

ESERCIZI SUL CALCOLO DIFFERENZIALE**Continuità e derivabilità**

Si studi la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni nel punto indicato a fianco

1	$f(x) = \sqrt{4 - x } + 3x, \quad x = 0$	3	$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 2 & \text{se } x < 1 \\ x^2 - x - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$
2	$f(x) = 2x - 4 + x , \quad x = 2$		

Si trovi, se possibile, a e b in modo che le seguenti funzioni siano derivabili nel punto a fianco indicato

1	$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{per } x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{per } x \geq 2 \end{cases} \quad x = 2$	[a=4; b=-8]
2	$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} - 1 & \text{se } x \leq -1 \\ ax + b & \text{se } x > -1 \end{cases} \quad x = -1$	[a=-1/2; b=-1/2]

Calcola la derivata delle seguenti funzioni

1	$y = 2e^x + 2x - \cos x$	19	$y = \operatorname{cotg}(x^2 + x)$
2	$y = 3e^x + 4x - \operatorname{sen} x$	20	$y = e^{\cos \ln x}$
3	$y = (x - \ln x) \cdot (\operatorname{sen} x + 3)$	21	$y = e^{\operatorname{sen} \ln x}$
4	$y = (x + \ln x) \cdot (\cos x + 2)$	22	$y = \frac{\cos(2x+1)}{\operatorname{sen}(2-x)}$
5	$y = x \cdot 2^x \cdot \cos x$	23	$y = \frac{\operatorname{sen}(2x+1)}{\cos(2-x)}$
6	$y = x \cdot 3^x \cdot \operatorname{sen} x$	24	$y = 2x^2 \ln x$
7	$y = 2x^4 - x^3 + 3x - 1$	25	$y = 3x^2 \ln x$
8	$y = 3x^4 - 2x^2 + 2x + 3$	26	$y = e^{3x} + x^2 - \ln(x+2)$
9	$y = \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[4]{x}$	27	$y = 2\operatorname{sen}^3 x + \cos^2 x$
10	$y = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[5]{x}$	28	$y = \cos^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x$

11	$y = (x^3 + 2x^2 + x) \cdot \ln x$	29	$y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 3}$
12	$y = (x^3 - x^2 + 2x) \cdot \ln x$	30	$y = \sqrt[4]{x^2 + x - 1}$
13	$y = \frac{x^2 - x + 3}{x^4 + 3}$	31	$y = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{\sin(\pi x)}}$
14	$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3 + 2}$	32	$y = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{\cos(\pi x)}}$
15	$y = \frac{2e^x + x + \ln x}{x^2}$	33	$y = \operatorname{tg}(x^2 + 2x)$
16	$y = \frac{e^x + 2x - \ln x}{2x^2}$	34	$y = \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{x^2}$
17	$y = \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x}$	35	$y = \operatorname{arccotg} \frac{\ln x}{x^2}$
18	$y = \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \cos x}$	36	$y = \operatorname{arcsen} \sqrt{x} \cdot \ln(2x^2 + 3x)$

Ulteriori esercizi

37	$f(x) = e^{x^2}$	47	$f(x) = \frac{3x^4 - 2x^2 + 4}{x^3}$
38	$f(x) = e^{x^2 - 2}$	48	$f(x) = \frac{8x + 2}{\sqrt[4]{4x + 1}}$
39	$f(x) = \log \left(\sqrt{\sin \frac{3}{4}\pi} \right)$	49	$f(x) = 4 \operatorname{artg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
40	$f(x) = \frac{x^3}{1 - x^4}$	50	$f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - 2x^2}{x^3 - 2x} \right)$
41	$f(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^2 - 2x}$	51	$f(x) = \frac{4(x-1)}{x} + \log(x^2 + 1)^4$

42	$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+3}}$	52	$f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 2}$
43	$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x}$	53	$f(x) = \log^2 x - 4 \log x + 3$
44	$f(x) = \log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$	54	$f(x) = (x-1)e^{3-x}$
45	$f(x) = \operatorname{tg}^3 x$	55	$f(x) = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) - x \operatorname{arctg} x$
46	$f(x) = x \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}$	56	$f(x) = \log\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right) + \log(12-3x^4)$

Retta tangente e normale ad una curva

L'espressione analitica della retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto P_0 di ascissa x_0 è:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

L'espressione analitica della retta normale alla curva $y = f(x)$ nel punto P_0 di ascissa x_0 è l'equazione della retta perpendicolare alla retta tangente nello stesso punto:

$$y - f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

ESERCIZIO SVOLTO

Calcolare l'equazione della retta normale alla curva

$$y = x^3 - \sqrt{x^3 + 3}$$

nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

Il punto di contatto ha coordinate $P_0(2; 5)$. La derivata della funzione è

$$y' = 3x^2 - \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}$$

Il coefficiente angolare della retta tangente è $y'(2) = 10$. Quindi, l'equazione della retta cercata è:

$$y - 5 = 10(x - 2)$$

$$y = 10x - 15$$

ESERCIZI DA SVOLGERE

Scrivere l'equazione della retta tangente alle curve nel punto a fianco indicato:

1	$f(x) = 5x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = 0$
2	$f(x) = -3x^2 + 2, \quad x_0 = 2$
3	$f(x) = 2x - \sqrt{x^3 + 2}, \quad x_0 = 1$
4	$f(x) = \frac{1}{x} + x^2, \quad x_0 = 2$
5	$f(x) = x \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}, \quad x_0 = 3$
6	$f(x) = e^{x+1} - \frac{x^2}{2}, \quad x_0 = 0$
7	$f(x) = x^2 \log x, \quad x_0 = 1$
8	$f(x) = \cos x + \tan x, \quad x_0 = \pi$
9	$f(x) = e^{3x} \log(x^2 + 1), \quad x_0 = 0$
10	<p>Stabilire se la funzione</p> $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \geq 0 \\ x^3 - 2x & \text{per } x < 0 \end{cases}$ <p>è continua e derivabile nell'origine e se esistono punti del grafico in cui la retta tangente è parallela alla bisettrice del II e IV quadrante.</p>

11	<p>Individuare i punti del grafico della funzione</p> $y = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{2x + 3}$ <p>in cui la tangente ha coefficiente angolare pari a -1</p>
----	--

Teorema di De L'Hospital

Esercizio svolto 1

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin x}{x - 2\sin x}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Applicando il teorema di De L'Hospital, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \sin x}{x - 2\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \cos x}{1 - 2\cos x} = -3$$

Esercizio svolto 2

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + \sin x}{2x \sin^2 x}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0. Applicando la regola di De L'Hospital, si ha che, poiché $2\sin x \cos x = \sin 2x$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + \sin x}{2x \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x}{2\sin^2 x + 2x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{4\sin 2x + 4x \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{8\cos 2x + 4\cos 2x - 8x \sin 2x} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Utilizzando la regola di De L'Hospital, calcolare i seguenti limiti:

1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2 - x}$	13	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x^2 \cdot \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right]$
2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x + x}$	14	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+2)e^{-x} \right]$
3	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x^2 + 2x}$	15	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x^2 \cdot \ln \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \right]$

4	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(x^2 + 2x)}$	16	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1)e^{-2x}]$
5	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2x^2 + x)}{\ln x}$	17	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - x}$
6	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2}{\sin x - 2x}$	18	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{\ln(x+1)}$
7	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{e^x + x}$	19	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x}{x^2 + x}$
8	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^x}{x^2 - x}$	20	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - x}{\ln(1-x)}$
9	$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^2 \cdot \ln(\sin x)]$	21	$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^2 - x)e^x]$
10	$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x^2 \cdot \ln(1 - \cos x)]$	22	$\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x(x^2 - 2x)]$
11	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{3x^2 - \sqrt{x}} = 0$	23	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{3x} - 6(2^{2x}) - \operatorname{arctg} 8x}{2^{3x} + 4x} = 1$
12	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = +\infty$	24	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2 - \sqrt{x^2 - x + 4}}{3x} = \frac{5}{12}$

Rappresenta la funzione assegnata e determina gli intervalli in cui $f(x)$ è continua e quelli in cui è derivabile

1	$f(x) = \left \sin\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) \right $	$\left[\text{continua su } \mathbf{R}; \text{derivabile su } \left] \frac{2}{3}\pi + k\pi; \frac{5}{3}\pi + k\pi \left[, k \in \mathbf{Z} \right]$
2	$f(x) = \left \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \right $	$\left[\text{continua su } \mathbf{R}; \text{derivabile su } \left] \frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{4}{3}\pi + k\pi \left[, k \in \mathbf{Z} \right]$
3	$f(x) = \sqrt{\ln(x-2)}$	$\left[\text{continua su } [3; +\infty[; \text{derivabile su }]3; +\infty[\right]$
4	$f(x) = \sqrt{\ln(3-x)}$	$\left[\text{continua su }]-\infty; 2]; \text{derivabile su }]-\infty; 2[\right]$

Teorema di Lagrange

Date le seguenti funzioni, verifica che nell'intervallo indicato a fianco valgano le ipotesi del teorema di Lagrange e trova il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema.

1	$y = x^3 + 2x + 3, [-3;0]$	$\left[c = -\sqrt{3} \right]$
2	$y = -x^3 - 2x + 3, [-3;0]$	$\left[c = -\sqrt{3} \right]$
3	$y = 2\text{sen}^2 x + \cos^2 x, [0;\pi]$	$\left[c = \frac{\pi}{2} \right]$
4	$y = -\text{sen}^2 x + \cos^2 x, [0;2\pi]$	$\left[c_1 = \frac{\pi}{2}; c_2 = \pi; c_3 = \frac{3}{2}\pi \right]$

Teorema di Rolle

Data la seguente funzione, verifica che nell'intervallo indicato a fianco valgano le ipotesi del teorema di Rolle e trova il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema.

1	$y = \frac{1}{x^4 - x^2 + 1}, [-2;2]$	$\left[c_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}; c_2 = 0; c_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$
2	$y = -\frac{2}{2x^4 - x^2 + 3}, [-1;1]$	$\left[c_1 = -\frac{1}{2}; c_2 = 0; c_3 = \frac{1}{2} \right]$

Teorema di Cauchy

Date le seguenti funzioni, verifica che nell'intervallo indicato a fianco valgano le ipotesi del teorema di Cauchy e trova il punto (o i punti) la cui esistenza è assicurata dal teorema.

1	$f(x) = \frac{1}{x+2}, g(x) = \frac{x+2}{3x}, [1;2].$	$\left[c = \frac{2+2\sqrt{6}}{5} \right]$
2	$f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = \frac{x-1}{2x-1}, [-1;0].$	$\left[c = \frac{1-\sqrt{6}}{5} \right]$

PROBLEMI**Problema n°1**

Date le funzioni $f(x) = x + |x^2 - 2x|$ e $g(x) = x - |x^2 - 2x|$:

- calcola le derivate $f'(x)$ e $g'(x)$ e le relative condizioni di esistenza;
- disegnato il grafico delle due funzioni, indica i valori di x per i quali le funzioni non sono derivabili precisando se per tali valori le funzioni sono però continue;
- trova gli eventuali valori di x per i quali $f(x)$ e $g(x)$ hanno tangenti parallele.

$$S: \left[\begin{array}{ll} f'(x) = 2x - 1 & g'(x) = -2x + 3 \quad \text{se } x \leq 0 \vee x \geq 2 \\ f'(x) = -2x + 3 & g'(x) = 2x - 1 \quad \text{se } 0 < x < 2 \end{array} ; \text{ b) } x = 0 \text{ e } x = 2; \text{ sì; c) } x = 1 \right]$$

Problema n°2

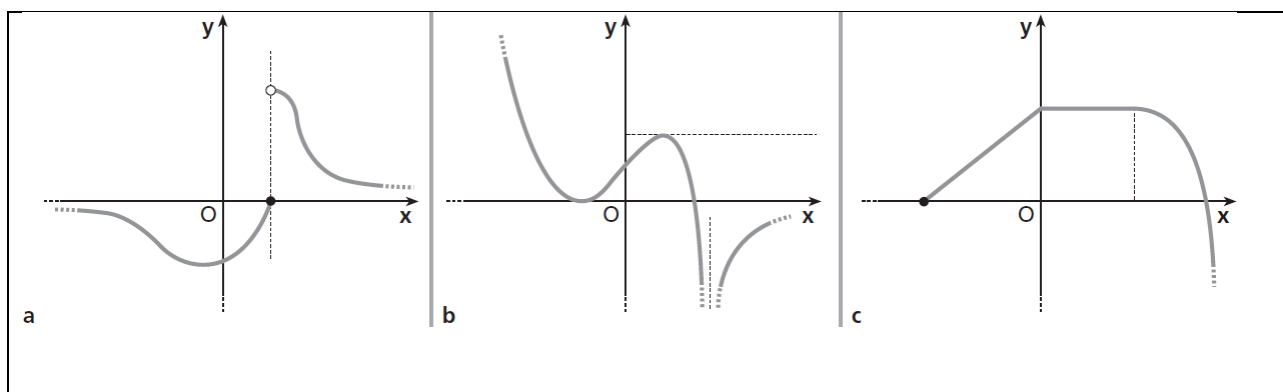
Data la funzione $f(x) = \begin{cases} 6x^2 + ax + 2 & \text{se } b \leq x < 0 \\ ce^x - 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \ln 2 \end{cases}$

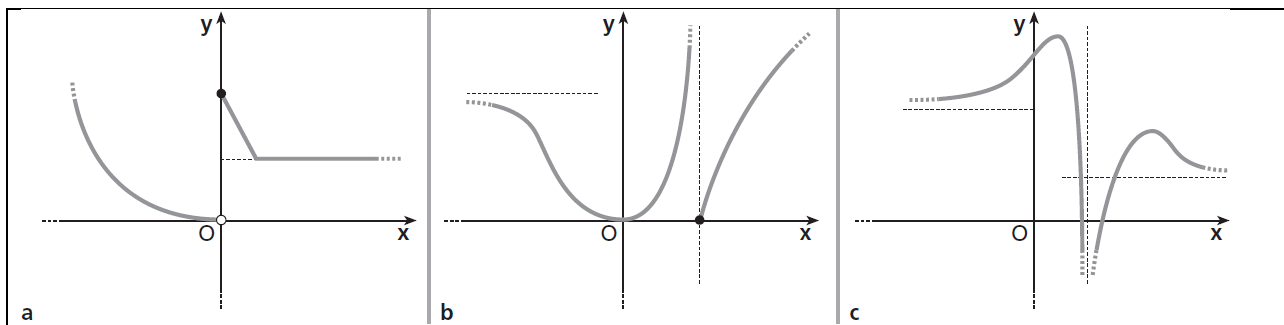
- trova a, b, c , in modo che $f(x)$ soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle in $[b; \ln 2]$ e determina il punto x_0 che verifica il teorema;
- rappresenta graficamente $f(x)$;
- determina, se esiste nell'intervallo in cui è definita $f(x)$, un punto P in cui la tangente è perpendicolare alla retta di equazione $x + 6y = 0$.

$$S: \left[\text{a) } a = 3; b = -1; c = 3; x_0 = -\frac{1}{4}; \text{ c) } P(\ln 2; 5) \right]$$

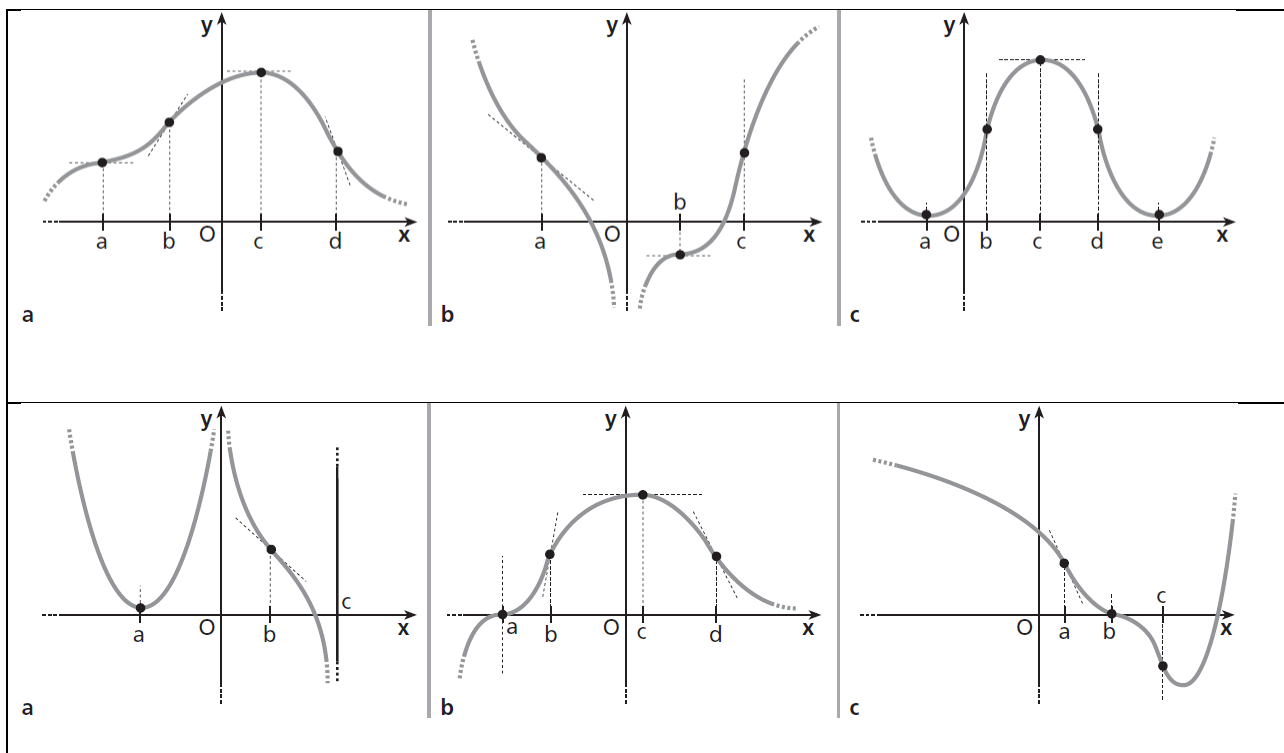
PROPRIETA' DI MONOTONIA

Indica i punti di massimo e di minimo, relativi e assoluti, nelle seguenti funzioni.





Nei seguenti grafici indica i punti di flesso, specificando se sono orizzontali, verticali o obliqui e se sono ascendenti o discendenti.



Proprietà di monotonia

Studiare le proprietà di monotonia delle seguenti funzioni

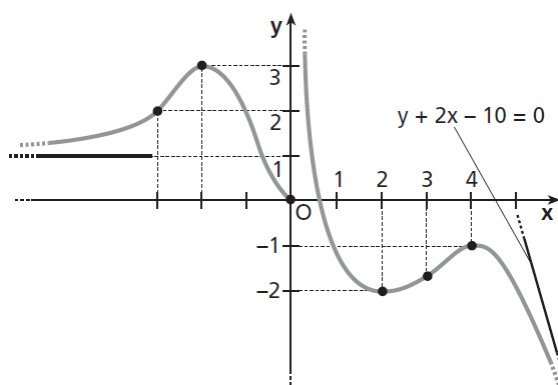
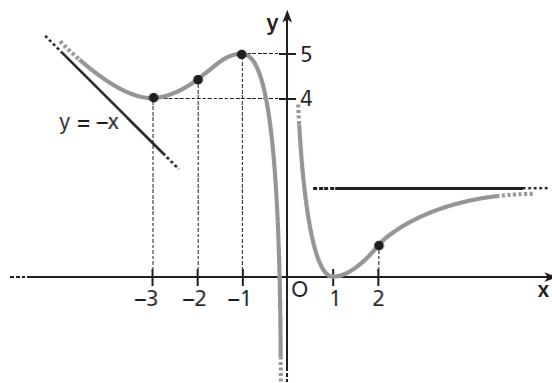
1	$y = x^4 - 6x^2 + 2$	26	$y = 1 - \sqrt{e^{x-2}} $
2	$y = \frac{x^2 - 5x + 2}{x + 2}$	27	$y = e^{\frac{x-1}{ x }}$
3	$y = \frac{6x}{x^2 - 2}$	28	$y = e^{x x-1 }$
4	$y = x + \sqrt{2-x}$	29	$y = \frac{x-1}{x} \cdot e^{\frac{2x+1}{x-1}}$
5	$y = \log(2x^2 + 1)$	30	$y = \frac{4\cos^2 x - 3}{\cos x}$

6	$y = e^{2x} + 6e^{-2x}$	31	$y = \frac{3\cos x}{2\sin^2 x} - 1$
7	$y = \sqrt{x^3 - x}$	32	$y = \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x-1}}$
8	$y = x^3 - 2x^2 - 1$	33	$y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
9	$y = x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + 6$	34	$y = x\sqrt{1-x^2}$
10	$y = \frac{x^6}{6} - \frac{2}{5}x^5 + \frac{x^4}{4}$	35	$y = \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1}}$
11	$y = \frac{x+4}{7-x^2}$	36	$y = \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$
12	$y = e^{2x} - 2e^x + e^2$	37	$y = x\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}$
13	$y = \log x - \frac{1}{2}x^2$	38	$y = \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}}$
14	$y = \log^2 x + 2\log x + 1$	39	$y = \frac{e^{-x}}{x^2 - 3}$
15	$y = \frac{\sin x}{1 + 2\sin^2 x}$	40	$y = \left(\sqrt{x^2 - 1} - \frac{\pi}{4}\right)^\pi$
16	$y = \frac{ 1-x^3 }{x^2}$	41	$y = \sqrt{2(2\sin^2 x - 1) - 1}$
17	$y = \frac{4}{ x \sqrt{4-x^2}}$	42	$y = \arctg e^{2x} - 1 $
18	$y = \frac{x}{\log^2 x} + x$	43	$y = e^{\frac{x}{1-x}}$
19	$y = \frac{1}{\sqrt{1- 2-x }} + \frac{1}{\sqrt{1+ 2-x }}$	44	$y = \log x^2 - 3x + 2 $
20	$y = \sqrt[5]{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$	45	$y = (x^2 + 6x)e^{-\frac{1}{x}}$
21	$y = \sqrt{x} \cdot e^{x-1}$	46	$y = \sqrt{\log x^2}$
22	$y = \frac{x^2}{x^2 - x^2 - 4 }$	47	$y = 2\arctg\sqrt[3]{2x^3 - 15x^2 + 36x + 1} - \pi$
23	$y = \sqrt{x^2 + 2x - 3 }$	48	$y = \log\left(\pi - 2\arctg\sqrt[3]{2x^3 - 15x^2 + 36x + 1}\right)$
24	$y = \frac{2x-1}{xe^{x+1}}$	49	$y = \left(1 + \operatorname{tgh}^4\sqrt[3]{2x^3 - 15x^2 + 36x}\right)^3$
25	$y = \log\frac{e^x + 1}{e^x}$	50	$y = \sqrt[5]{\pi - 2\arctg(\log^2 x - 1)^3}$

Studio delle funzioni

Dal grafico in figura deduci:

1. il dominio della funzione;
2. le intersezioni con gli assi;
3. gli intervalli in cui la funzione è positiva e quelli in cui è negativa;
4. i limiti agli estremi del dominio e le equazioni degli asintoti;
5. gli intervalli in cui la funzione è crescente e quelli in cui è decrescente;
6. i punti di massimo e di minimo relativi;
7. i punti di flesso, evidenziando le concavità.



Studia e rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

1	$y = x^3 - 3x^2$	$[\max (0;0); \min (2;-4); F(1;-2)]$
2	$y = x^3 + 3x^2$	$[\max (-2;4); \min (0;0); F(-1;2)]$
3	$y = x^4 - 2x^2 - 3$	$\left[\text{funzione pari}; \min (\pm 1;-4); \max (0;-3); F\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{32}{9}\right) \right]$
4	$y = x^4 - 2x^2 - 8$	$\left[\text{funzione pari}; \min (\pm 1;-9); \max (0;-8); F\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{77}{9}\right) \right]$
5	$y = \frac{x^3}{x+1}$	$\left[a : x = -1; \min \left(-\frac{3}{2}; \frac{27}{4}\right); F(0;0) \right]$
6	$y = \frac{x^3}{x-1}$	$\left[a : x = 1; \min \left(\frac{3}{2}; \frac{27}{4}\right); F(0;0) \right]$

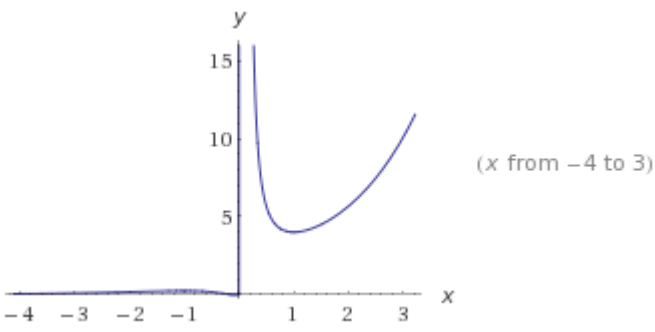
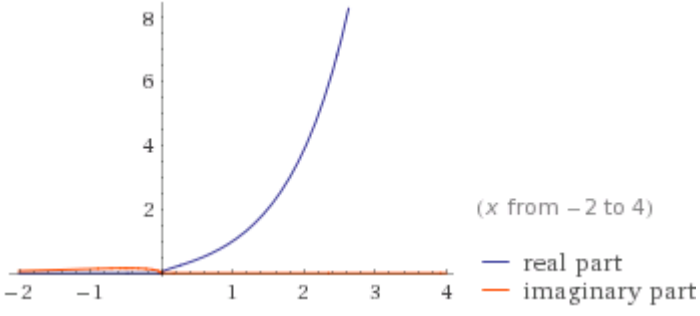
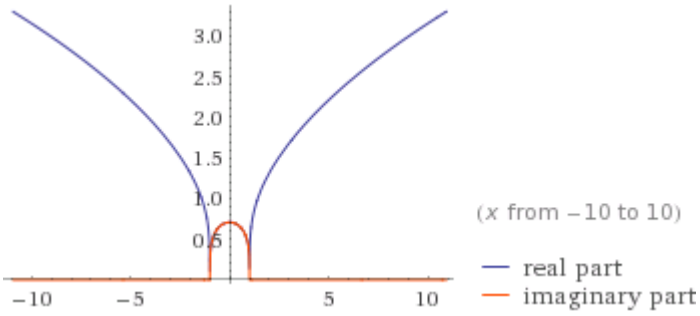
7	$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$	[funz. dispari; $a: x = \pm 2, y = x$; $\min(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$; $\max(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$; $F(0;0)$]
8	$y = \frac{x^3}{x^2 - 9}$	[funz. dispari; $a: x = \pm 3, y = x$; $\min(-3\sqrt{3}; -\frac{9\sqrt{3}}{2})$; $\max(3\sqrt{3}; \frac{9\sqrt{3}}{2})$; $F(0;0)$]
9	$y = -2 + \sqrt{5 + 4x - x^2}$	[$\max(2;1)$; $x = -1, x = 5$ punti a tangente verticale]
10	$y = -1 + \sqrt{7 - 6x - x^2}$	[$\max(-3;3)$; $x = -7, x = 1$ punti a tangente verticale]
11	$y = \sqrt{\frac{2-x}{x+4}}$	[$a: x = -4$; $F(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3})$]
12	$y = \sqrt{\frac{1-x}{x+5}}$	[$a: x = -5$; $F(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3})$]
13	$y = \frac{x^2 - 1}{e^x}$	[$a: y = 0$; $\min(1 - \sqrt{2}; \frac{2 - 2\sqrt{2}}{e^{1-\sqrt{2}}})$; $\max(1 + \sqrt{2}; \frac{2 + 2\sqrt{2}}{e^{1+\sqrt{2}}})$; $F_1(2 - \sqrt{3}; \frac{6 - 4\sqrt{3}}{e^{2-\sqrt{3}}})$; $F_2(2 + \sqrt{3}; \frac{6 + 4\sqrt{3}}{e^{2+\sqrt{3}}})$]
14	$y = \frac{1 - x^2}{e^x}$	[$a: y = 0$; $\min(1 + \sqrt{2}; -\frac{2 + 2\sqrt{2}}{e^{1+\sqrt{2}}})$; $\max(\sqrt{2} - 1; -\frac{-2 + 2\sqrt{2}}{e^{1-\sqrt{2}}})$; $F_1(2 - \sqrt{3}; -\frac{6 - 4\sqrt{3}}{e^{2-\sqrt{3}}})$; $F_2(2 + \sqrt{3}; -\frac{6 + 4\sqrt{3}}{e^{2+\sqrt{3}}})$]
15	$y = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$	[$a: x = -1$; $\max(\sqrt{e} - 1; \frac{1}{2e})$; $F(e^{\frac{5}{6}} - 1; \frac{5}{6e^{\frac{5}{3}}})$]
16	$y = \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$	[$a: x = 1$; $\max(\sqrt{e} + 1; \frac{1}{2e})$; $F(e^{\frac{5}{6}} + 1; \frac{5}{6e^{\frac{5}{3}}})$]
17	$y = \frac{\sin x}{\cos x + 2}$	[$\min(\frac{4}{3}\pi; -\frac{\sqrt{3}}{3})$; $\max(\frac{2}{3}\pi; \frac{\sqrt{3}}{3})$; $F_0(0;0)$; $F_1(\pi;0)$; $F_2(2\pi;0)$]
18	$y = \frac{\cos x}{\sin x + 2}$	[$\min(\frac{7}{6}\pi; -\frac{\sqrt{3}}{3})$; $\max(\frac{11}{6}\pi; \frac{\sqrt{3}}{3})$; $F_0(\frac{\pi}{2};0)$; $F_1(3\frac{\pi}{2};0)$]
19	$y = \left \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 2} \right $	[$a: x = 2; y = x; y = -x$; $\min_1(-2;0)$ punto angoloso; $\min_2(4;0)$ punto angoloso]
20	$y = \left \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1} \right $	[$a: x = -1; y = x + 1; y = -x - 1$; $\min_1(-3;0)$ punto angoloso; $\min_2(1;0)$ punto angoloso]

Paulo difficiliora

21	$y = \frac{9x^2 - 4}{9x^2 - 16}$	
----	----------------------------------	--

		<p>(x from -6 to 6)</p>
22	$y = e^x - \frac{1}{8}e^{2x}$	
23	$y = \log 3 - 2\log x $	<p>(x from -20 to 20)</p>
24	$y = \log \frac{\log x + 1}{\log x - \frac{1}{2}}$	
25	$y = \text{artg} \left(\frac{x+2}{3-x} \right)$	<p>(x from -15 to 15)</p>
26	$y = e^x(3x^2 - 4x - 1)$	
27	$y = \frac{x^2}{16} \left(4\log^2 \left(\frac{x}{4} \right) - 10\log \left(\frac{x}{4} \right) + 5 \right)$	
28	$y = \log(5x^2 + 4x + 4)$	
29	$y = \sqrt{ x^2 - 4x - 5 }$	
30	$y = x - 2 \cdot e^x$	

		<p>(x from -1 to 3)</p>
31	$y = x \log x $	
32	$y = \frac{\sin x}{\sqrt{2}\cos x - 1}$	
33	$y = \sqrt{2\sin^2 x - 1}$	
34	$y = \sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}$	
35	$y = \sqrt{ 5x^2 - 6x + 1 }$	
36	$y = \sqrt[3]{\frac{x+3}{x^2-3x-4}}$	
37	$y = \log(2x^2 + 3x + 1)$	
38	$y = \log \frac{ 2x+1 - x^2}{3x-1}$	
39	$y = \frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{2x-1}}$	
40	$y = e^{\frac{2-x^2}{1-x^2}}$	
41	$y = e^{2x- x^2+x-2 }$	<p>(x from -6 to 6)</p>
42	$y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 9) - \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 5x + 4)$	
43	$y = \frac{1}{\sqrt{e^x(1-x^2)}}$	

44	$y = \operatorname{artg} \left(\frac{2^x}{2^x - 1} \right)$	
45	$y = \frac{x \log x }{(\log x - 1)^2}$	
46	$y = \operatorname{artg} \left(\frac{1 - 3x}{2 - x} \right)$	
47	$y = \arcsin \left(\frac{2 - x}{3 - 2x} \right)$	
48	$y = 2^{x + \frac{1}{x}}$	 <p>(x from -4 to 3)</p>
49	$y = \sqrt{x}e^{x-1}$	 <p>(x from -2 to 4)</p> <p>— real part — imaginary part</p>
50	$y = \sqrt[5]{x}e^{-\frac{1}{x}}$	
51	$y = \sqrt[5]{(x^2 - 1)^2}$	
52	$y = \sqrt[5]{x^2 - 1}$	
53	$y = \sqrt[4]{x^2 - 1}$	 <p>(x from -10 to 10)</p> <p>— real part — imaginary part</p>
54	$y = \sqrt[5]{(x^2 - 1)^4}$	

55	$y = \begin{cases} 1 - 2x \log x & \text{se } x \in]0,1] \\ (\log x - 1)^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$	
56	$y = \begin{cases} (x+1)e^{\frac{x+2}{2(x+1)}} & \text{se } x \leq 0, x \neq -1 \\ e^{\sqrt{x+1}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$	
57	$y = \begin{cases} \frac{1}{e-x} & \text{se } x \in [0, e[\\ x \sqrt{\frac{\log x + 1}{2 \sqrt{\log x - 1}}} & \text{se } x > e \end{cases}$	
58	$y = \frac{ 1 + 3 \log x }{ x ^3}$	
59	$y = (x-1)^4(x-2)(x-3)^5$	<p>(x from 1 to 3.5)</p>
60	$y = \arccos(\cos^2 x)$	