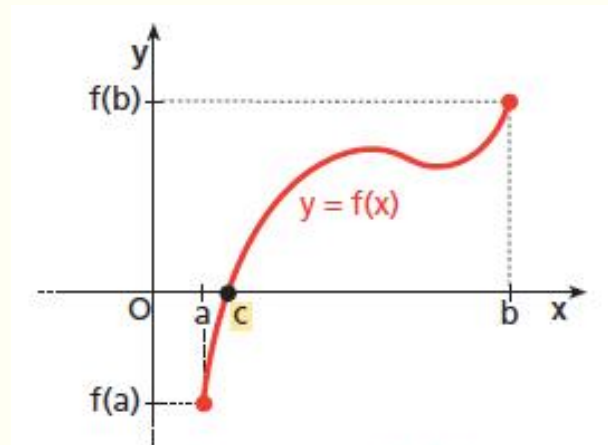
Una funzione reale f continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ che assuma valori di segno opposto negli estremi di tale intervallo, si annulla in almeno un punto ad esso interno

Dimostrazione

Si supponga, per fissare le idee, che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Sia c l'estremo superiore dei punti $x \in [a; b]$ tali che $f(x) < 0$.

Essendo f continua in a e in b , per il teorema della permanenza del segno $c \neq a, c \neq b$, perciò $c \in [a; b]$ dovendo essere $f(x) < 0$ in un opportuno intorno destro di a e $f(x) > 0$ in un opportuno intorno sinistro di b , allora nel punto c dovrà essere $f(c) = 0$.

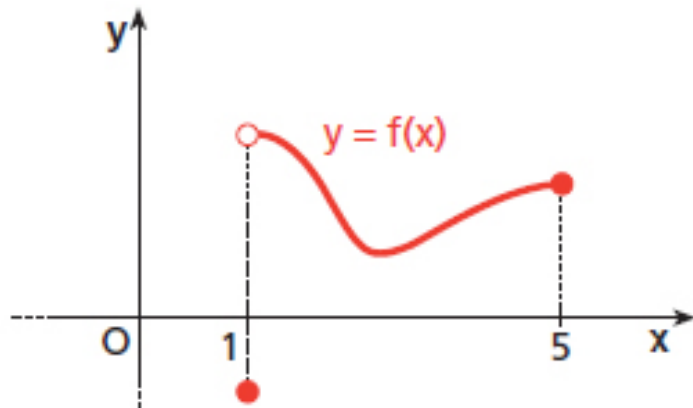
Diversamente, se $f(c) < 0$, per la permanenza del segno esisterebbe un intorno di c nel quale si avrebbe $f(x) < 0$ in contrasto con il fatto che c è estremo superiore degli $x \in [a; b]$ per i quali $f(x) < 0$



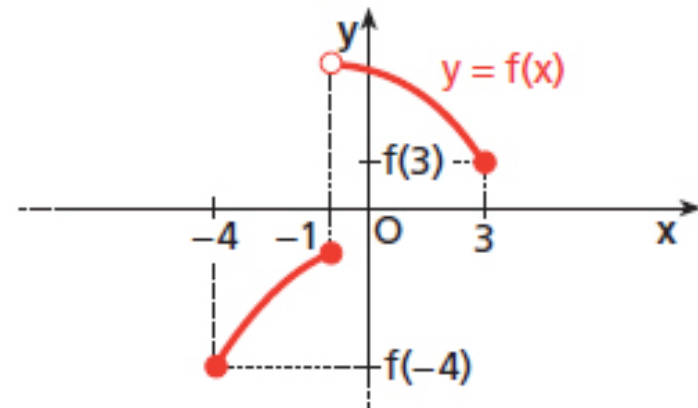
f continua in $[a; b]$
 $f(a) < 0, f(b) > 0 \Rightarrow$
 $\exists c \in]a; b[\mid f(c) = 0$

Teorema degli zeri

Nei seguenti due casi non sono verificate le ipotesi del teorema; in particolare nel primo caso la funzione non è definita in un intervallo chiuso, nel secondo caso la funzione non è continua. In questi due casi non esiste alcun punto c in cui la funzione si annulla.



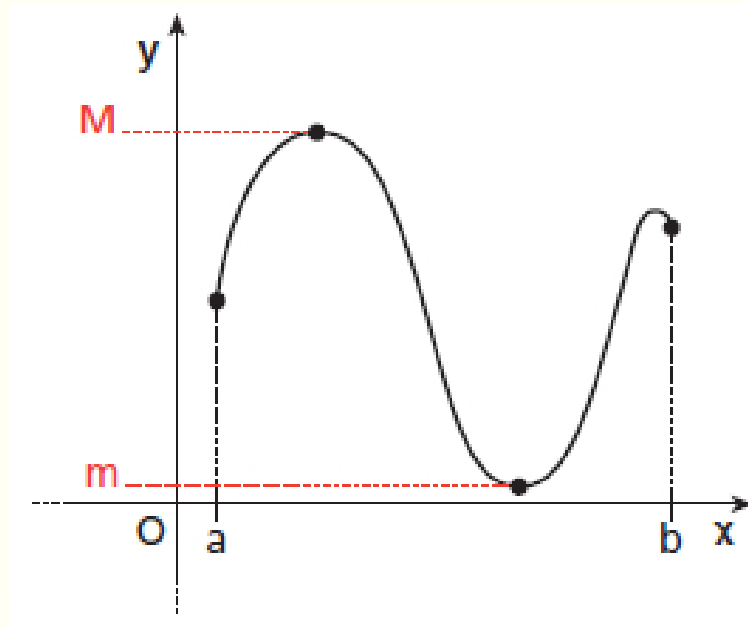
a. La funzione è continua nell'intervallo $]1; 5]$, $f(1) < 0$ e $f(5) > 0$, ma non esiste alcun punto dell'intervallo in cui essa si annulla.



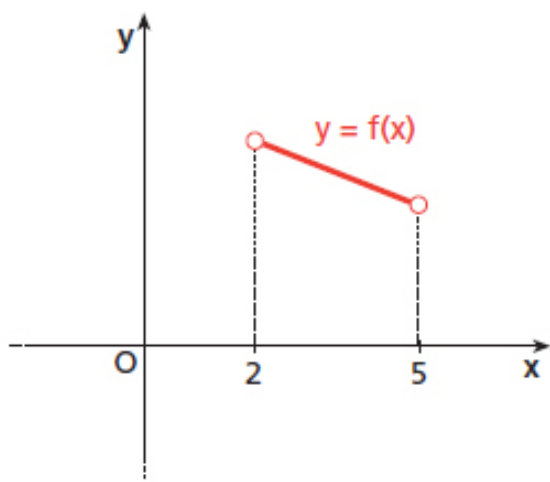
b. La funzione non è continua in $x = -1$; $f(-4) < 0$ e $f(3) > 0$. Non esiste alcun punto dell'intervallo $[-4; 3]$ in cui essa si annulla.

Teorema di Weiestrass

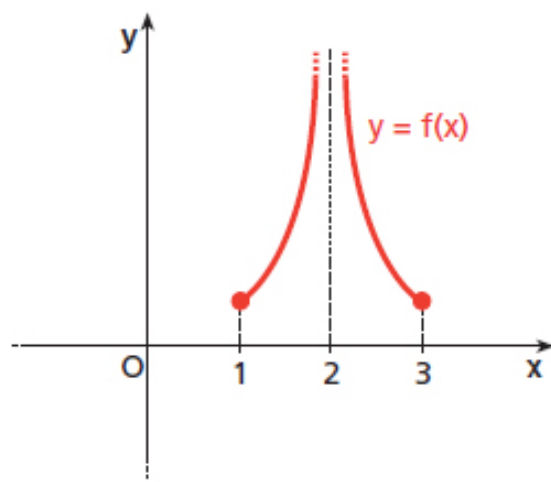
Se f è una funzione continua in un insieme compatto $[a; b]$, ha come codominio un insieme anch'esso compatto e conseguentemente essa è dotata in X di minimo e di massimo



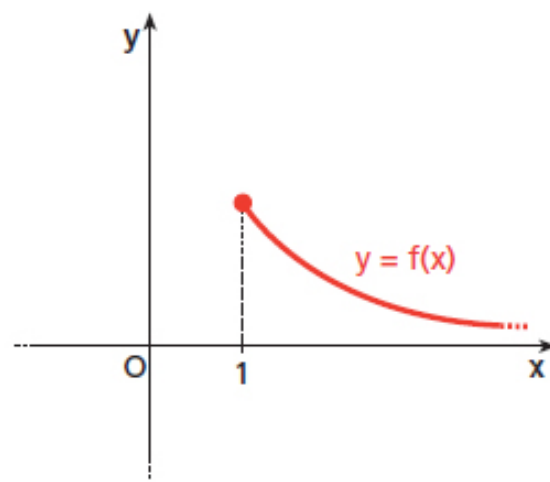
Casi di non validità del teorema di W.



a. La funzione è continua nell'intervallo limitato aperto $]2; 5[$. Essa è priva di massimo e minimo in questo intervallo, in quanto gli estremi non appartengono all'intervallo.



b. La funzione non è continua nel punto $x = 2$. Nell'intervallo $[1; 3]$ essa assume minimo, ma è priva di massimo.



c. La funzione è continua nell'intervallo illimitato $[1; +\infty[$. Non vale il teorema di Weierstrass e la funzione è priva di minimo assoluto.

I teorema dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$

Consideriamo il caso in cui $f(a) \leq f(b)$.
La tesi consiste nel provare che,
qualunque sia $y_0 \in [f(a); f(b)]$
 $\exists x_0 \in [a; b]$ tale che $f(x_0) = y_0$

se

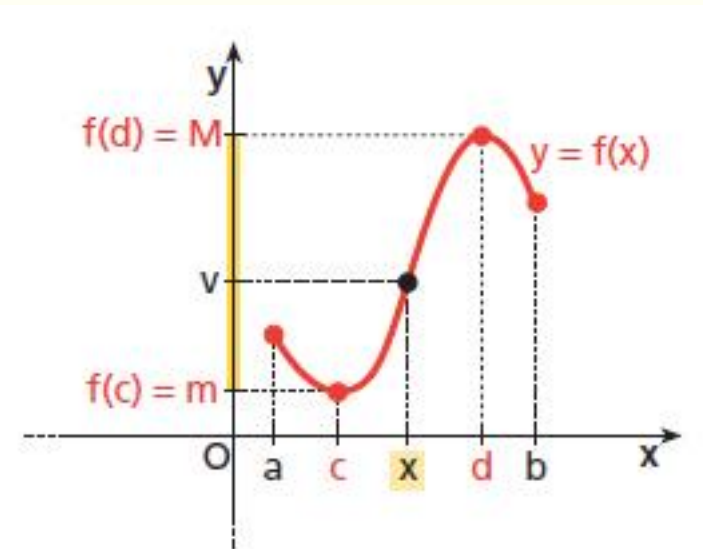
- $y_0=f(a)$ si può porre $x_0=a$
- $y_0=f(b)$ si può porre $x_0=b$
- $y_0 \in (f(a); f(b))$ si può considerare la funzione ausiliaria $g(x)=f(x)-y_0$
 $\forall x \in [a; b]$

Essendo $f(a) < y_0 < f(b)$, si ha:

$$g(a) = f(a) - y_0 < 0$$

$$g(b) = f(b) - y_0 > 0$$

Per il teorema degli zeri $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) = y_0$



f continua in $[a; b] \Rightarrow$
 $\forall v \mid m \leq v \leq M$
 $\exists x \in [a; b] \mid f(x) = v$

Il teorema dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo

Dimostrazione

Per il teorema di Weierstrass esistono il massimo M e il minimo m . Bisogna provare che $\forall y_0 \in (m, M), \exists x_0 \in [a, b]: f(x_0) = y_0$.

Indichiamo con x_1 e x_2 le ascisse dei punti di minimo, cioè tali che $f(x_1) = m, f(x_2) = M$ e consideriamo la funzione ausiliaria:

$$g(x) = f(x) - y_0$$

Essendo $f(x_1) = m < y_0 < M = f(x_2)$, risulta:

$$g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0, \quad g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0$$

Per il teorema degli zeri, esiste un valore $x_0 \in]a, b[$ tale che $g(x_0) = 0$, cioè, tale che $f(x_0) = y_0$

Criterio di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato è invertibile in tale intervallo.

Dimostrazione

Proponiamo la dimostrazione nel caso in cui la funzione f sia strettamente crescente in $[a, b]$. Risulta:

$$f(a) < f(x) < f(b), \quad \forall x \in]a, b[$$

Quindi $f(a)$ è il minimo della funzione in $[a, b]$, mentre $f(b)$ è il massimo. Per il teorema dei valori intermedi, f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

Cioè, $\forall y \in [f(a), f(b)]$ esiste almeno un $x \in [a, b]$ per cui $f(x) = y$.

Tale x è unico.

Infatti, se esistessero due valori x_1 e x_2 , distinti tra loro, diciamo $x_1 < x_2$ per cui $y = f(x_1) = f(x_2)$ allora dovrebbe risultare anche $f(x_1) < f(x_2)$ dato che f è strettamente crescente.

Quindi $f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ è invertibile.

La continuità uniforme

La continuità di una funzione in un insieme X è una proprietà di carattere locale della funzione: una funzione f è continua in X se è continua in ogni punto $x_0 \in X$, se cioè per ogni fissato $x_0 \in X$ sussiste la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X \mid |x - x_0| < \delta;$$

Pertanto questo δ dipende da x_0 oltre che da ε

In certi casi, si può parlare di continuità globale di f in X nel senso che il δ per cui sussiste la precedente proprietà può essere determinato indipendentemente da x_0 .

Definizione

Si dice che $f: X \rightarrow R$ è uniformemente continua in X se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |f(x') - f(x'')| < \varepsilon, \quad \forall x', x'' \in X \mid |x' - x''| < \delta$$

Il teorema di Cantor

Una funzione f continua in un insieme X chiuso e limitato è ivi uniformemente continua

Dimostrazione.

Si ragiona per assurdo. Supponiamo che la funzione f , continua nell'insieme chiuso e limitato X , non sia uniformemente continua in X .

$\exists \varepsilon_0 > 0 \mid \forall \delta > 0, \exists x', x'' \in X$ per cui si ha:

$$|x' - x''| < \delta \text{ e } |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$$

Siano x_n e y_n due punti di X tali che:

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$$



Siccome X è chiuso e limitato, si può estrarre una successione $\{x_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ estratta da $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente ad un punto $x_0 \in X$.

Siccome inoltre risulta:

$$|y_{k_n} - x_0| \leq |y_{k_n} - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x_0| < \frac{1}{k_n} + |x_{k_n} - x_0|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

si ha, evidentemente, che anche la successione $\{y_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x_0 .

Dalla continuità di f in x_0 si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_{k_n}) = f(x_0)$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})) = 0$$

Ma ciò contrasta con il fatto che

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0,$$

Limiti notevoli

Dimostriamo che vale il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Si consideri una circonferenza goniometrica in cui siano noti il seno e la tangente in funzione di un angolo x . Poiché l'arco PA assume lo stesso valore dell'angolo al centro che lo sottende e noto che $PQ = \sin x$ e $TA = \operatorname{tg} x$, si ha:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

dividendo tutti i termini per $\sin x$ e passando al reciproco, si ha:

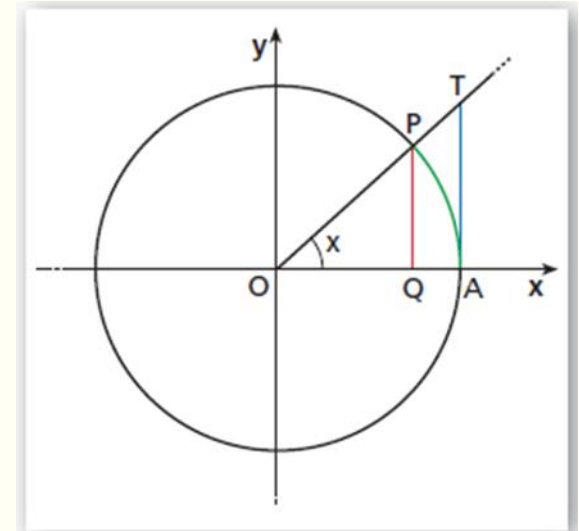
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

In tale relazione, passando al limite per x che tende a zero, essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

per il teorema dei carabinieri segue anche che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Dimostrazione:

Moltiplicando il denominatore e il numeratore per $1 - \cos x$ abbiamo che:

$$\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$$

Ma poiché

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, si ha:

$$\frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

Altri limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_e a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

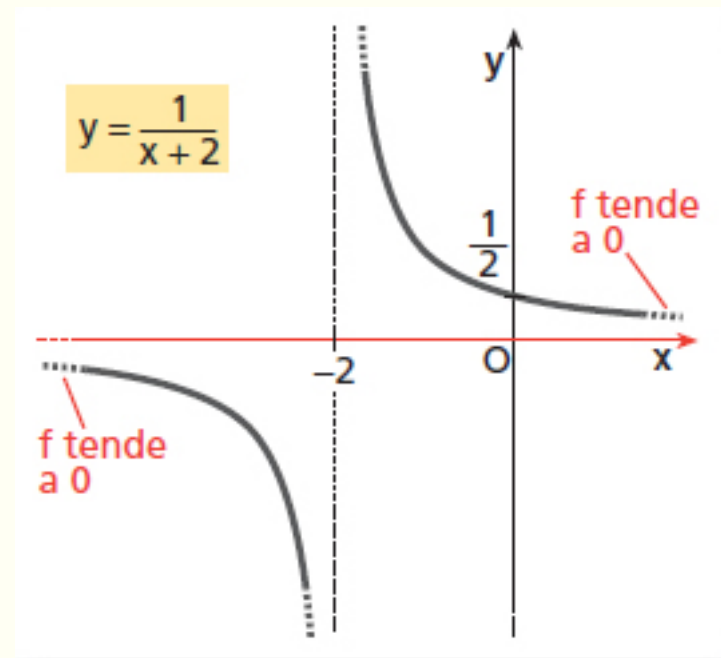
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

Infinitesimi ed infiniti

Si dice che una funzione è un infinitesimo per $x \rightarrow \alpha$ quando il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow \alpha$ è uguale a zero

Per esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{x+2}$ è un infinitesimo per x che tende a infinito


Funzioni del tipo $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{\sqrt{x}}$ e così via sono tutte infinitesimi per $x \rightarrow \infty$



Confronto tra infinitesimi

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambi infinitesimi per $x \rightarrow \alpha$ si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi simultanei.

In questo caso, è interessante vedere quale dei due infinitesimi tende a 0 più rapidamente; possiamo stabilire ciò determinando il limite, se esiste, del loro rapporto per $x \rightarrow \alpha$


$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

- Si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine
- (essenzialmente vuol dire che tendono a 0 con la stessa rapidità)

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- Si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$
- f tende a 0 più rapidamente di g

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$$

- Si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a $g(x)$
- f tende a 0 meno rapidamente di g

Ordine di un infinitesimo

Dati due infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$, per $x \rightarrow \alpha$ si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine γ (con $\gamma > 0$) rispetto a $g(x)$, quando $f(x)$ è dello stesso ordine di $[g(x)]^\gamma$, cioè se:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^\gamma} = l \neq 0$$

Diciamo, inoltre, che $g(x)$ è preso come infinitesimo campione.
In genere, come infinitesimo campione, si prende:

$$\begin{aligned} g(x) &= x - x_0 && \text{se } x \rightarrow x_0 \\ g(x) &= \frac{1}{x} && \text{se } x \rightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

Infinitesimi equivalenti

Dati due infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$, per $x \rightarrow \alpha$ essi si dicono equivalenti se :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e si scrive $f \sim g$ e si legge f è asintoticamente equivalente a g . Inoltre, uno dei due si dice parte principale dell'altro.

Esempi di infinitesimi equivalenti sono:

$$\sin x \sim x$$

$$\log(1 + x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

Applicazioni al calcolo dei limiti

Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 5x)}{\sin 2x}$$

Poiché $\log(1 + 5x) \sim 5x$ e $\sin 2x \sim 2x$

si ha:

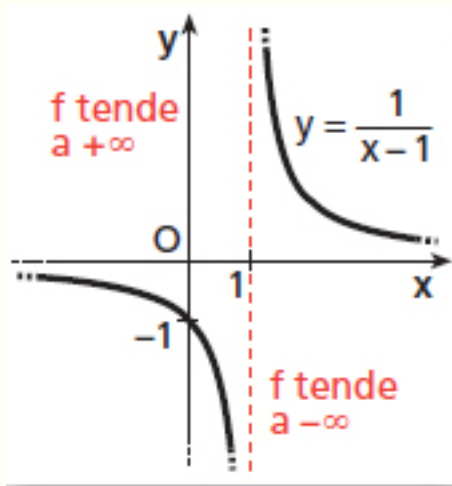
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 5x)}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

Gli infiniti

Una funzione $f(x)$ si dice un infinito per $x \rightarrow \alpha$ quando il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow \alpha$ vale $+\infty$, $-\infty$ o ∞

La funzione $f(x) = \frac{1}{x-1}$ è un infinito per x che tende a 1, perché

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$$



Confronto tra infiniti

Per gli infiniti possiamo introdurre dei concetti analoghi a quelli visti per gli infinitesimi. In particolare:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

- Si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello stesso ordine
- (essenzialmente vuol dire che tendono a infinito con la stessa rapidità)

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- Si dice che $f(x)$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $g(x)$
- f tende a infinito meno rapidamente di g

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$$

- Si dice che $f(x)$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $g(x)$
- f tende a infinito più rapidamente di g

Ordine di un infinito

Dati due infiniti $f(x)$ e $g(x)$, per $x \rightarrow \alpha$ si dice che $f(x)$ è un infinito di ordine γ (con $\gamma > 0$) rispetto a $g(x)$, quando $f(x)$ è dello stesso ordine di $[g(x)]^\gamma$, cioè se:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^\gamma} = l \neq 0$$

Diciamo, inoltre, che $g(x)$ è preso come infinitesimo campione.
In genere, come infinitesimo campione, si prende:

$$g(x) = \frac{1}{x-x_0} \quad \text{se } x \rightarrow x_0$$
$$g(x) = x \quad \text{se } x \rightarrow \pm\infty$$

Dati due infiniti $f(x)$ e $g(x)$, per $x \rightarrow \alpha$ essi si dicono equivalenti se :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e si scrive $f \sim g$ e si legge f è asintoticamente uguale a g

Gerarchia degli infiniti

TEOREMA

Gerarchia degli infiniti

Date le tre famiglie di funzioni

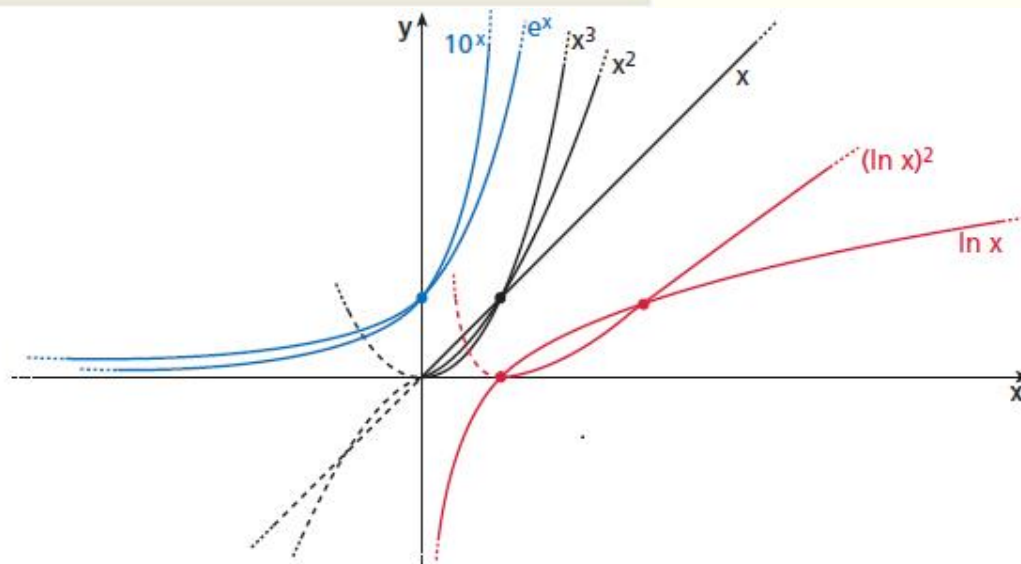
$$(\log_a x)^\alpha, \quad x^\beta, \quad b^x, \quad \text{con } \alpha, \beta > 0 \text{ e } a, b > 1,$$

allora, per $x \rightarrow +\infty$, ognuna è un infinito di ordine inferiore rispetto a quella che si trova a destra nell'elenco, cioè:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0.$$

Sinteticamente, possiamo scrivere, riferendoci agli ordini di infinito:

$$(\log_a x)^\alpha < x^\beta < b^x.$$



Applicazioni al calcolo dei limiti

Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin^3 x + 1 - \cos x}{\log(1 + x^2) + 3\sin x}$$

Al numeratore è presente la somma di 3 infinitesimi: $2x$, $\sin^3 x$, $1 - \cos x$.

Questi infinitesimi hanno, rispetto al campione x , ordine risp. 1, 2 e 3.

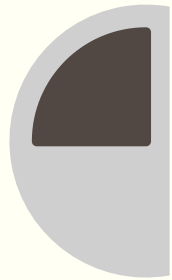
Quindi la somma $\sin^3 x + 1 - \cos x$ ha ordine 2 (in quanto somma di infinitesimi con ordine diverso) e quindi ha ordine superiore rispetto a $2x$ potendosi, pertanto, trascurare nel calcolo del limite.

A denominatore è presente la somma di due infinitesimi, uno di ordine 2 e uno di ordine 1 rispetto al campione x : quello di ordine 2 potrà essere trascurato.

Il limite si riduce allora solo a:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3\sin x} = \frac{2}{3}$$

Applicazioni allo studio di una funzione: calcolo degli asintoti



Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale sinistro per la funzione.

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

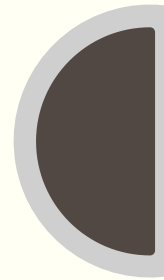
la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale destro per la funzione.

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale completo per la funzione

Asintoti verticali



Se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

la retta $y=l$ è un asintoto orizzontale sinistro per la funzione.

Se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

la retta $y=l$ è un asintoto orizzontale destro per la funzione.

Se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

la retta $y=l$ è un asintoto orizzontale completo per la funzione

Asintoti orizzontali

Calcolo di eventuali asintoti obliqui

Data la funzione $y=f(x)$, se si verifica che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

si dice che la retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo per il grafico della funzione.

Dimostriamo che la distanza di un generico punto P del grafico di una funzione da un suo asintoto obliquo tende a 0 quando x tende a infinito.

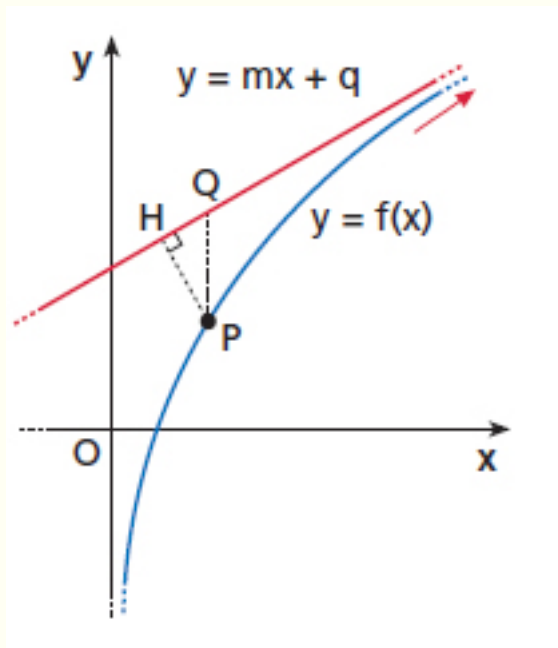
Infatti per la definizione di asintoto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} PQ = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

Ma poiché PQ ed HP sono rispettivamente ipotenusa e cateto del triangolo QHP, si ha:
 $PQ > PH > 0$

Per il teorema del confronto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} PH = 0$$



Ricerca degli asintoti obliqui

Se la funzione non presenta un asintoto orizzontale per $x \rightarrow \infty$ si passa a valutare l'esistenza dell'eventuale asintoto obliquo. L'asintoto obliquo è una retta di equazione $y = mx + q$. Per determinarlo dobbiamo calcolare m e q :

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

Si noti che la funzione può avere un asintoto obliquo a sinistra, a destra o completo e che talvolta è necessario fare i limiti a $+\infty$ e a $-\infty$ separatamente.

