Parte 1. Sistemi lineari, algoritmo di Gauss, matrici

A. Savo − Appunti del Corso di Geometria 2013-14

Indice delle sezioni

1 Brevi richiami sugli insiemi, 1
2 Insiemi numerici, 3
3 L'insieme $\mathbf{R}^n$, 4
4 Equazioni lineari, 4
5 Sistemi di equazioni lineari, 8
6 Sistemi e matrici, 9
7 Sistemi lineari a scalini, 11
8 Algoritmo di Gauss, 15
9 Serie di esempi, 16
10 Le matrici, 19
11 Somma e moltiplicazione per uno scalare, 20
12 Matrici quadrate di tipo speciale, 22
13 Prodotto di matrici (righe per colonne), 24
14 Matrice identità, matrici invertibili, 27

1 Brevi richiami sugli insiemi

Se A è un insieme la notazione

$$x \in A$$

indica che x appartiene ad A.

Esempio Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ allora $2 \in A$ mentre $6 \notin A$.

Gli elementi di un dato insieme sono descritti in un'espressione fra parentesi graffe. Nell'esempio precedente, gli elementi di A sono precisamente i numeri $1, 2, 3, 4$ (A è quindi un insieme *finito*, cioè costituito da un numero finito di elementi, in questo caso quattro). Diamo un altro esempio. Se $\mathbf{R}$ indica l'insieme dei numeri reali, allora

$$A' = \{x \in \mathbf{R} : 1 \leq x \leq 2\},$$

si legge: "A' è l'insieme di tutti i numeri reali tali che $1 \leq x \leq 2$". Notiamo che A' è un insieme *infinito* (cioè, costituito da un numero infinito di elementi).

• Se A e B sono insiemi, diremo che A *è un sottoinsieme di* B, o che A è *contenuto in* B, se ogni elemento di A è anche elemento di B; in tal caso scriveremo:

$$A \subseteq B.$$

Ad esempio $\{1, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$.

• È evidente che, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, allora $A = B$, cioè A e B hanno esattamente gli stessi elementi. Questo è il cosiddetto *Principio della doppia inclusione,* spesso usato per dimostrare l'uguaglianza di due insiemi.

• Se A e B sono insiemi, $A \cap B$ denota l'insieme *intersezione* di A e B, formato dagli elementi comuni ad A e B, cioè da quegli elementi che appartengono sia ad A che a B. È evidente che $A \cap B$ è contenuto sia in A che in B.

• Se A e B sono insiemi, $A \cup B$ denota l'insieme *unione* di A e B, cioè l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad A oppure a B (o a entrambi). È evidente che $A \cup B$ *contiene* sia A che B.

Esempio Poniamo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Allora $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ mentre $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Esempio Poniamo $A' = \{a, b\}, B' = \{c, d\}$. Allora $A' \cap B' = \emptyset$ (insieme vuoto).

• L'insieme *vuoto* è l'insieme privo di elementi: si denota con $\emptyset$.

Esercizio Siano $A = \{x \in \mathbf{R} : -2 \leq x \leq 4\}, B = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$. Determinare $A \cup B$ e $A \cap B$.

Esercizio a) Dimostrare che, se $A \subseteq B$, allora $A \cap B = A$.

b) Dimostrare che, se $A \cap B = A$, allora $A \subseteq B$.

Osserviamo che dimostrare sia a) che b) equivale a dimostrare:

$$A \subseteq B \text{ se e solo se } A \cap B = A.$$

Il "se e solo se" indica l'equivalenza logica delle due affermazioni.

Esercizio Dimostrare che $A \subseteq B$ se e solo se $A \cup B = B$.

2 Insiemi numerici

Il termine *numero* si riferisce sempre a un numero *reale,* a meno che non indicato altrimenti. Non daremo la definizione rigorosa di numero reale; in ogni modo ricordiamo che un numero reale si rappresenta, nella scrittura decimale, da una parte intera seguita, dopo la virgola, da un numero (eventualmente illimitato) di cifre decimali.

Come già osservato, l'insieme dei numeri reali si denota con il simbolo $\mathbf{R}$. Oltre a $\mathbf{R}$, ricordiamo i principali insiemi numerici:

- L'insieme dei numeri naturali: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- L'insieme dei numeri interi : $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- L'insieme dei numeri razionali: $\mathbf{Q} = \left\{\dfrac{m}{n} : m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\right\}$. Possiamo sempre supporre che gli interi m ed n siano privi di fattori primi comuni (che possiamo infatti eliminare con la divisione): ad esempio $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ e in quest'ultima espressione m ed n non hanno fattori comuni.

Si ha che:

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}.$$

Notiamo che vi sono numeri reali che non sono razionali, ad esempio $\sqrt{2}, \pi$. I numeri reali, non razionali, si dicono *irrazionali.* In un certo senso (che si può rendere rigoroso) i numeri irrazionali sono *molti di più* dei numeri razionali; in particolare, i numeri irrazionali costituiscono un insieme infinito. Possiamo facilmente dimostrare l'esistenza di almeno *un* numero irrazionale.

Proposizione *$\sqrt{2}$ è un numero irrazionale.*

Dimostrazione. La dimostrazione si fa per assurdo. Supponiamo che

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

con m, n interi e $n \neq 0$. Possiamo assumere che m ed n non hanno fattori primi comuni: quindi almeno uno fra m e n è un numero dispari.

Dall'ipotesi otteniamo:

$$2n^2 = m^2.$$

Il numero m^2 è pari, e quindi anche m è pari, cioè $m = 2h$ per qualche intero h. Dunque $m^2 = 4h^2$ e

$$2n^2 = 4h^2,$$

cioè $n^2 = 2h^2$ deve essere pari. Ma allora n deve essere anch'esso pari, e questo è impossibile, poichè altrimenti m ed n sono entrambi pari, contraddicendo l'ipotesi. $\square$

Corollario *La lunghezza della diagonale di un quadrato di lato unitario è un numero irrazionale.*

3 L'insieme $\mathbf{R}^n$

Definiamo $\mathbf{R}^n$ come l'insieme delle $n-$ple ordinate di numeri reali. Le possiamo scrivere verticalmente, come colonne:

$$\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\}.$$

Ad esempio, $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ sono elementi di $\mathbf{R}^2$, mentre $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$. Gli elementi di $\mathbf{R}^n$ saranno in seguito chiamati *vettori colonna.* Spesso sarà utile scrivere tali $n-$ple orizzontalmente, e diremo dunque che $(x_1, \dots, x_n)$ è un *vettore riga* di $\mathbf{R}^n$.

4 Equazioni lineari

4.1 Equazioni lineari in una variabile (o incognita)

Sono del tipo:

$$ax = b,$$

dove x è la variabile e $a, b \in \mathbf{R}$ sono numeri reali assegnati. Una soluzione dell'equazione è un numero reale $\bar{x}$ che, sostituito a x, soddisfa l'equazione: $a\bar{x} = b$. Risolvere l'equazione significa trovare tutte le sue soluzioni (se esistono).

Esempio L'equazione $2x = 3$ ammette l'unica soluzione $x = \frac{3}{2}$, ottenuta dividendo ambo i membri per 2 (oppure, moltiplicando ambo i membri per 2^{-1}).

Esempio L'equazione $0x = 1$ non ammette soluzioni.

In generale, l'equazione $ax = b$ si discute in questo modo:

- Se $a \neq 0$ si ha un'unica soluzione: $x = a^{-1}b$.
- Se $a = 0$ e $b = 0$ ogni numero è soluzione.
- Se $a = 0$ e $b \neq 0$ non ci sono soluzioni.

4.2 Equazioni lineari in due variabili

Denotiamo con x, y le due variabili. Si ha:

$$ax + by = c$$

con $a, b, c \in \mathbf{R}$. I numeri a, b sono detti i *coefficienti* , mentre c è detto il *termine noto.* Una soluzione è una coppia ordinata di numeri reali che soddisfa l'equazione data. Scriveremo una soluzione come un elemento di $\mathbf{R}^2$, diciamo $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$: dunque si deve avere

$$a\bar{x} + b\bar{y} = c.$$

Vediamo ora come risolvere questo tipo di equazioni. Se i coefficienti a, b non sono entrambi nulli avremo sempre infinite soluzioni.

Esempio Risolviamo l'equazione lineare in due variabili seguente:

$$x + 3y = 5.$$

Soluzione. Possiamo scrivere $x = 5 - 3y$ e in corrispondenza di un valore assegnato a y abbiamo una soluzione. Infatti, se poniamo $y = t$ abbiamo:

$$x = 5 - 3t$$

e quindi l'insieme delle soluzioni è dato da $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = t \end{cases}$ con t parametro reale. Osserviamo che una soluzione è un elemento di $\mathbf{R}^2$, e possiamo scrivere l'insieme delle soluzioni nel modo seguente:

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 5 - 3t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}.$$

In particolare, abbiamo infinite soluzioni (una per ogni valore di t scelto). Ad esempio $t = 0$ dà la soluzione $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ mentre $t = 2$ dà la soluzione $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, e cosi' via. Diremo che in questo caso abbiamo *infinito alla uno* soluzioni (in breve ∞^1 soluzioni) perchè l'insieme delle soluzioni dipende da un solo parametro. È chiaro che, se c'è almeno un coefficiente diverso da zero, ogni equazione lineare in due variabili ammette ∞^1 soluzioni. $\square$

4.3 Equazioni lineari in numero arbitrario di variabili

Siano $x_1, \dots, x_n$ variabili reali. Discutiamo l'equazione:

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

dove $a_1, \dots, a_n$ sono i *coefficienti* dell'equazione e b è il *termine noto.* Una soluzione è una $n-$pla ordinata di numeri che, sostituiti alle variabili, soddisfano l'equazione.

Osservazione Se almeno uno dei coefficienti è diverso da zero abbiamo sempre infinite soluzioni. Più precisamente l'equazione ammette ∞^{n-1} soluzioni, nel senso che l'insieme delle soluzioni dipende da $n-1$ parametri indipendenti. Possiamo procedere in questo modo:

- Supponiamo che $a_i \neq 0$. Assegnamo a piacere i valori delle variabili diverse da x_i (in numero, sono $n-1$) e risolviamo rispetto a x_i.

Esempio Discutiamo l'equazione nelle variabili x, y, z:

$$S : x + y - 3z = 2$$

Soluzione. Il coefficiente di x è diverso da zero; dunque, fissando a piacere i valori delle variabili y, z e risolvendo rispetto a x si ottiene una soluzione. Ponendo $y = t_1, z = t_2$ si ha

$$x = -t_1 + 3t_2 + 2.$$

Otteniamo dunque ∞^2 soluzioni, date dalle terne del tipo:

$$\begin{cases} x = -t_1 + 3t_2 + 2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases}$$

al variare di t_1, t_2 in $\mathbf{R}$. Scriveremo dunque

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} -t_1 + 3t_2 + 2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbf{R} \right\}. \tag{1}$$

Il calcolo è terminato.

Osserviamo però che potevamo procedere diversamente: anche il coefficiente della y è diverso da zero, dunque possiamo assegnare a x e z valori fissati $x = s_1, z = s_2$ e ottenere $y = -x + 3z + 2 = -s_1 + 3s_2 + 2$. In conclusione, le soluzioni saranno

$$\begin{cases} x = s_1 \\ y = -s_1 + 3s_2 + 2 \\ z = s_2 \end{cases}$$

al variare di s_1, s_2, e le possiamo scrivere in forma vettoriale:

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ -s_1 + 3s_2 + 2 \\ s_2 \end{pmatrix} : s_1, s_2 \in \mathbf{R} \right\}. \tag{2}$$

Sembrerebbe che, guardando le espressioni (1) e (2), abbiamo ottenuto risultati diversi: in realtà entrambe le procedure sono corrette, e gli insiemi infiniti a secondo membro delle espressioni (1) e (2) sono infatti *uguali,* sebbene presentati (o *parametrizzati*) in modo diverso. In altre parole, si può verificare che ogni terna del primo insieme appartiene anche al secondo, e viceversa. Ad esempio, scegliendo $t_1 = 1, t_2 = 2$ in (1) otteniamo la soluzione $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; tale terna si ottiene anche dalla (2) per i valori $s_1 = 7, s_2 = 2$. $\square$

Esempio Risolvere l'equazione lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$2x_1 + x_2 - 3x_4 = 7$$

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che il coefficiente di x_3 è nullo: in effetti, l'equazione si può riscrivere $2x_1 + x_2 + 0x_3 - 3x_4 = 7$, mostrando che x_3 è, per cosi' dire, una variabile "fantasma", che può assumere qualunque valore, senza alterare l'equazione.

In ogni modo, il coefficiente di x_2 è non nullo e possiamo risolvere rispetto a x_2. Poniamo $x_1 = t_1, x_3 = t_2, x_4 = t_3$ e otteniamo quindi le soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = -2t_1 + 3t_3 + 7 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = t_3 \end{cases}$$

ala variare di t_1, t_2, t_3: troviamo, com'era naturale, ∞^3 soluzioni.

Infine scriviamo, come al solito, l'insieme delle soluzioni in forma vettoriale (siamo in $\mathbf{R}^4$):

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ -2t_1 + 3t_3 + 7 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R} \right\}.$$

$\square$

In conclusione, conviene ricordare che

- Un'equazione lineare in n incognite, in cui almeno uno dei coefficienti è non nullo, ammette sempre ∞^{n-1} soluzioni.

5 Sistemi di equazioni lineari

Vediamo di risolvere il seguente problema:

- trovare due numeri aventi somma 2 e differenza 3.

Detti x e y i due numeri (per ora incogniti) dobbiamo imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=3 \end{cases} \tag{3}$$

La parentesi graffa indica che le due equazioni devono essere soddisfatte contemporaneamente. (3) è un esempio di *sistema lineare di due equazioni in due incognite.* Risolviamo il sistema osservando che, dalla prima equazione:

$$y = 2 - x$$

e sostituendo nella seconda otteniamo $x = \frac{5}{2}$ e quindi $y = -\frac{1}{2}$. Dunque il sistema ammette un'unica soluzione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

che possiamo esprimere come elemento di $\mathbf{R}^2$, cioè: $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Diamo ora la seguente definizione.

Definizione *Un sistema lineare di m equazioni in n incognite $x_1, \dots, x_n$ è un'espressione del tipo:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $a_{11}, \dots, a_{mn}$ sono numeri reali, detti i coefficienti *del sistema, e $b_1, \dots, b_m$ sono numeri reali, detti i* termini noti *del sistema. Una soluzione del sistema è una n-pla $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ che, sostituita ordinatamente al posto delle incognite, rende soddisfatte tutte le equazioni.*

- Vedremo che ci sono tre casi possibili:

1) Il sistema non ammette soluzioni (è cioè *incompatibile).*

2) Il sistema ammette una e una sola soluzione.

3) Il sistema ammette infinite soluzioni.

Esempio L'esempio precedente dà un sistema lineare di due equazioni in due incognite, che ammette un'unica soluzione (caso 2).

Esempio Il sistema

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

è incompatibile.

Esempio Il sistema

$$S : \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni: $\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 - t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$.

Dato un sistema lineare S, esamineremo i seguenti problemi:

- Stabilire se S ammette soluzioni.
- Calcolare esplicitamente tutte le soluzioni di S.

6 Sistemi e matrici

Una *matrice* $m \times n$ è una tabella di mn numeri reali, ordinati secondo m righe ed n colonne. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \sqrt{5} & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \pi & 3 \end{pmatrix}$$

sono esempi di matrici 2×2, mentre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

è una matrice 3×4. Notiamo che una matrice $n \times 1$ altro non è che un vettore colonna di $\mathbf{R}^n$ e una matrice $1 \times n$ è un vettore riga di $\mathbf{R}^n$.

6.1 Matrici associate a un sistema lineare

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite si puo' rappresentare mediante quella che è detta la *matrice completa* del sistema, cioè la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Notiamo che l'ultima colonna corrisponde ai termini noti del sistema. Spesso sara' importante considerare la *matrice dei coefficienti* del sistema, cioè

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Esempio Il sistema

$$S : \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 2y - z = 4 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

ha matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e matrice completa

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ rappresenta la matrice *completa* del sistema lineare di due equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

6.2 Matrici a scalini

Definizione *Una matrice si dice* a scalini *se soddisfa entrambe le seguenti proprietà:*

1) *Se una riga è nulla, allora tutte le righe ad essa sottostanti sono nulle.*

2) *Sotto il primo elemento non nullo di ciascuna riga, e sotto tutti gli zeri che lo precedono, ci sono elementi nulli.*

Esempio Le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&1&3&0\\0&0&3&6\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&-1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&0&1&2&-3\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

sono a scalini, mentre la matrice

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

non è a scalini: per essere a scalini, sotto l'elemento $a_{23} = -2$ ci dovrà essere uno zero.

Definizione *Il primo elemento non nullo di una riga è detto il* pivot *della data riga.*

- Evidenziare i pivot negli esempi precedenti.

7 Sistemi lineari a scalini

Definizione *Un sistema lineare si dice* a scalini *se la sua matrice completa è una matrice a scalini.*

I sistemi a scalini sono facilmente risolubili.

Esempio Il sistema nelle incognite x, y, z:

$$S : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y + 3z = 0 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

è a scalini, poiché la sua matrice completa è a scalini: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Il sistema può essere risolto facilmente partendo dall'ultima equazione, e sostituendo ordinatamente il valore trovato nelle equazioni che lo precedono. Infatti dall'ultima equazione si ha

$$z = 2.$$

Sostituendo nella seconda otteniamo

$$y = -6$$

e infine, dalla prima equazione:

$$x = 11.$$

Dunque il sistema è compatibile, e ammette l'unica soluzione: $\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esempio Risolvere (se possibile) il sistema la cui matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Il sistema in questione si scrive

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_3 = 2 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

ed è evidentemente incompatibile; infatti l'ultima equazione è $0 = 2$, chiaramente impossibile.

Il problema è che l'ultimo pivot della matrice completa appartiene all'ultima colonna (la colonna dei termini noti). Quando questo accade, si avrà sempre un sistema incompatibile. Viceversa, se l'ultimo pivot non cade nella colonna dei termini noti allora l'ultima equazione sarà sempre risolubile, e risolvendo dal basso otterremo sempre almeno una soluzione. Dunque:

Osservazione *Un sistema lineare a scalini è compatibile se e solo se l'ultimo pivot della sua matrice completa non appartiene all'ultima colonna (cioè alla colonna dei termini noti).*

Supporremo ora che il sistema a scalini sia compatibile. Nel caso precedente il numero dei pivot è uguale al numero delle incognite, e abbiamo ottenuto una unica soluzione. Questo è sempre vero:

Osservazione *Se il numero dei pivot è uguale al numero delle incognite (cioè, tutti i gradini hanno larghezza uno), il sistema ammette un'unica soluzione.*

Vediamo ora come procedere negli altri casi.

Esempio Sistema a scalini 3×4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Matrice completa:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice completa è a scalini, e si vede subito che il sistema è compatibile. I pivot cadono nella prima, terza e quarta colonna. Consideriamo la variabile che non corrisponde alle colonne dei pivot: la seconda, cioè x_2. Poniamo $x_2 = t$, parametro indipendente (libero), e isoliamolo al secondo membro delle equazioni (la prima) in cui compare. Otteniamo il sistema a scalini:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 - t \\ x_3 - x_4 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

che, per ogni t fissato, ammette un'unica soluzione, che possiamo trovare risolvendo dal basso. Otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 = -3 - t \\ x_2 = t \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Dunque, lasciando variare t abbiamo ∞^1 soluzioni, date da $\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} -3 - t \\ t \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}$.

$\square$

Diamo ora il procedimento generale se il numero dei pivot è inferiore al numero delle incognite:

1) Consideriamo le variabili che corrispondono alle colonne in cui *non* cadono i pivot. Se r è il numero dei pivot, tali variabili saranno in numero di $n-r$.

2) Attribuiamo a tali variabili valori arbitrari, diciamo $t_1, \dots, t_{n-r}$, e portiamole ai secondi membri delle equazioni in cui compaiono.

3) Il sistema cosi' ottenuto è a scalini e il numero dei pivot uguaglia il numero delle incognite rimaste. Dunque, per ogni valore dei parametri $t_1, \dots, t_{n-r}$, esso ammetterà un'unica soluzione, e lasciando variare $t_1, \dots, t_{n-r} \in \mathbf{R}$ avremo ∞^{n-r} soluzioni.

In conclusione, abbiamo il seguente risultato.

Teorema *Sia S un sistema lineare a scalini di m equazioni in n incognite, con matrice completa A'. Allora S è compatibile se e solo se l'ultimo pivot di A' non appartiene alla colonna dei termini noti.*

Se S è compatibile e se r è il numero dei pivot, allora :

a) *S ammette un'unica soluzione se $r = n$.*

b) *S ammette ∞^{n-r} soluzioni se $r < n$.*

Osservazione *Se il dato sistema a scalini è compatibile, allora il numero dei pivot della sua matrice completa coincide con il numero di righe non nulle, cioè con il numero delle equazioni significative del sistema.*

Esempio Risolvere il sistema a scalini

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Il sistema è compatibile, ci sono due pivot e cinque incognite, dunque esso ammetterà ∞^3 soluzioni. Le variabili non corrispondenti ai pivot sono x_2, x_4, x_5: poniamo dunque $x_2 = t_1, x_4 = t_2, x_5 = t_3$ e portiamo tali variabili a secondo membro. Otteniamo il sistema a scalini:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -t_1 + 3t_2 - t_3 \\ x_3 = 4 - t_2 - 2t_3. \end{cases}$$

Risolvendo dal basso, otteniamo le ∞^3 soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = -8 - t_1 + 5t_2 + 3t_3 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = 4 - t_2 - 2t_3 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases}$$

al variare dei parametri $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}$. $\square$

8 Algoritmo di Gauss

L'algoritmo di Gauss è un procedimento che, applicato ad un dato sistema S, permette di costruire un sistema a scalini $\tilde{S}$ avente lo *stesso insieme delle soluzioni* del sistema S. Risolvendo il sistema a scalini $\tilde{S}$ (sappiamo come fare: vedi sezione precedente) abbiamo cosi' risolto anche il sistema di partenza.

8.1 Sistemi equivalenti e operazioni elementari

Definizione *Due sistemi lineari si dicono* equivalenti *se hanno lo stesso insieme delle soluzioni.*

Consideriamo ora le seguenti operazioni su un sistema lineare, dette *operazioni elementari* :

1. Scambiare due equazioni del sistema.
2. Moltiplicare un'equazione per uno scalare non nullo.
3. Sommare a una data equazione un multiplo di un'altra equazione del sistema.

È facile vedere che, se applichiamo una qualunque di tali operazioni ad un sistema S, otteniamo un sistema S' avente le stesse soluzioni di S: cioè, le operazioni elementari *non alterano* l'insieme delle soluzioni, e producono via via sistemi equivalenti al sistema di partenza.

8.2 Operazioni elementari sulle righe di una matrice

Sappiamo che un sistema lineare è univocamente determinato dalla sua matrice completa. Le equazioni corrispondono alle righe, dunque le operazioni elementari sui sistemi corrispondono alle seguenti operazioni, dette *operazioni elementari sulle righe* (o anche *operazioni elemetari di riga*):

a) Scambiare due righe della matrice.

b) Moltiplicare una riga per un numero non nullo.

c) Sommare a una data riga un multiplo di un'altra riga della matrice.

Sommare le righe $R = (a_1, \ldots, a_n)$ e $R' = (b_1, \ldots, b_n)$ della matrice significa sommare le entrate corrispondenti di R e R':

$$R + R' = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$

mentre moltiplicare la riga $R = (a_1, \ldots, a_n)$ per il numero k significa moltiplicare ogni entrata di R per k:

$$kR = (ka_1, \ldots, ka_n).$$

La notazione simbolica che useremo per le operazioni elementari a), b), c) è la seguente. Indichiamo con $R_1, \ldots, R_m$ le righe della matrice. Allora:

a) $R_i \leftrightarrow R_j$ scambia la i-esima riga con la j-esima riga.

b) $R_i \to kR_i$ moltiplica la i-esima riga per k.

c) $R_i \to R_i + kR_j$ sostituisce la i-esima riga con la somma della i-esima riga e la j-esima riga moltiplicata per k.

Definizione *La matrice A' si dice* equivalente per righe *alla matrice A se A' si ottiene da A mediante una successione di operazioni elementari sulle righe. In particolare, matrici equivalenti per righe rappresentano sistemi lineari equivalenti.*

L'algoritmo di Gauss permette di costruire, a partire da una data matrice A, una matrice a scalini $\tilde{A}$ equivalente per righe ad A. Dunque, il sistema rappresentato da $\tilde{A}$ sarà a scalini, ed equivalente a quello rappresentato da A: risolvendo quest'ultimo (sappiamo come fare) abbiamo risolto anche il sistema di partenza. Illustriamo l'algoritmo su una serie di esempi.

9 Serie di esempi

Esempio Risolviamo il sistema:

$$S : \begin{cases} x + y + z = 12 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y - 3z = -5. \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa del sistema è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$. Utilizziamo le operazioni elementari sulle righe per ridurre A ad una matrice a gradini. Il primo passo è quello di produrre uno zero nella posizione $(2,1)$. Questo si può fare moltiplicando la prima riga per -1 e sommando alla seconda (nella notazione simbolica, $R_2 \to R_2 - R_1$). Otteniamo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -11 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Per definizione, A_1 è equivalente per righe ad A.

Ora dobbiamo produrre uno zero nella posizione $(3,1)$: ciò si può fare moltiplicando per -2 la prima riga e sommando alla terza ($R_3 \to R_3 - 2R_1$). Otteniamo

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -11 \\ 0 & -1 & -5 & -29 \end{pmatrix}.$$

Infine (ultimo passo) dobbiamo avere uno zero nella posizione $(3,2)$, e quindi sommiamo alla terza riga la seconda (operazione: $R_3 \to R_3 + R_2$). Il risultato è la matrice a scalini

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & -8 & -40 \end{pmatrix}.$$

$\tilde{A}$ è la matrice ridotta cercata; il sistema rappresentato da $\tilde{A}$ è equivalente al sistema S di partenza, dunque le soluzioni di S sono le soluzioni del sistema a scalini:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ x_2 - 3x_3 = -11 \\ -8x_3 = -40. \end{cases}$$

Risolvendo dal basso, otteniamo l'unica soluzione $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 5 \end{cases}$. $\square$

Esempio Risolviamo il sistema nelle incognite x, y, z:

$$S : \begin{cases} 3y - z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 4y + z = 0. \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa è $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e dobbiamo in primo luogo ridurre

A ad una matrice a scalini. Per far partire l'algoritmo, conviene scambiare le prime due righe tra loro ($R_1 \leftrightarrow R_2$), per avere

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per sistemare la prima colonna, dobbiamo avere uno zero nella posizione $(3,1)$. Dunque moltiplichiamo la prima riga per -1 e sommiamo alla terza ($R_3 \to R_3 - R_1$) ottenendo

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Infine, sottraiamo la seconda equazione dalla terza ($R_3 \to R_3 - R_2$), e otteniamo la matrice a scalini:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Il sistema lineare $\tilde{S}$ la cui matrice completa è $\tilde{A}$ è a scalini, ed è equivalente al sistema di partenza S. Poichè l'ultimo pivot di $\tilde{A}$ cade nella colonna dei termini noti, il sistema $\tilde{S}$ (e quindi S) *non ammette* soluzioni (infatti, l'ultima equazione è $0 = -3$). In conclusione S è incompatibile. $\square$

Abbiamo illustrato l'algoritmo di Gauss solamente su esempi. In realtà esso funziona sempre, e si può usare per dimostrare la seguente

Proposizione *Con un opportuno uso delle operazioni elementari sulle righe, è sempre possibile ridurre una qualunque matrice A a una matrice a scalini $\tilde{A}$ ad essa equivalente per righe. In particolare, ogni matrice è equivalente per righe a una matrice a scalini.*

Corollario *Ogni sistema lineare è equivalente a un sistema lineare a scalini.*

Riassumiamo i punti principali dell'algoritmo di Gauss. Per risolvere un dato sistema lineare S:

- Scriviamo la matrice completa di S.
- Mediante le operazioni elementari sulle righe, riduciamo tale matrice ad una matrice a scalini.
- Risolviamo il sistema lineare a scalini corrispondente e troviamo cosi' anche le soluzioni di S.

Se il sistema è di piccole dimensioni conviene operare direttamente sulle equazioni, senza passare per la matrice completa.

Esempio Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 2 \\ x + 2y + z = 1. \end{cases}$$

Moltiplichiamo la prima equazione per $-\frac{1}{2}$ e sommiamo alla seconda. Dopo aver moltiplicato la seconda equazione per 2 otteniamo il sistema a scalini:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 2 \\ 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

che ammette infinite soluzioni:

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{3}t + 1 \\ -\frac{5}{3}t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}.$$

10 Le matrici

10.1 Definizione ed esempi

Una matrice a p righe e q colonne (brevemente, di tipo $p \times q$) è una tabella di numeri reali disposti su p righe e q colonne, cioè:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

L'elemento di posto (i, j) è l'elemento a_{ij} che compare sulla riga $i-$esima e la colonna $j-$esima della matrice. Si scriverà

$$A = (a_{ij}).$$

Esempi di matrici: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4/3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 4 & 5 & 6 \\ -8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(1, 2, -1)$.

L'insieme delle matrici $p \times q$ (a elementi reali) sarà denotato con il simbolo $M(p, q, \mathbf{R})$ o anche $\mathbf{Mat}(p \times q)$.

Una matrice $p \times q$ porta con sé $p \times q$ "informazioni". Ad esempio, date n città $C_1, \dots, C_n$, possiamo costruire la matrice $n \times n$ avente elemento a_{ij} dato dalla distanza, in chilometri, di C_i da C_j. Per esercizio, scrivere tale matrice se le città sono Roma, Napoli e Milano.

10.2 Matrici quadrate

Una matrice si dice *quadrata* se $p = q$, ovvero, se ha lo stesso numero di righe e colonne. Negli esempi precedenti, le prime due matrici sono quadrate, le altre no.

10.3 Vettori riga e vettori colonna di una matrice

Ogni matrice di tipo $p \times q$ individua p vettori riga di $\mathbf{R}^q$ e q vettori colonna di $\mathbf{R}^p$.

Esempio La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ di tipo 2×4 ha vettori riga $(1, 0, 7, -2), (1, 4, 0, -3) \in \mathbf{R}^4$ e vettori colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$.

10.4 Matrice trasposta

Sia data una matrice A di tipo $p \times q$. La matrice *trasposta,* denotata con A^t, è la matrice che si ottiene scambiando le righe e le colonne di A. La trasposta è di tipo $q \times p$.

Esempio Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ allora $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 7 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

È chiaro che, se $A = (a_{ij})$, allora $A^t = (a_{ji})$; è anche ovvio che prendendo la trasposta due volte riotteniamo la matrice di partenza: $(A^t)^t = A$.

11 Somma e moltiplicazione per uno scalare

Introdurremo le operazioni naturali di somma di due matrici e moltiplicazione di una matrice per uno scalare, e ne osserveremo le principali proprietà.

11.1 Somma di due matrici

Date due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, entrambe di tipo $p \times q$, definiamo la *somma* $A+B$ come la matrice di entrate c_{ij} date da $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Anche la matrice somma è di tipo $p \times q$.

Quindi, sommare due matrici significa semplicemente sommare gli elementi corrispondenti.

Esempio Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ allora

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ allora

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Notiamo che $B = -A$, la matrice opposta di A. Dunque abbiamo $A + (-A) = O$. Questo risulta vero per ogni matrice.

11.2 Proprietà della somma di matrici

In ciò che segue, $A, B, C, \dots$ sono matrici di tipo $p \times q$, quindi appartenenti a $\mathbf{Mat}(p \times q)$.

1. Proprietà associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$ per ogni $A, B, C \in \mathbf{Mat}(p \times q)$.

2. Proprietà commutativa: $A + B = B + A$ per ogni $A, B \in \mathbf{Mat}(p \times q)$.

3. Esistenza dello zero: Esiste una matrice (la matrice nulla) denotata con O, che soddisfa la proprietà: $A + O = A$ per ogni matrice $A \in \mathbf{Mat}(p \times q)$.

4. Esistenza dell'opposto: Data $A \in \mathbf{Mat}(p \times q)$ esiste una matrice, denotata con $-A$ e chiamata *matrice opposta di A,* avente la proprietà $A + (-A) = O$.

È facile dimostrare le proprietà 1-2, che sono conseguenza delle analoghe proprietà della somma di numeri reali. La proprietà associativa afferma in particolare che possiamo sommare tre matrici date in qualsiasi ordine, e il risultato si potrà scrivere $A + B + C$, senza ambiguità.

La *matrice nulla* di cui alla proprietà **3** è la matrice avente tutti gli elementi (entrate) nulli. La *matrice opposta* di una data matrice $A = (a_{ij})$, è la matrice $-A = (-a_{ij})$ ottenuta cambiando di segno a tutti gli elementi di A. Esempio:

$$-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esempio Si vede facilmente che $(A + B)^t = A^t + B^t$.

Esercizio Date $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, determinare una matrice X di tipo 2×2 tale che $A + X = B$.

Soluzione. Si vede subito che, sommando ad ambo i membri la matrice $-A$ otteniamo

$$X = -A + B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esempio Vale la seguente *legge di cancellazione*: $A + C = B + C$ implica $A = B$.

11.3 Moltiplicazione di una matrice per uno scalare

Data una matrice $A = (a_{ij})$ e un numero reale k, definiamo la matrice kA come la matrice con entrate (ka_{ij}). Semplicemente, kA si ottiene moltiplicando ciascuna entrata di A per il numero k.

Esempio Se $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $k = 3$, allora $kA = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ -6 & -3 & 12 \end{pmatrix}$.

Valgono le seguenti proprietà (analoghe alle proprietà distributive dei numeri reali), che si dimostrano facilmente:

1. $h(kA) = (hk)A$ per ogni $A \in \mathbf{Mat}(p \times q)$ e $h, k \in \mathbf{R}$.

2. $(h + k)A = hA + kA$ per ogni $A \in \mathbf{Mat}(p \times q)$ e $h, k \in \mathbf{R}$.

3. $h(A + B) = hA + hB$ per ogni $A, B \in \mathbf{Mat}(p \times q)$ e $h \in \mathbf{R}$.

Si verifica immediatamente che $1A = A$, $(-1)A = -A$ (la matrice opposta), e $0A = O$.

11.4 Combinazioni lineari di matrici

Con le due operazioni appena introdotte, possiamo formare le *combinazioni lineari* di due o piú matrici: se A, B sono matrici, e h, k sono numeri reali, possiamo considerare la matrice $hA + kB$ (ovviamente dello stesso tipo). Piú in generale, possiamo formare combinazioni lineari di un numero qualunque di matrici.

Esempio Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ allora $2A - 4B = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 6 & -14 \end{pmatrix}$.

Esercizio Date $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, trovare l'unica matrice X di tipo 2×2 tale che $2A + 3X = 4B$.

Esempio Ogni matrice 2×2 è una combinazione lineare delle matrici $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Infatti:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4.$$

12 Matrici quadrate di tipo speciale

Ricordiamo che una matrice si dice *quadrata di ordine* n se è di tipo $n \times n$.

12.1 Matrici simmetriche e antisimmetriche

Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ si dice *simmetrica* se $A^t = A$. Altrimenti detto, una matrice è simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j. L'insieme delle matrici simmetriche di ordine n si denota con $S(n)$.

Esempio La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ è simmetrica, mentre la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ non lo è.

Una matrice quadrata si dice *antisimmetrica* se $A^t = -A$, ovvero $a_{ji} = -a_{ij}$ per ogni i, j. L'insieme delle matrici antisimmetriche di ordine n si denota con $A(n)$.

Esempio La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ è antisimmetrica.

Esercizio a) Scrivere la generica matrice simmetrica 2×2.

b) Scrivere la generica matrice simmetrica 3×3.

Esercizio a) Scrivere la generica matrice antisimmetrica di ordine 2.

a) Scrivere la generica matrice antisimmetrica di ordine 3.

Esercizio Dimostrare che, data la matrice quadrata A, la matrice $A + A^t$ è simmetrica, e la matrice $A - A^t$ è antisimmetrica.

Esercizio Dimostrare che ogni matrice quadrata si scrive (in modo unico) come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.

Esercizio Dimostrare che l'unica matrice simmetrica e antisimmetrica è la matrice nulla.

12.2 Matrici triangolari

Le matrici *triangolari superiori* sono quelle che hanno tutti zeri sotto la diagonale principale: $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$. Ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Le matrici *triangolari inferiori* sono quelle che hanno tutti zeri sopra la diagonale principale: $a_{ij} = 0$ per ogni $i < j$. Ad esempio $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Esercizio Verificare una matrice quadrata a scalini è anche triangolare superiore. Inoltre, dare un esempio di matrice triangolare superiore che però non è a scalini.

12.3 Matrici diagonali

Una matrice si dice *diagonale* se tutti gli elementi non appartenenti alla diagonale principale sono nulli. Dunque una matrice è diagonale se e solo se è al tempo stesso triangolare superiore e triangolare inferiore.

Esempio Matrice diagonale generica di ordine 3: $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

13 Prodotto di matrici (righe per colonne)

Definiamo ora un'operazione che associa a due matrici A, B di tipo opportuno una terza matrice, chiamata *prodotto righe per colonne* di A e B. Iniziamo dal caso in cui A è un vettore riga (matrice $1 \times n$) e B è un vettore colonna (matrice $n \times 1$).

13.1 Prodotto di un vettore riga per un vettore colonna

È il numero (matrice 1×1) definito da:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Vale a dire, si moltiplicano a due a due gli elementi corrispondenti e si somma.

Esempio $(2, 1, -1) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 6 - 1 - 4 = 1.$

13.2 Definizione del prodotto di matrici

Sia A una matrice $m \times n$ e B una matrice $p \times q$. Se $n = p$, cioè se il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B, allora *definiamo* la matrice prodotto $A \cdot B$ (in quest'ordine!) con la seguente regola:

- *L'elemento di posto (i, j) della matrice $A \cdot B$ è il prodotto della i-esima riga di A per la j-esima colonna di B.*

Si noti che il risultato è una matrice $m \times q$.

In conclusione, se $A = (a_{ij})$ è $m \times n$ e $B = (b_{ij})$ è $n \times q$ allora $AB = (c_{ij})$ è per definizione la matrice $m \times q$, tale che:

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{in} b_{nj}.$$

D'ora in poi scriveremo il prodotto senza puntino: AB.

Esempio Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Poiché A è 2×2 e B è 2×3, possiamo calcolare AB, che sarà una matrice 2×3. Notiamo che BA non esiste. Si ottiene:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 17 \end{pmatrix}.$$

Infatti, detti c_{ij} gli elementi di AB, abbiamo dalla definizione:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= (1,2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\\
c_{12} &= (1,2)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = 3\\
&\dots\\
c_{23} &= (3,4)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = 17
\end{aligned}$$

Esercizio Siano A una matrice 2×3 e B una matrice 3×3. Stabilire quali dei seguenti prodotti esiste: AB, BA, AA, BB.

13.3 Il prodotto di matrici non è commutativo

• Se A e B sono quadrate di ordine n allora AB e BA esistono entrambe, e sono anch'esse quadrate di ordine n.

Esempio Siano $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}-1 & 2\\-3 & 5\end{pmatrix}$. Allora:

$$AB = \begin{pmatrix}-7 & 12\\-15 & 26\end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix}5 & 6\\12 & 14\end{pmatrix}.$$

Notiamo subito che $AB \neq BA$. Cioè:

• Il prodotto di matrici *non* soddisfa la proprietà commutativa.

"Non soddisfa" significa che *non sempre* si ha $AB = BA$. Ma a volte questo è possibile: se O indica la matrice nulla, allora

$$AO = OA = O$$

per ogni A.

• Diremo che le matrici A e B *commutano* se $AB = BA$.

Esercizio Sia $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$. Descrivere l'insieme delle matrici 2×2 che commutano con A, cioè descrivere la matrice generica B tale che $AB = BA$.

Soluzione. Partiamo dalla matrice generica 2×2, che possiamo scrivere $B = \begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix}$. Imponiamo ora che $AB = BA$; otterremo un sistema di equazioni che, risolto, mostra che

B è del tipo $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, con $x, y \in \mathbf{R}$. Dunque, esistono infinite matrici che commutano con A, ma non tutte le matrici 2×2 hanno questa proprietà.

Esercizio Sia ora $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Descrivere l'insieme della matrici 2×2 che commutano con A'.

Soluzione. $B = \begin{pmatrix} x & 2z \\ z & x+z \end{pmatrix}$ con $x, z \in \mathbf{R}$.

13.4 Proprietà del prodotto di matrici

Il prodotto di numeri gode delle proprietà associativa, commutativa e distributiva (rispetto alla somma). Cioè, se $a, b, c \in \mathbf{R}$ abbiamo sempre:

1) Proprietà *associativa:* $(ab)c = a(bc)$.
2) Proprietà *commutativa:* $ab = ba$.
3) Proprietà *distributiva:* $(a+b)c = ab + ac$.

Quali di queste proprietà si estendono al prodotto di matrici? Abbiamo già visto che la proprietà commutativa non vale in generale. Nessun problema, però, con le altre proprietà. Vale infatti la seguente:

Proposizione *Per ogni terna di matrici A, B, C per le quali i prodotti indicati esistono, si ha:*

1. *Proprietà associativa:* $(AB)C = A(BC)$.

2. *Proprietà distributive rispetto alla somma:* $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$.

Inoltre il prodotto si comporta in modo naturale rispetto alla moltiplicazione per uno scalare:

3. *Date due matrici A e B e un numero reale h si ha sempre:*

$$h(AB) = (hA)B = A(hB).$$

La proposizione si dimostra con una verifica diretta, che omettiamo.

In conclusione, abbiamo introdotto le operazioni di somma e di prodotto di due matrici. Tutte le proprietà algebriche naturali, valide per la somma e il prodotto di numeri, si estendono alle matrici, con la sola eccezione della proprietà commutativa, che non vale in generale per il prodotto di matrici.

Esercizio Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Calcolare esplicitamente i prodotti: $AB, (AB)C, BC, A(BC)$ e verificare che effettivamente si ha $(AB)C = A(BC)$.

14 Matrice identità, matrici invertibili

14.1 Matrice identità

Il numero reale 1 ha la seguente proprietà di *neutralità* rispetto al prodotto: per ogni $a \in \mathbf{R}$ si ha

$$a \cdot 1 = a.$$

Si dice anche che 1 è *l'elemento neutro* rispetto al prodotto (di numeri).

Esiste un elemento neutro rispetto al prodotto di matrici? La risposta è affermativa.

- Definiamo *matrice identità* di ordine n la matrice quadrata $n \times n$, denotata con I_n, che ha tutti 1 sulla diagonale principale e zero altrove. Quindi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e in generale

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

- Per ogni matrice A di tipo $m \times n$ si ha allora:

$$AI_n = A, I_m A = A.$$

La verifica si fa con un calcolo diretto.

Spesso ometteremo di indicare l'ordine, e scriveremo semplicemente I. Si ha dunque $AI = IA = A$ per ogni matrice A.

14.2 Matrici invertibili

Se a è un numero reale *non nullo* allora esiste il suo inverso a^{-1}, che per definizione ha la proprietà:

$$aa^{-1} = 1.$$

Consideriamo ora la nozione analoga per le matrici quadrate.

• Diremo che la matrice quadrata A di ordine n è *invertibile* se esiste una seconda matrice B di ordine n tale che:

$$AB = BA = I.$$

Quando esiste, tale matrice B si denota con A^{-1} (dimostreremo che è unica). La matrice A^{-1} è detta *l'inversa* di A.

A differenza del caso dei numeri, *non è vero* che ogni matrice non nulla è invertibile. Ad esempio, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ è non nulla, eppure non esiste alcuna matrice $X \in \mathbf{Mat}(2\times 2)$ tale che $AX = I$.

Infatti, poniamo $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ e tentiamo di risolvere l'equazione matriciale $AX = I$ ovvero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tale equazione si traduce in un sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2w = 0 \\ 2x + 4z = 0 \\ 2y + 4w = 1 \end{cases}$$

che *non* ammette soluzioni: la prima e terza equazione sono chiaramente incompatibili.

Esercizio Dimostrare che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ è invertibile, e determinare la sua inversa.

Esercizio Si consideri la generica matrice diagonale di ordine 2: $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Dimostrare che D è invertibile se e solo se a e d sono *entrambi* diversi da zero. In tal caso l'inversa è $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/d \end{pmatrix}$. Generalizzare tale risultato alla generica matrice diagonale di ordine n.