



# CALCOLO DIFFERENZIALE

Prof. Roberto Capone  
A.A. 2016/17  
Corso di Studi in Ingegneria Chimica



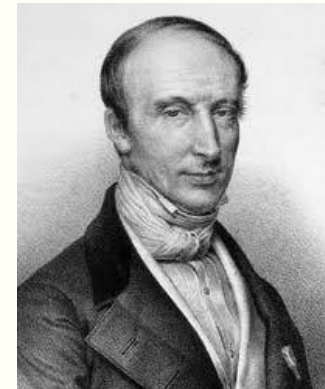
# Le derivate: introduzione storica

---

I due fondamentali capitoli dell'analisi matematica sono il calcolo differenziale e il calcolo integrale. Mentre il calcolo integrale trova le sue origini nella matematica greca, il calcolo differenziale nacque e prese forma nel XVII secolo, essenzialmente ad opera di Newton e Leibnitz

Alle idee basilari e allo sviluppo di questo fondamentale capitolo si giunse attraverso l'esigenza di risolvere due diversi tipi di problemi: problemi di tipo cinematico, come quello riguardante la nozione di velocità istantanea e problemi di tipo geometrico come quello che consiste nel determinare la tangente in un punto al diagramma di una funzione o, più in generale, a una curva.

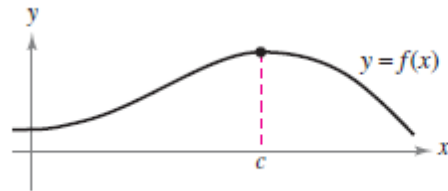
Dapprima poggiando in maniera poco chiara ed ambigua sulle nozioni di infinitesimo e di differenziale, il calcolo differenziale assunse solo con Cauchy ne secolo XIX la forma definitiva, basandosi solidamente sulla nozione di limite.



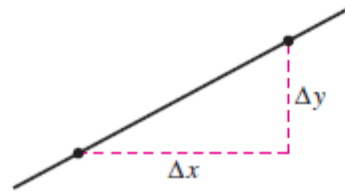
## Without Calculus

## With Differential Calculus

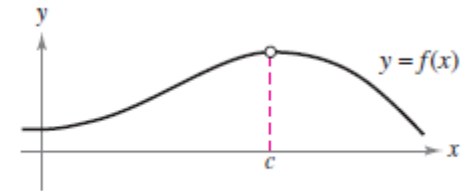
Value of  $f(x)$   
when  $x = c$



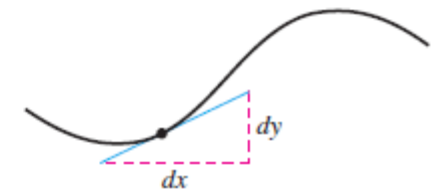
Slope of a line



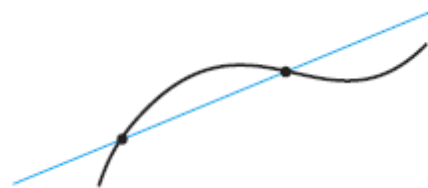
Limit of  $f(x)$  as  
 $x$  approaches  $c$



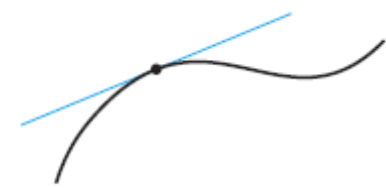
Slope of a curve



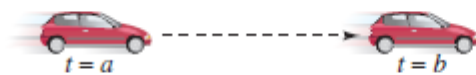
Secant line to  
a curve



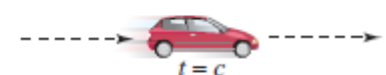
Tangent line to  
a curve



Average rate of  
change between  
 $t = a$  and  $t = b$



Instantaneous  
rate of change  
at  $t = c$



## Without Calculus

## With Differential Calculus

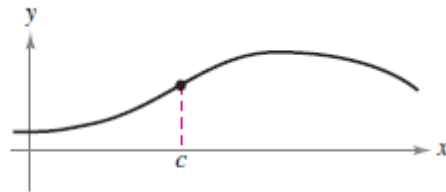
Curvature  
of a circle



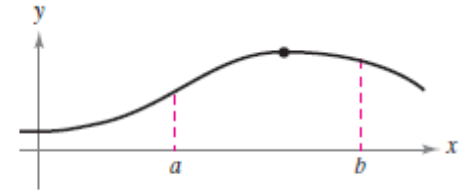
Curvature  
of a curve



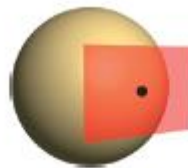
Height of a  
curve when  
 $x = c$



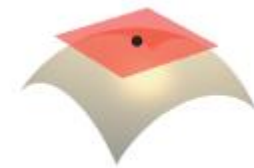
Maximum height  
of a curve  
on an interval



Tangent plane  
to a sphere



Tangent plane  
to a surface



Direction of  
motion along  
a line

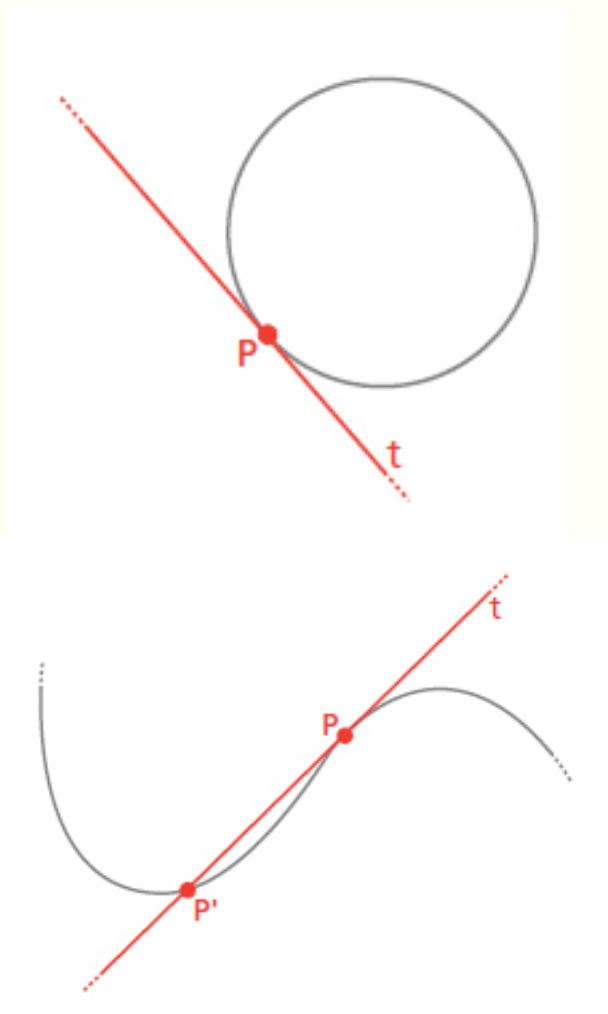


Direction of  
motion along  
a curve



# Il problema della tangente

---



Uno dei problemi classici che portarono al concetto di derivata è quello della determinazione della retta tangente a una curva in un punto.

Se consideriamo una circonferenza, e in generale per ogni conica, la tangente in un punto  $P$  è quella retta che interseca la conica stessa soltanto in  $P$ .

Potremmo pensare di definire la tangente a una qualunque curva mediante tale proprietà. Tuttavia la definizione non sarebbe sempre corretta. Per esempio ci sono rette che intersecano la curva in un solo punto ma non sono tangenti alla curva. Per esempio l'asse di una parabola interseca la parabola stessa in un solo punto, nel suo vertice, ma non è una retta tangente

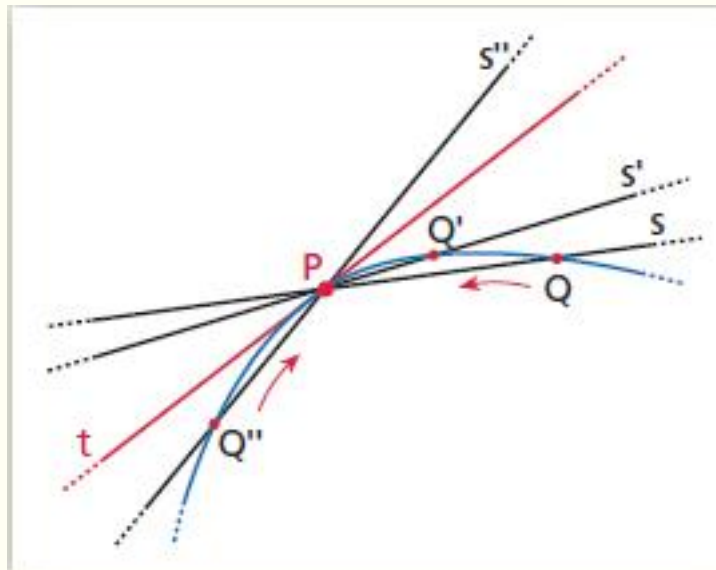
# Il problema della tangente

---

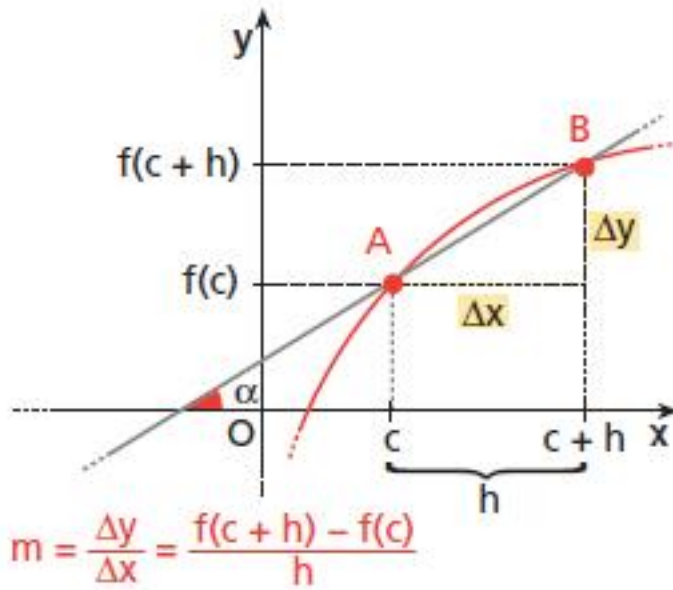
Per ottenere allora una definizione valida in generale, ci si richiama al concetto di limite, pensando al procedimento secondo il quale si può approssimare la tangente mediante rette secanti che le si avvicinano sempre di più.

## Definizione

La retta tangente  $t$  ad una curva in un punto  $P$  è la posizione limite, se esiste, della secante  $PQ$  al tendere (sia da destra, sia da sinistra) di  $Q$  a  $P$



# Il rapporto incrementale



Data una funzione  $y = f(x)$  definita in un intervallo  $[a,b]$  e un punto del suo grafico  $A(c, f(c))$ . Incrementiamo l'ascissa di A di una quantità  $h$  e così otteniamo il punto B di coordinate  $B(c+h, f(c+h))$ .

Gli incrementi  $\Delta x = x_B - x_A = h$  e  $\Delta y = y_B - y_A = f(c+h) - f(c)$ .

Il rapporto dei due incrementi è  $\Delta y / \Delta x$ .

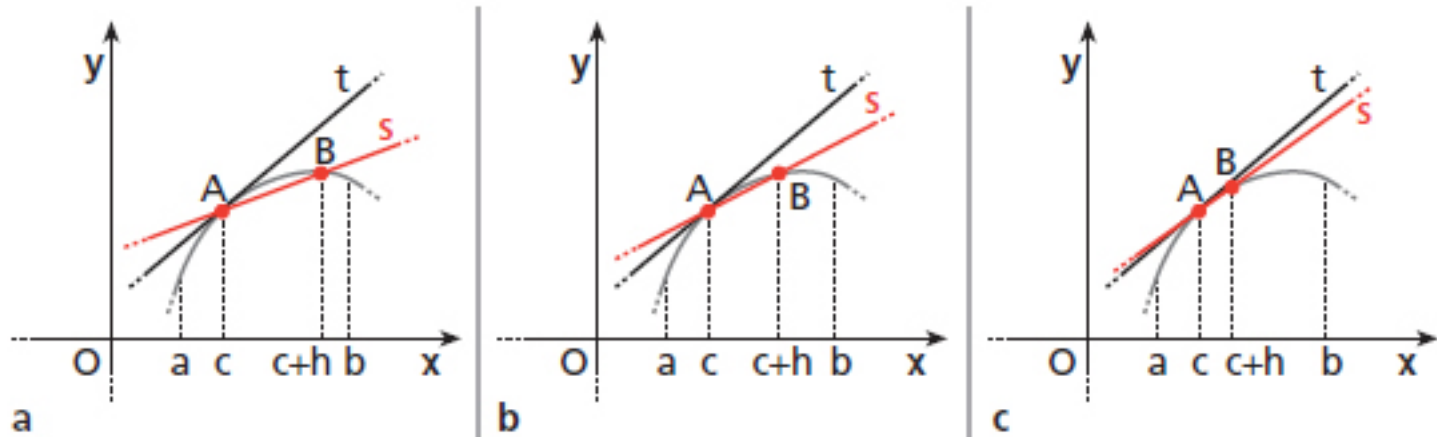
## Definizione

Dati una funzione  $y = f(x)$ , definita in un intervallo  $[a,b]$  e due diversi numeri reali  $c$  e  $c+h$  interni all'intervallo, si chiama rapporto incrementale di  $f$  (relativo a  $c$ ) il numero

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Il rapporto incrementale di  $f$  relativo a  $c$  è il coefficiente angolare della retta passante per A e B

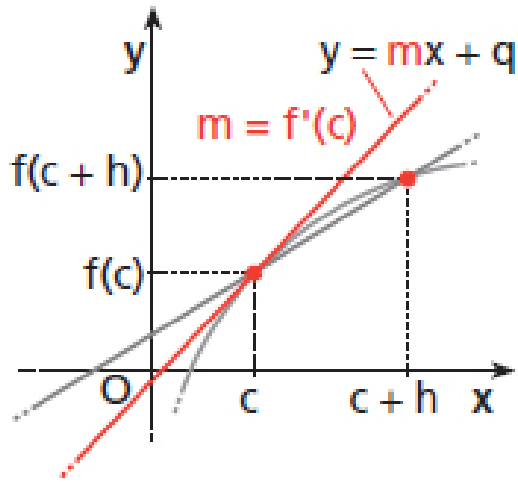
# La derivata di una funzione



Consideriamo la funzione  $y = f(x)$  definita in un intervallo  $[a,b]$ . Consideriamo i punti A e B. Tracciamo la retta AB, secante il grafico, per diversi valori di  $h$ . Attribuendo a  $h$  valori sempre più piccoli, il punto B si avvicina sempre di più al punto A. Quando  $h$  tende a 0, il punto B tende a sovrapporsi al punto A e la retta AB tende a diventare la retta tangente alla curva in A. Il coefficiente angolare della retta secante AB, ossia il rapporto incrementale, tende al coefficiente angolare della tangente, che viene chiamato derivata della funzione nel punto c.



# Nozione di derivata



## Definizione

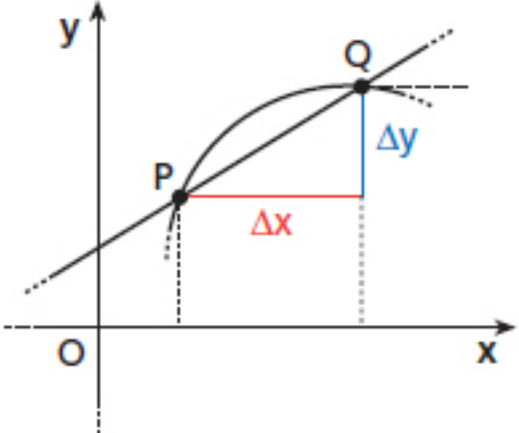
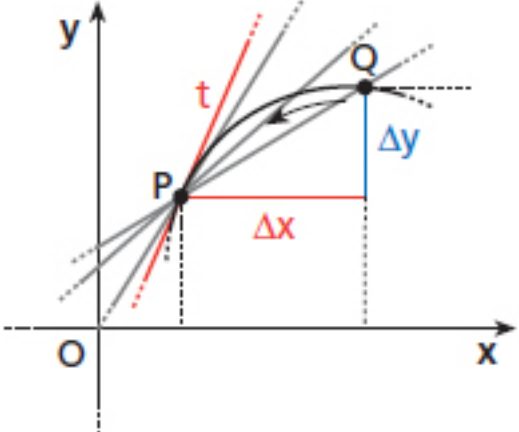
Data una funzione  $y = f(x)$  definita in un intervallo  $[a,b]$ , si chiama derivata della funzione nel punto  $c$  interno ad  $[a,b]$  e si indica con  $f'(c)$  il limite, se esiste ed è finito, per  $h$  che tende a 0, del rapporto incrementale di  $f$  relativo a  $c$ :

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

La derivata di una funzione in un punto  $x_0$  si denota col simbolo

$f'(x_0)$	Notazione risalente a Lagrange
$Df(x_0)$	Notazione dovuta a Cauchy
$\dot{f}$	Notazione risalente a Newton
$\frac{df}{dx}$	Notazione dovuta a Leibnitz

## Rapporto incrementale e derivata di una funzione

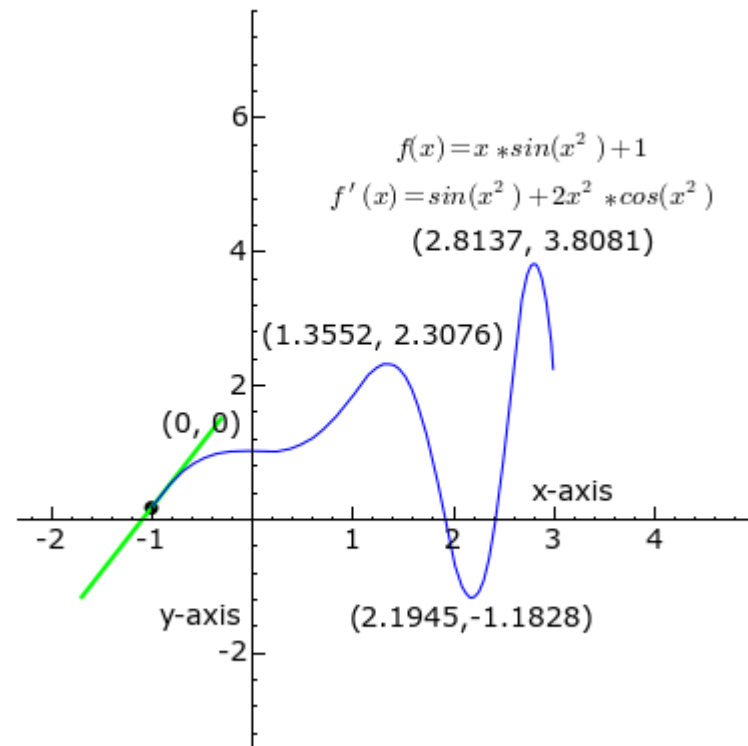
Concetto	Figura	Definizione	Significato geometrico
Rapporto incrementale		$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Coefficiente angolare della <b>secante</b> al grafico della funzione nei punti <i>P</i> e <i>Q</i>
Derivata		$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$	Coefficiente angolare della <b>tangente</b> al grafico della funzione nel punto <i>P</i>

# Equazione della retta tangente

## Teorema

Una funzione reale  $f$  è derivabile in un punto  $x_0$  del suo insieme di definizione se e solo se il suo diagramma è dotato nel punto  $p_0=(x_0, f(x_0))$  di retta tangente non verticale. Quando una di queste condizioni sia soddisfatta, la derivata di  $f$  in  $x_0$  è il coefficiente angolare della retta tangente in  $p_0$  al diagramma di  $f$  e la tangente ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



# Legame tra continuità e derivabilità

---

## **Teorema**

*Ogni funzione reale derivabile in un punto del suo insieme di definizione è necessariamente continua in quel punto.*

## **Dimostrazione**

Detto  $x_0$  il punto in cui  $f$  è derivabile,  $\forall x \neq x_0$  appartenente all'insieme di definizione di  $f$  si ha

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

Passando al limite in tale relazione per  $x$  tendente a  $x_0$ , il secondo membro tende a  $f'(x_0) \cdot 0 = 0$  e quindi per il primo membro si ha anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

Tale relazione è equivalente all'altra

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

dunque la  $f$  è continua in  $x_0$ .

# Legame tra continuità e derivabilità

---

Si noti che **la proposizione inversa non è vera.**

Infatti una funzione continua in un punto può non essere ivi derivabile. Un semplicissimo esempio è fornito dalla funzione

$$f(x) = |x|$$

Tale funzione non è derivabile in 0, pur essendo ivi continua.

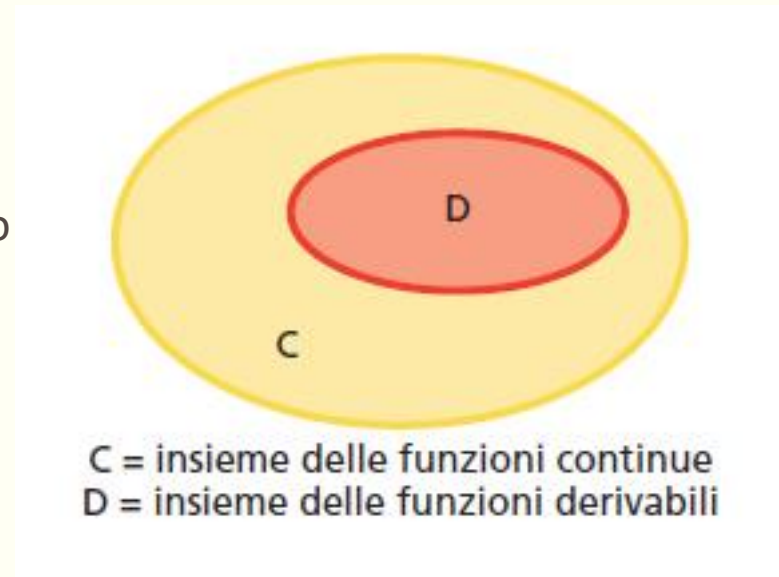
Infatti

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Si ha:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{per } x \geq 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

E perciò il limite del rapporto incrementale della  $f$  relativo al punto 0 non esiste.



# Derivata sinistra e derivata destra

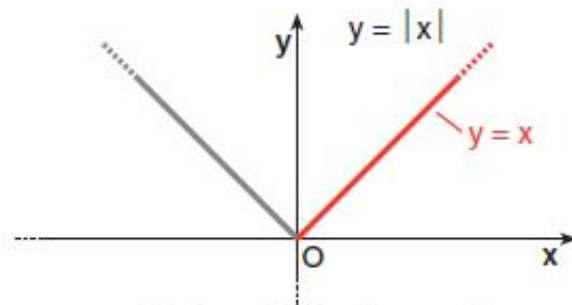
## Definizione

Siano  $f$  una funzione reale definita nel sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}$ ,  $x_0$  un punto di accumulazione a sinistra. Supposto che esista, finito o no, il limite sinistro in  $x_0$  del rapporto incrementale di  $f$  relativo a  $x_0$ ,

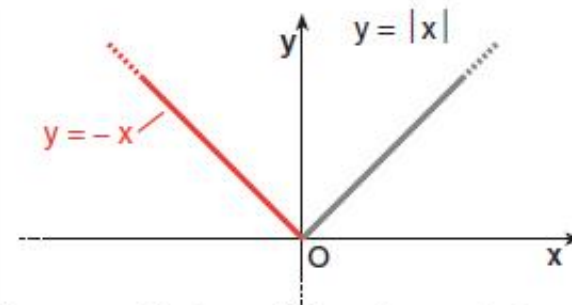
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tale limite si chiama derivata sinistra in  $x_0$  di  $f$  e si indica con  $f'_-(x_0)$ .

Conseguentemente, se esiste il limite sinistro, si dice che la funzione  $f$  è dotata di derivata sinistra in  $x_0$ .



a. Se consideriamo la funzione a destra di  $x = 0$ , il suo grafico coincide con la retta  $y = x$ . Anche la tangente coincide con la retta e il suo coefficiente angolare è 1, quindi  $f'_+(0) = 1$ .

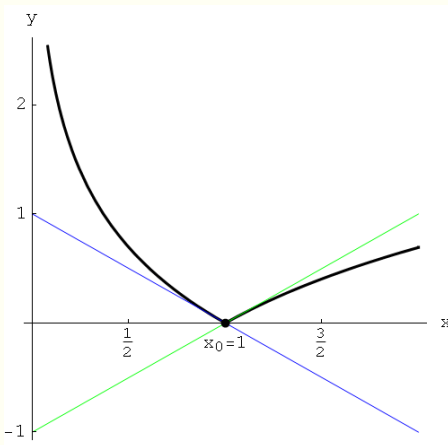


b. Se consideriamo la funzione a sinistra di  $x = 0$ , il suo grafico (e quello della tangente) coincide con la retta  $y = -x$ . Il coefficiente angolare è  $-1$ , quindi  $f'_-(0) = -1$ .

# Punti di non derivabilità: punti angolosi

Se una funzione  $y=f(x)$  è non derivabile in un punto, possono verificarsi i seguenti tre casi:

Se la derivata sinistra e la derivata destra in un punto  $x_0$  sono entrambe finite ma diverse, allora  $x_0$  è un **punto angoloso**.



Esempio: il diagramma cartesiano di  $f(x)=|\ln x|$  ha un punto angoloso in  $P(1,0)$

Infatti:

Esplicitiamo l'espressione analitica di  $f(x)$ :

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \in [1; +\infty[ \\ -\ln x, & x \in ]0; 1[ \end{cases}$$

Quindi la derivata prima è:

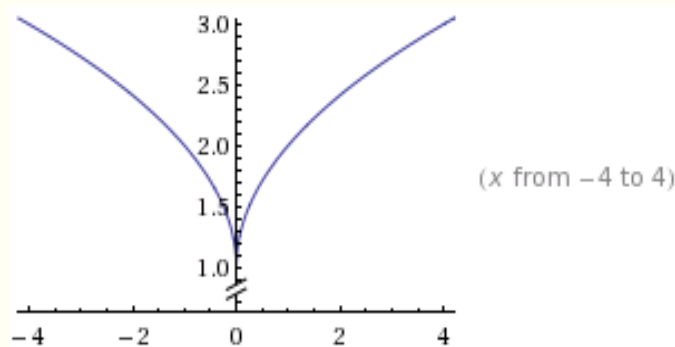
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [1; +\infty[ \\ -\frac{1}{x}, & x \in ]0; 1[ \end{cases}$$

Il punto  $x_0 = 1$  è una discontinuità di prima specie per  $f'$  per cui il punto  $P(1, 0)$  è un punto angoloso.

# Punti di non derivabilità: cuspidi

---

Se i limiti sono diversi e tendono rispettivamente a  $+\infty$  e a  $-\infty$ , allora si ha una **cuspidi**. In particolare se la derivata sinistra tende a  $+\infty$  e la derivata destra tende a  $-\infty$ , si ha una cuspidi rivolta verso il basso; se la derivata sinistra tende a  $-\infty$  e la derivata destra tende a  $+\infty$ , si ha una cuspidi rivolta verso l'alto.



## Esempio

La funzione  $f(x) = \sqrt{|x|} + 1$  (si ricordi che tale funzione è la traslazione di un vettore di lunghezza 1 lungo y della funzione  $f(x) = \sqrt{|x|}$  detta parabola di Neile) presenta una cuspidi nel punto di ascissa 0.

Infatti:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$$
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty$$



# Punti di non derivabilità: flessi

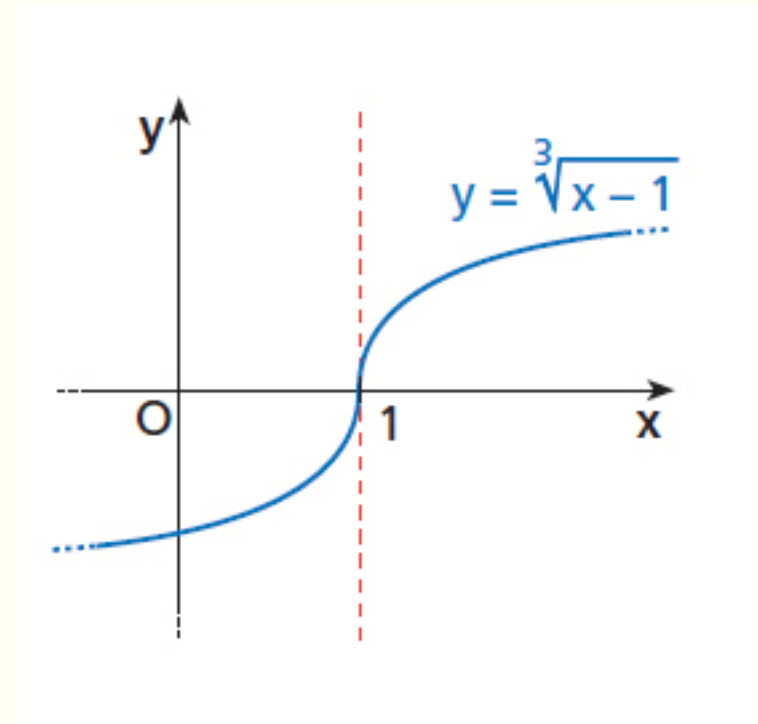
---

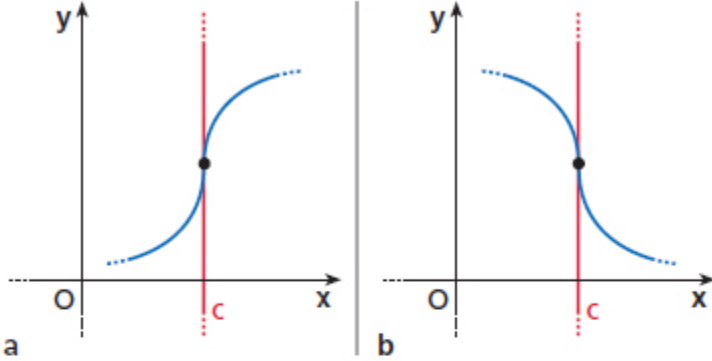
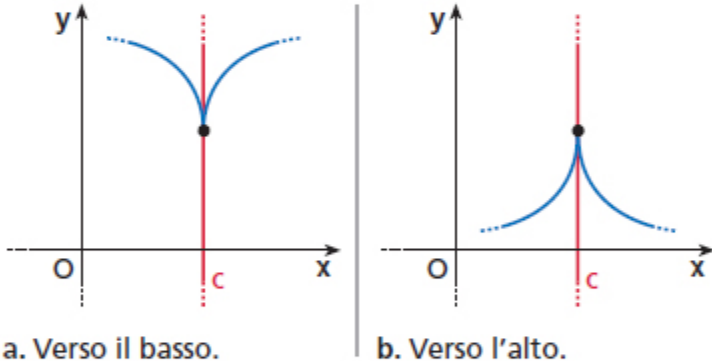
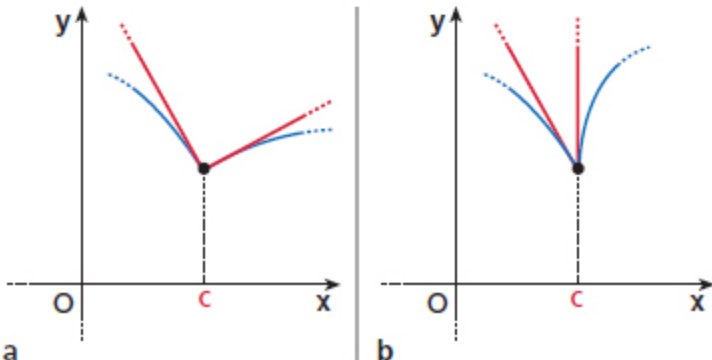
Se i limiti sinistro e destro tendono entrambi a  $+\infty$  si ha un **flesso a tangente verticale**.

**In particolare:**

Se  $f'(x) = +\infty$  allora  $x_0$  è un flesso a tangente verticale crescente.

Se  $f'(x) = -\infty$  allora  $x_0$  è un flesso a tangente verticale decrescente.



Punti di non derivabilità	Grafico	Derivata
Flesso a tangente verticale	 <p>a</p> <p>b</p>	<p>a) <math>f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty</math></p> <p>b) <math>f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty</math></p>
Cuspide	 <p>a. Verso il basso.</p> <p>b. Verso l'alto.</p>	<p>a) <math>f'_-(c) = -\infty, \quad f'_+(c) = +\infty</math></p> <p>b) <math>f'_-(c) = +\infty, \quad f'_+(c) = -\infty</math></p>
Punto angoloso	 <p>a</p> <p>b</p>	<p><math>f'_-(c) \neq f'_+(c)</math></p> <p>a) entrambe finite</p> <p>b) una finita, l'altra infinita</p>

# Derivate fondamentali

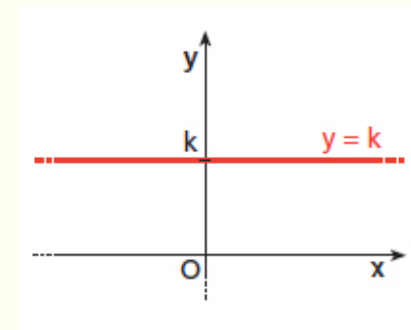
## Teorema

La derivata di una costante è 0

## Dimostrazione

Ricordando che se  $f(x) = k$  anche  $f(x + h) = k$ , calcoliamo  $f'(x)$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = 0$$



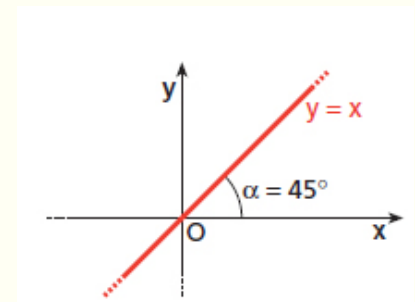
## Teorema

La derivata di una funzione  $f(x) = x$  è  $f'(x) = 1$

## Dimostrazione

Se  $f(x) = x$ , risulta  $f(x + h) = x + h$ , calcoliamo  $f'(x)$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$



# Derivate fondamentali

---

---

## Teorema

La derivata di  $x^2$  è  $2x$ .  $D(x^2) = 2x$

## Dimostrazione

$$\begin{aligned} D(x^2) &= \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x \end{aligned}$$

## Teorema

La derivata di  $e^x$  è  $e^x$ .  $D(e^x) = e^x$

## Dimostrazione

$$\begin{aligned} D(e^x) &= e^x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\ &= e^x \end{aligned}$$

## Teorema

La derivata di  $\text{sen } x$  è  $\text{cos } x$ .  $D(\text{sen } x) = \text{cos } x$

## Dimostrazione

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+\Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \cdot \text{cos } \Delta x + \text{cos } x \cdot \text{sen } \Delta x - \text{sen } x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen } x \cdot (1 - \text{cos } \Delta x) + \text{cos } x \cdot \text{sen } \Delta x}{\Delta x}$$

Ricordando che per le formule di duplicazione si ha:

$$\text{sen} \left( \frac{x}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } x}{2}} \Rightarrow 1 - \text{cos } x = 2 \text{sen}^2 \left( \frac{x}{2} \right)$$

Si ha, dunque, che

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen } x \cdot (1 - \text{cos } \Delta x) + \text{cos } x \cdot \text{sen } \Delta x}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\text{sen } x \cdot \left( 2 \text{sen}^2 \left( \frac{\Delta x}{2} \right) \right)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{cos } x \cdot \text{sen } \Delta x}{\Delta x} = \\ &= -\text{sen } x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 \left( \frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} + \text{cos } x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

Ricorrendo, pertanto ai limiti notevoli possiamo scrivere:

$$-\text{sen } x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{sen} \left( \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\text{sen} \left( \frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} + \text{cos } x \cdot 1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\text{sen } x \cdot 0 \cdot 1 + \text{cos } x = \text{cos } x$$

## Teorema

$$D(\log_b x) = \frac{1}{x \ln b}$$

### Dimostrazione

$$\begin{aligned} D(\log_b x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_b(x + \Delta x) - \log_b x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_b \frac{x + \Delta x}{x} \end{aligned}$$

Applicando ancora le proprietà dei logaritmi si ha:

$$D(\log_b x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_b \left( \frac{x + \Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_b \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

Applicando il limite notevole

$$\lim_{z \rightarrow 0} (1 + \theta z)^{\frac{1}{z}} = e^\theta$$

Si ricava:

$$D(\log_b x) = \log_b e^{\frac{1}{x}} = \frac{\log_b e}{x} = \frac{1}{x \ln b}$$

# Teorema sulla derivabilità di una combinazione lineare di funzioni

---

---

Se le due funzioni  $f$  e  $g$ , entrambe definite nello stesso sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}$ , sono derivabili nel punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ , per ogni coppia di costanti  $a$  e  $b$ , anche la funzione combinazione lineare  $af + bg$  è derivabile in  $x_0 \in \mathbb{R}$  e si ha:

$$(af + bg)'(x_0) = af'(x_0) + bg'(x_0)$$

In particolare se  $f$  è derivabile in  $x_0$  e  $a$  è una costante, anche la funzione  $af$  è derivabile in  $x_0$  e si ha  $(af)'(x_0) = af'(x_0)$

## Dimostrazione

Basta osservare che  $\forall x \in X - \{x_0\}$  si ha:

$$\frac{af(x) + bg(x) - (af(x_0) + bg(x_0))}{x - x_0} = a \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + b \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

e passare al limite per  $x$  che tende a  $x_0$

# Teorema sulla derivabilità del prodotto di due funzioni

---

---

Se le due funzioni  $f$  e  $g$ , entrambe definite nello stesso sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}$ , sono derivabili nel punto  $x_0$ , anche la funzione prodotto  $f \cdot g$  è derivabile in  $x_0$  e si ha:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

## Teorema sulla derivabilità del quoziente di due funzioni

## Teorema sulla derivabilità di una funzione composta



# Teorema di Rolle

*Sia  $f$  una funzione reale continua nell'intervallo chiuso e limitato  $[a;b]$ , derivabile in tutti i punti ad esso interni. Allora, se  $f(a) = f(b)$  esiste almeno un punto  $\xi$  interno ad  $[a;b]$  tale che  $f'(\xi) = 0$*

**Dimostrazione** (La dimostrazione del teorema di Rolle è dovuta a U. Dini e risale al 1878)

Distinguiamo due casi.

Se  $f$  è costante, il teorema è banalmente vero in quanto la derivata di  $f$  si annulla ovunque

Se  $f$  non è costante, essendo continua, a norma del teorema di Weierstass,  $f$  è dotata in  $[a;b]$  di minimo e di massimo; siano  $x_m$  e  $x_M$  tali punti. Di tali punti almeno uno è interno ad  $[a;b]$ ; infatti se ciò non fosse, dovrebbe essere  $f(a)=f(b)$  e dunque la funzione sarebbe costante. Supponiamo che sia  $x_m$  interno ad  $[a;b]$ . E' facile verificare che  $f'(x_m)=0$ . Infatti, poiché la  $f$  in  $x_m$  assume valore minimo, si ha  $f(x) \geq f(x_m)$  e quindi il rapporto

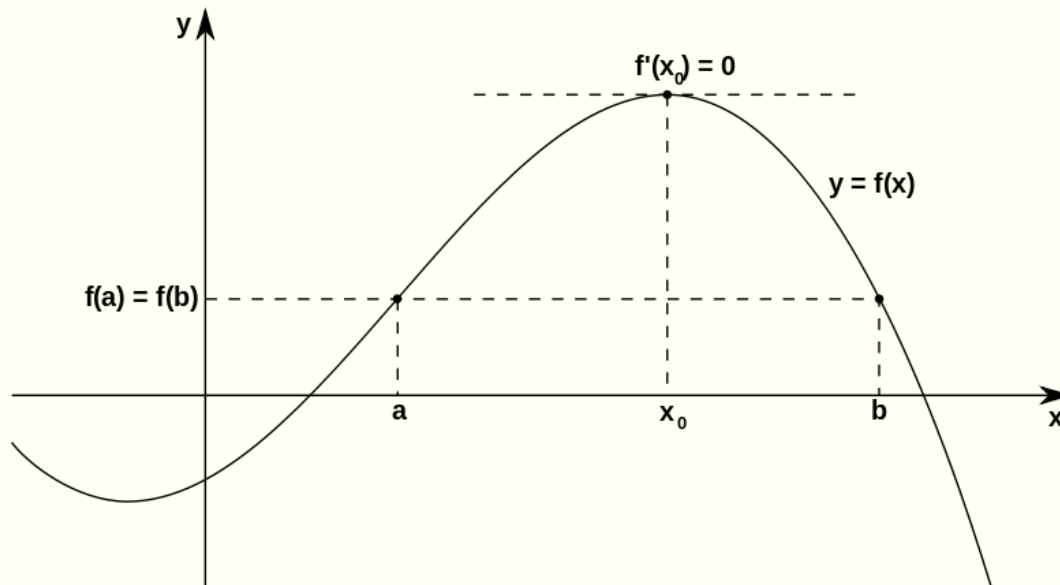
$$\frac{f(x) - f(x_m)}{x - x_m} \quad \begin{cases} \geq 0, \forall x > x_m \\ \leq 0, \forall x < x_m \end{cases}$$

Conseguentemente, in virtù del teorema della permanenza del segno, il limite per  $x$  che tende a  $x_m$  di tale rapporto ovvero  $f'(x_m)=0$

# Significato geometrico del teorema di Rolle

---

Dal punto di vista geometrico, se un arco di curva continua è dotata di retta tangente in ogni suo punto, esclusi al più gli estremi, ed ha uguali le coordinate degli estremi, allora esiste almeno un punto interno all'arco in cui la tangente è parallela all'asse  $x$ .



## Teorema di Lagrange o del valor medio

---

---

*Sia  $f$  una funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato  $[a;b]$ , derivabile in tutti i punti ad esso interni, allora esiste almeno un punto  $\xi$  interno ad  $[a;b]$  nel quale si verifica l'uguaglianza*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

### **Dimostrazione:**

Si consideri la retta passante per i punti  $(f;f(a))$  e  $(b;f(b))$ . L'equazione di tale retta può essere scritta come:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Si può pertanto considerare la funzione ausiliaria:

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

avendo indicato  $y=f(x)$ .

La funzione così definita è continua in  $[a;b]$ , ivi derivabile, così come  $f(x)$ . Conseguentemente, a norma del teorema di Rolla esiste almeno un punto  $\xi$  interno ad  $[a;b]$  tale che

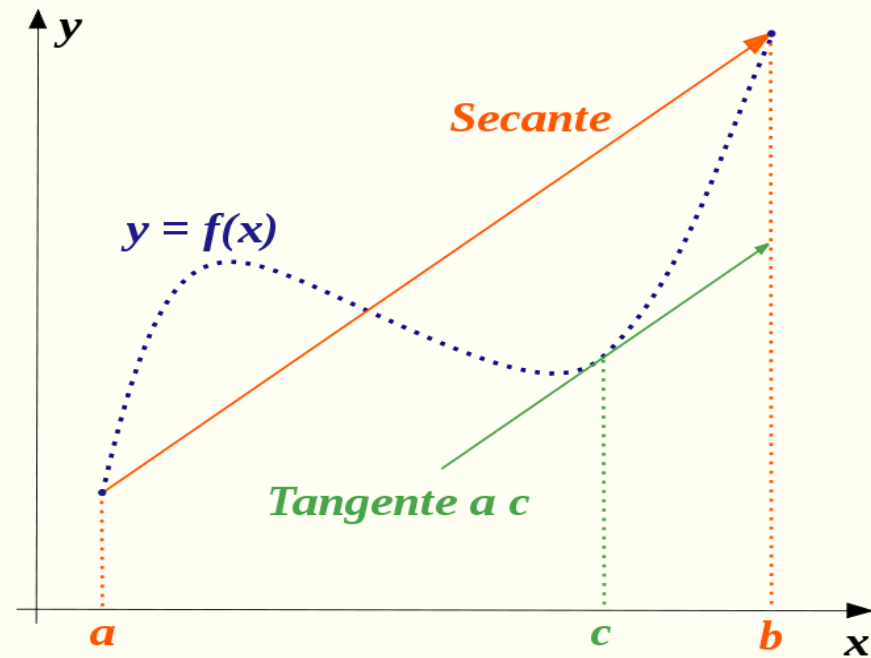
$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

# Significato geometrico del teorema di Lagrange

---

Presso alcuni autori, la formula di Lagrange viene detta di Cavalieri cui risale l'osservazione geometrica:

Se un arco di curva continua è dotato di tangente in ogni suo punto, esclusi al più gli estremi, esiste almeno un punto interno all'arco nel quale la tangente è parallela alla corda che congiunge i punti estremi dell'arco. Da notare che se  $f(a)=f(b)$  si ricade nel teorema di Rolle, concordemente con la situazione geometrica secondo la quale la congiungente  $(f;f(a))$  e  $(b;f(b))$  è in tal caso parallela all'asse  $x$



# Teorema di Cauchy o degli incrementi finiti

---

---

Se  $f$  e  $g$  sono due funzioni reali continue nell'intervallo chiuso e limitato  $[a;b]$ , derivabili nei punti ad esso interni, esiste almeno un punto  $\xi$  interno ad  $[a;b]$  per il quale si verifica l'uguaglianza

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

sempre che  $g(a) \neq g(b)$ , con  $g'(x) \neq 0, \forall x \in ]a, b[$

Si conduce in modo analogo a quella del teorema di Lagrange, considerando la funzione ausiliaria

$$\varphi(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)))$$

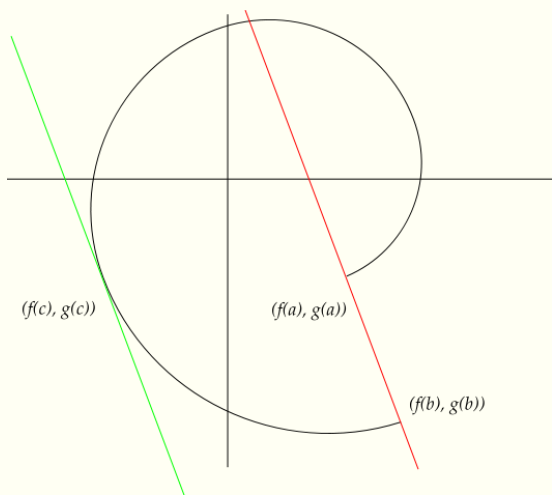
Annullando la derivata di  $\varphi$  in un punto  $\xi \in ]a;b[$  e dividendo per  $g(b)-g(a)$  e per  $g'(\xi)$ , si ottiene l'uguaglianza voluta.

# Significato geometrico del teorema di Cauchy

---

Geometricamente l'uguaglianza espressa col teorema di Cauchy dice che se una curva piana è dotata ovunque di retta tangente tra due suoi punti  $a$  e  $b$ , allora almeno una di queste rette tangenti è parallela alla corda  $AB$ .

Questa proprietà vale non soltanto quando la curva è il grafico di una funzione, ma anche per curve, più in generale, come quella della figura.



Si noti che il teorema di Cauchy restituisce quello di Lagrange ponendo  $g(x)=x$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . In tal caso, infatti, si ha  $g'(x)=1$  e  $g(b)-g(a)=b-a$

# Teorema di Fermat (sulle funzioni con derivata nulla)

---

---

Una funzione definita su un intervallo aperto  $I = (a, b)$ , ivi derivabile e con derivata nulla in ogni punto di tale intervallo è una costante.

## Dimostrazione

Basta osservare che, a norma del teorema di Lagrange, per ogni coppia di punti  $x_1$  e  $x_2$  di  $I$  si ha:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$$

Essendo  $f'(x) = 0 \forall x \in I$ , e quindi  $f(x_2) = f(x_1)$

# Funzioni crescenti e decrescenti

---

Se  $f$  è una funzione reale definita nella parte  $X$  di  $\mathbb{R}$ , si può constatare che essa è crescente oppure decrescente in  $X$  (che soddisfa cioè alla condizione  $f(x') \leq f(x'')$  oppure all'altra  $f(x') \geq f(x'')$  per ogni coppia  $(x', x'')$  di punti di  $X$  tali che  $x' < x''$ ) se e solo se essa verifica rispettivamente la prima o la seconda delle seguenti uguaglianze

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \geq 0 \qquad \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \leq 0$$

per ogni coppia  $(x', x'')$  di punti di  $X$  con  $x' < x''$ .

Analogamente  $f$  è strettamente crescente o strettamente decrescente in  $X$  se e solo se essa soddisfa rispettivamente alla prima o alla seconda delle disuguaglianze strette

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} > 0 \qquad \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} < 0$$

per ogni coppia  $(x', x'')$  di punti di  $X$  con  $x' < x''$ .



---

---

## CONDIZIONE NECESSARIA PER LA MONOTONIA

**Teorema:** sia  $f$  una funzione reale definita nel sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}$ . Allora, se  $f$  è monotona crescente in  $X$  (risp. monotona decrescente in  $X$ ), necessariamente si ha  $f'(x) \geq 0$  (risp.  $f'(x) \leq 0$ ) in ogni punto di  $X$  nel quale la  $f$  sia dotata di derivata

## CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA MONOTONIA

**Teorema:** sia  $f$  una funzione reale definita nel sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}$  e ivi derivabile. Allora basta che si abbia  $f'(x) \geq 0$  (risp.  $f'(x) \leq 0$ )  $\forall x \in X$ , perché la  $f$  sia crescente (risp. decrescente) in  $X$

# Condizione necessaria per l'esistenza di un minimo o massimo relativo

---

**Teorema:** sia  $f$  una funzione reale definita nella parte  $X$  di  $\mathbb{R}$  e  $x_0$  un punto di  $X$  di accumulazione a sinistra (risp. a destra) per  $X$ , nel quale la  $f$  sia dotata di derivata sinistra (risp. destra).

Allora, se  $f$  ha in  $x_0$  un minimo relativo, necessariamente si ha  $f'_-(x_0) \leq 0$  (risp.  $f'_+(x_0) \geq 0$ ); mentre se  $f$  ha in  $x_0$  un massimo relativo, necessariamente si ha  $f'_-(x_0) > 0$  (risp.  $f'_+(x_0) \leq 0$ ).

Se  $x_0$  è di accumulazione per  $X$  sia sinistra che a destra, in particolare interno a  $X$  e la  $f$  è dotata in  $x_0$  sia di derivata sinistra che destra, le condizioni precisate su tali derivate si devono verificare simultaneamente. Conseguentemente, se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , sia che essa abbia in  $x_0$  un minimo relativo sia che abbia un massimo relativo, necessariamente si ha  $f'(x_0) = 0$

# Condizione sufficiente per l'esistenza di un minimo o massimo relativo

---

**Teorema:** sia  $f$  una funzione reale definita nella parte  $X$  di  $\mathbb{R}$ . Allora, se  $x_0$  è un punto di  $X$  per esso di accumulazione solo a destra e  $f$  è dotata di derivata in  $x_0$  a seconda che si abbia  $f'(x_0) > 0$  oppure  $f'(x_0) < 0$ ,  $f$  ha in  $x_0$  un minimo oppure un massimo relativo in senso stretto.

Se  $x_0$  è di accumulazione per  $X$  solo a sinistra e  $f$  è dotata di derivata in  $x_0$ , a seconda che si abbia  $f'(x_0) > 0$  oppure  $f'(x_0) < 0$ ,  $f$  ha un massimo oppure un minimo relativo in senso stretto.

Se  $x_0$  è di accumulazione per  $X$  sia a sinistra che a destra e  $f$  è dotata in  $x_0$  di derivate sinistra e destra, se  $f'_-(x_0) > 0$  e  $f'_+(x_0) < 0$   $f$  ha un massimo relativo in senso stretto, mentre se  $f'_-(x_0) < 0$  e  $f'_+(x_0) > 0$ ,  $f$  ha un minimo relativo in senso stretto.

# Criterio di monotonia

---

---

## Teorema

Sia  $f$  una funzione continua in  $[a,b]$  e derivabile in  $(a,b)$ . Allora:

$$f'(x_0) \geq 0, \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f \text{ è } \textit{crescente} \text{ in } [a, b];$$

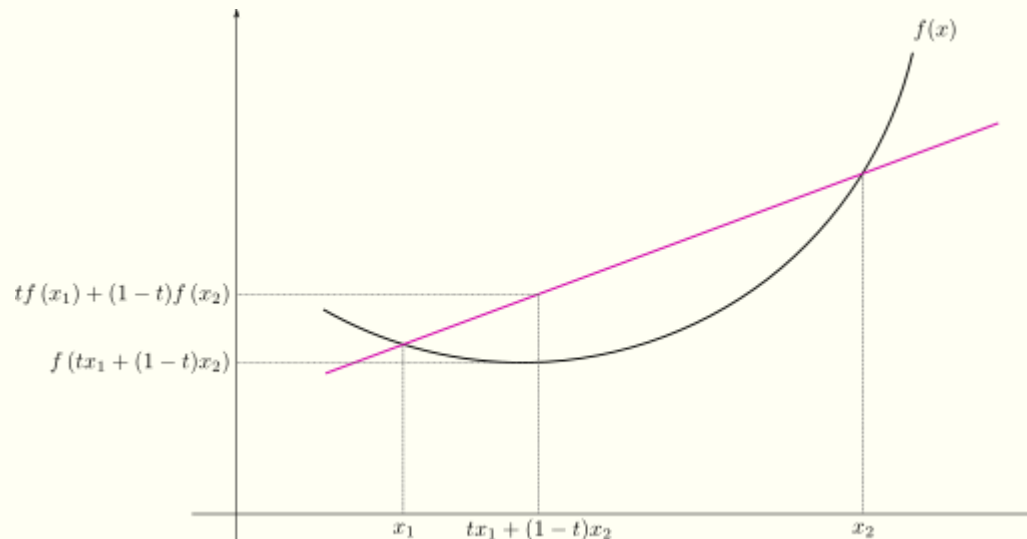
$$f'(x_0) \leq 0, \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f \text{ è } \textit{decescente} \text{ in } [a, b];$$

# Funzioni convesse e concave

---

Una funzione reale  $f$  definita in un intervallo  $X$  di  $\mathbb{R}$  dicesi convessa (risp. concava) in  $X$  quando per ogni coppia  $(x', x'')$  di punti di  $X$ , con  $x' < x''$ , tutti i punti del diagramma di  $f$  di ascissa  $x \in ]x', x''[$  sono al di sotto (risp. al di sopra) della retta congiungente  $(x', f(x'))$  con  $(x'', f(x''))$ .

Se questa proprietà geometrica si verifica in senso stretto,  $f$  si dice strettamente convessa (risp. strettamente concava)



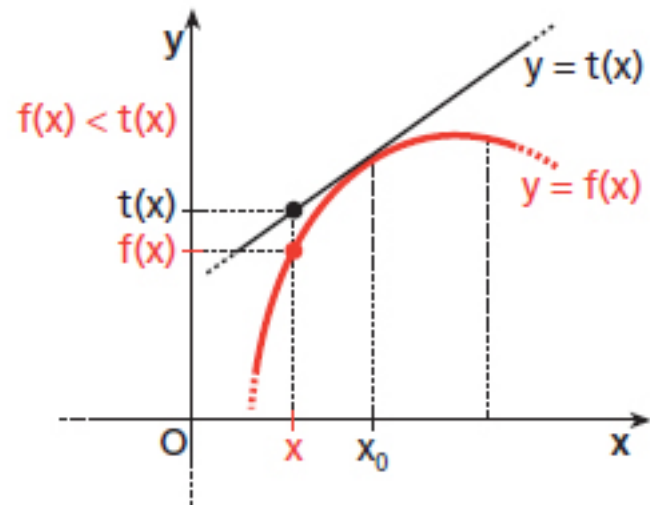
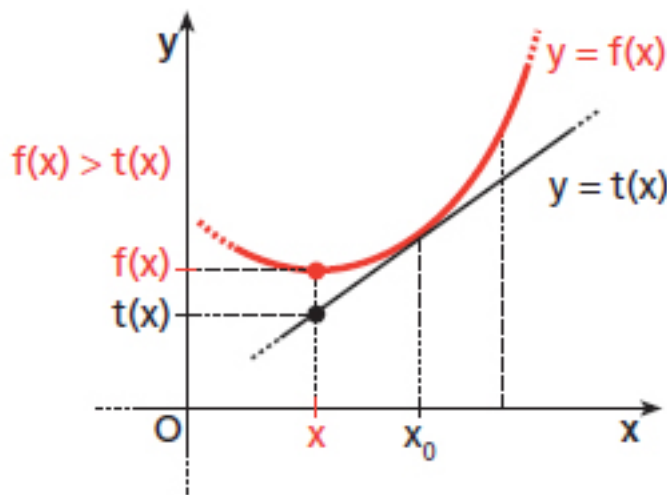
# Caratterizzazione delle funzioni convesse o concave derivabili

Sia  $f$  una funzione reale definita nell'intervallo  $X$  di  $\mathbb{R}$  e ivi derivabile. Allora  $f$  è convessa o concava in  $X$  se e solo se,  $\forall x_0 \in X$ , il diagramma  $G$  di  $f$  è al di sopra oppure al di sotto della retta tangente a  $G$  in  $P_0(x_0, f(x_0))$  o, ciò che è lo stesso, se e solo se  $\forall x_0 \in X$  si verifica la disuguaglianza

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in X$$

oppure l'opposta.

Se  $f$  è strettamente convessa o strettamente concava in  $X$  se e solo se ciascuna delle suddette condizioni si verifica in senso stretto



# Caratterizzazione delle funzioni convesse e concave derivabili due volte

---

Sia  $f$  una funzione reale definita nell'intervallo  $X$  di  $\mathbb{R}$ , ivi derivabile due volte. Allora  $f$  è convessa o concava in  $X$  se e solo se  $\forall x \in X$  si ha  $f''(x) \geq 0$  oppure  $f''(x) \leq 0$ .

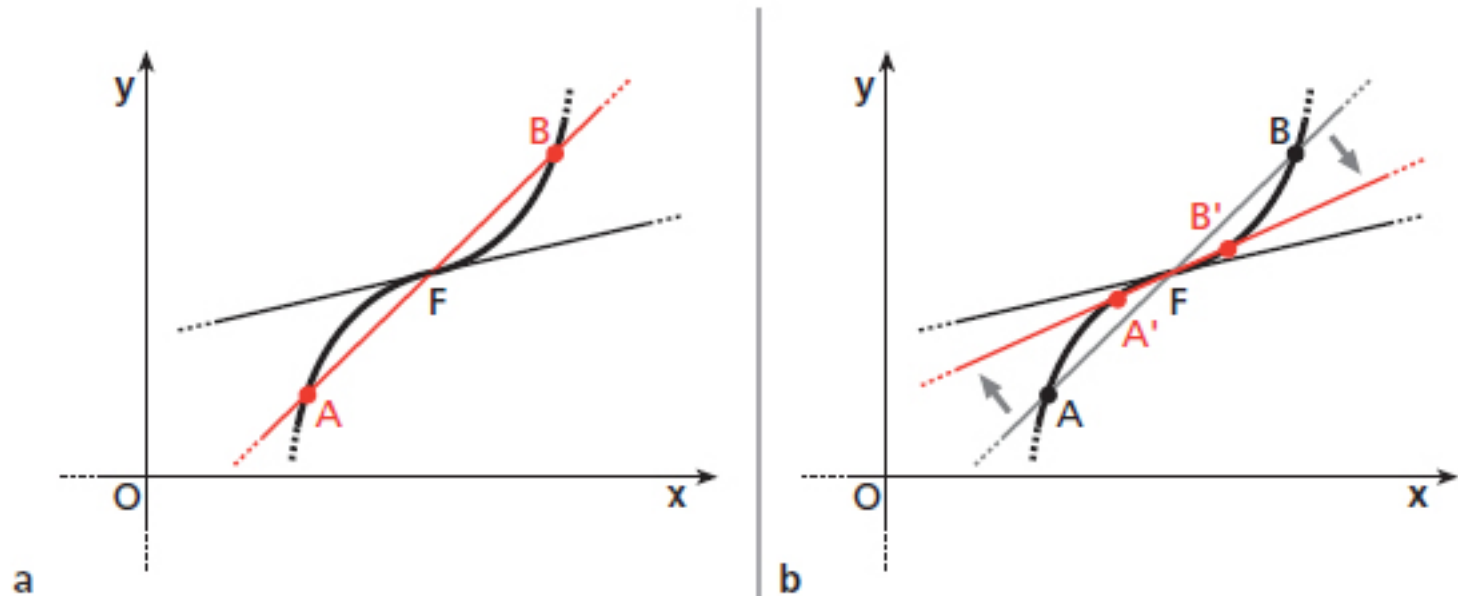
$f$  è strettamente convessa o strettamente concava in  $X$  se e solo se  $\forall x \in X$  si ha  $f''(x) \geq 0$  oppure  $f''(x) \leq 0$  e non esiste nessun intervallo incluso in  $X$  nel quale la  $f''$  sia identicamente nulla.

# Punti di flesso

## Definizione

Sia  $f$  una funzione reale derivabile nel punto  $x_0$  del suo insieme di definizione  $X$ . Si dice che il diagramma  $G$  di  $f$  ha un flesso nel punto  $P_0(x_0, f(x_0))$  se, comunque si consideri un intorno  $I$  di  $x_0$ , vi sono punti di  $G$ , diversi da  $P_0$  e di ascissa  $x \in I$  sia strettamente al di sopra sia strettamente al di sotto della retta tangente a  $G$  in  $P_0$ .

Se  $G$  ha in  $P_0$  un flesso,  $P_0$  si dice anche punto di flesso per  $G$  e la tangente in  $P_0$  a  $G$  si dice tangente di flesso.





# Teorema di l'Hospital

---

Quando il limite di un rapporto  $f(x)/g(x)$  si presenta nella forma indeterminata  $0/0$  o  $\infty/\infty$ , si può, agendo sul rapporto  $f(x)/g(x)$ , tentare di togliere l'indeterminazione e ricondurre il calcolo del limite a limiti noti.

## Teorema

Siano  $I$  un intervallo,  $x_0$  un punto di accumulazione per  $I$ , al finito o no,  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni reali definite in tutto  $I$  il punto  $x_0$  al più escluso e ivi derivabili. Atteso che  $\forall x \in I$ , con  $x \neq x_0$ , se  $x_0 \in \mathbb{R}$  si abbia  $g(x) \neq 0$  e  $g'(x) \neq 0$  si considerino i rapporti

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

e si supponga che il limite per  $x \rightarrow x_0$  del primo di essi si presenti nella forma indeterminata  $0/0$  o  $\infty/\infty$ . Allora, se esiste il limite per  $x \rightarrow x_0$  del secondo di tali rapporti, esiste anche il limite del primo e sussiste l'uguaglianza

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$