# Parte 2. Determinante e matrice inversa

A. Savo − Appunti del Corso di Geometria 2013-14

Indice delle sezioni

1 Determinante di una matrice $2 \times 2$, 1
2 Teorema di Cramer (caso particolare), 3
3 Determinante di una matrice $n \times n$, 5
4 Teorema di Laplace, 7
5 Prime proprietà del determinante, 9
6 Matrice inversa, 11
7 Teorema di Cramer (caso generale), 15
8 Determinante e algoritmo di Gauss, 17

## 1 Determinante di una matrice $2 \times 2$

Abbiamo già osservato nella Parte 1.14 che ci sono matrici non invertibili, ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Occorre quindi un criterio che stabilisca quando una matrice è invertibile, e quando non lo è. Tale criterio si esprime tramite la nozione di *determinante.* Nella prima Sezione esamineremo il caso in cui la matrice ha ordine 2; più avanti generalizzeremo i risultati a matrici di ordine arbitrario.

**Definizione** *Data la matrice quadrata* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *di ordine* 2*, si definisce* determinante di $A$ *il numero reale:*

$$\det A = ad - bc.$$

*Il determinante di* $A$ *si indica anche con il simbolo* $|A|$*.*

**Proposizione** *Per ogni matrice* $2 \times 2$ *si ha* $\det A = \det(A^t)$*.*

*Dimostrazione.* Verifica immediata. □

Osserviamo anche la seguente identità, nota come *Formula di Binet* .

**Proposizione** *Date due matrici* $A, B \in M(2, 2, \mathbf{R})$ *si ha sempre* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

*Dimostrazione.* È una verifica diretta: siano $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Sviluppando separatamente $\det(AB)$ e $\det A \cdot \det B$ si osserva l'uguaglianza per ogni scelta di $a, b, c, d, a', b', c', d'$. □

## 1.1 Un criterio per l'invertibilità

La nozione di determinante fornisce un utile criterio per vedere facilmente se una matrice è invertibile oppure no.

**Teorema** *La matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *è invertibile se e solo se* $\det A \neq 0$. *In tal caso l'inversa è data dalla matrice:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

*Dimostrazione.* Il "se e solo se" significa che dobbiamo dimostrare l'equivalenza delle due affermazioni. Quindi dobbiamo dimostrare due cose:

a) Se $A$ è invertibile allora $\det A \neq 0$.

b) Se $\det A \neq 0$ allora $A$ è invertibile.

Riguardo alla implicazione a), abbiamo per ipotesi che $A$ è invertibile e dobbiamo dimostrare che $\det A \neq 0$. Per ipotesi esiste dunque una matrice $B$ tale che $AB = I$. Applichiamo la formula di Binet: poiché $\det I = 1$, otteniamo:

$$1 = \det I = \det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Ora $\det A$ e $\det B$ sono due numeri reali che hanno prodotto uguale a 1: necessariamente ciascuno di essi è diverso da zero, in particolare $\det A \neq 0$.

Dimostriamo ora l'implicazione b): per ipotesi $\det A \neq 0$ e dobbiamo dimostrare che esiste una matrice $B$ tale che $AB = BA = I$. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e poniamo:

$$B = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Per le proprietà del prodotto di matrici, abbiamo:

$$AB = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = I.$$

Dunque $AB = I$; in modo analogo si verifica che $BA = I$ e di conseguenza $A$ è invertibile, con inversa $A^{-1} = B$. $\Box$

**Esempio** La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$ non è invertibile poichè ha determinante nullo.

**Esempio** La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ha determinante 2: dunque è invertibile. L'inversa è:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Si verifica subito che $A^{-1}A = I = AA^{-1}$.

**Esercizio** Stabilire quali delle seguenti matrici sono invertibili. Se $A_i$ è invertibile, calcolare la sua matrice inversa.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio** Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ dove $k$ è un parametro reale. Per quali valori di $k$ la matrice $A$ è invertibile? In corrispondenza di tali valori, calcolare esplicitamente $A^{-1}$.

### 1.2 Legge di cancellazione per il prodotto di matrici

Per i numeri reali, vale la ben nota *legge di cancellazione* :

- Se $ab = ac$, e $a \neq 0$, allora $b = c$.

Un risultato analogo vale per le matrici purché si sostituisca la condizione $A \neq 0$ con la condizione $\det A \neq 0$. Precisamente, si ha:

**Proposizione** *Siano $A, B, C$ matrici $2 \times 2$. Se $AB = AC$ e $\det A \neq 0$ allora $B = C$.*

*Dimostrazione.* Per ipotesi $\det A \neq 0$: dunque $A$ ammette matrice inversa $A^{-1}$. Moltiplicando ambo i membri dell'identità $AB = AC$ (a sinistra) per $A^{-1}$ otteniamo l'asserto. $\Box$.

## 2 Teorema di Cramer (caso particolare)

In questa sezione applicheremo il determinante allo studio di sistemi lineari di due equazioni in due incognite.

## 2.1 Forma matriciale di un sistema

Sia $S$ un sistema lineare di due equazioni in due incognite:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Detta $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ la matrice dei coefficienti, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ il vettore colonna delle incognite e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ il vettore colonna dei termini noti, il sistema si scrive semplicemente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

cioè a dire:

$$AX = B,$$

dove $AX$ indica il prodotto righe per colonne delle matrici $A$ e $X$.

- L'equazione matriciale $AX = B$ è la cosiddetta *forma matriciale* del sistema $S$.

La forma matriciale è un'equazione lineare in cui l'incognita è una matrice (in questo caso il vettore colonna $X$) e i coefficienti sono anch'essi matrici. Poiché $A$ è invertibile, essa ammette matrice inversa $A^{-1}$: allora moltiplicando ambo i membri *a sinistra* per $A^{-1}$ otteniamo:

$$X = A^{-1}B.$$

Dunque la soluzione è unica, e si può calcolare facilmente.

**Esempio** Il sistema $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + 5x_2 = -1 \end{cases}$ ha matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; poichè $\det A = 2$ il sistema ammette l'unica soluzione $X = A^{-1}B$. Ora $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e l'unica soluzione è data da:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

cioè $x_1 = \frac{13}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$. $\square$

**Esercizio** Risolvere il sistema con l'algoritmo di Gauss e verificare il risultato.

### 2.2 Il teorema di Cramer per sistemi $2 \times 2$

In conclusione, abbiamo dimostrato il seguente risultato (un caso particolare di quello che sarà chiamato *Teorema di Cramer*).

**Proposizione** *Sia $S$ un sistema lineare di due equazioni in due incognite avente forma matriciale $AX = B$, dove $A$ è la matrice dei coefficienti, $X$ è il vettore colonna delle incognite e $B$ è il vettore colonna dei termini noti. Se* $\det A \neq 0$ *il sistema è compatibile e ammette l'unica soluzione $X = A^{-1}B$.*

Al momento, nulla possiamo dire a priori nel caso in cui la matrice dei coefficienti abbia determinante nullo. Di questo ci occuperemo nelle prossime lezioni.

**Esempio** I sistemi lineari $S_1 : \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$ e $S_2 : \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ hanno matrice dei coefficienti con determinante nullo: non possiamo applicare il teorema precedente. Discutere le (eventuali) soluzioni usando il metodo di Gauss.

## 3 Determinante di una matrice $n \times n$

Abbiamo definito il determinante di una matrice $2 \times 2$: vogliamo ora definire il determinante di una matrice quadrata di ordine arbitrario. La definizione è di tipo *induttivo,* nel senso che il determinante di una matrice di ordine $n$ si definisce combinando opportuni determinanti di ordine $n - 1$. Dopo $n - 2$ passi, il tutto si ridurrà al calcolo di un certo numero di determinanti di ordine 2, che abbiamo già definito e che sappiamo calcolare.

### 3.1 Matrice aggiunta di un elemento

**Definizione** *Sia $A$ una matrice $n \times n$ e $a_{ij}$ un elemento di $A$. La* matrice aggiunta *di $a_{ij}$, denotata con $A_{ij}$, è la matrice di ordine $n - 1$ che si ottiene sopprimendo la $i$-esima riga e $j$-esima colonna di $A$.*

**Esempio** Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Allora le matrici aggiunte dei suoi elementi sono:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, A_{23} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_{31} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, A_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{33} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

## 3.2 Determinante di una matrice $3 \times 3$

**Definizione** *Sia $A$ una matrice $3 \times 3$, e sia $A_{ij}$ la matrice aggiunta dell'elemento $a_{ij}$. Allora definiamo*

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}.$$

Osserviamo che sappiamo calcolare i tre determinanti di ordine due che compaiono nella definizione. Si tratta quindi di moltiplicare ciascun elemento della prima riga per il determinante della sua matrice aggiunta, e poi sommare, procedendo però a *segni alterni.* La procedura è anche detta *sviluppo del determinante lungo la prima riga.*

**Esempio** Calcoliamo il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ dell'esempio precedente.

Si ha:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 4 \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 8 + (-2) + 4(-6) \\ &= -10 \end{aligned}$$

quindi $\det A = -10$.

**Esempio** Il determinante della matrice identità è uguale a 1.

## 3.3 Determinante di una matrice di ordine $n$

Siamo ora pronti per la definizione generale.

**Definizione** *Sia $A$ una matrice $n \times n$, e sia $A_{ij}$ la matrice aggiunta dell'elemento $a_{ij}$. Allora definiamo*

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}.$$

*Usando il simbolo di sommatoria:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j}.$$

Notiamo i segni alterni, dovuti al termine $(-1)^{j+1}$.

**Esempio** Calcoliamo il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Dalla definizione:

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Procedendo al calcolo dei determinanti di ordine tre (è ovviamente sufficiente calcolare solo quelli che non vengono moltiplicati per 0), otteniamo $\det A = -84$.

# 4 Teorema di Laplace

Una proprietà notevole del determinante è data dal fatto che esso può essere sviluppato lungo una *qualsiasi* riga o colonna, nel senso del seguente teorema, noto come *primo teorema di Laplace.*

**Teorema** *Sia $A$ una matrice $n \times n$. Allora:*

a) *Per ogni $k = 1, \dots, n$ si ha:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}$$

*detto* sviluppo del determinante lungo la $k$-esima riga.

b) *Per ogni $h = 1, \dots, n$ si ha:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+h} a_{jh} \det A_{jh}$$

*detto* sviluppo del determinante lungo la $h$-esima colonna.

*Dimostrazione.* Omessa. $\square$

In pratica il teorema afferma che, per calcolare il determinante, possiamo:

1) Scegliere una qualunque riga (o colonna).

2) Moltiplicare ciascun elemento della riga (o colonna) scelta per il determinante della sua matrice aggiunta, con il segno + o − a seconda che la somma degli indici di riga e colonna del dato elemento sia rispettivamente pari o dispari.

3) Sommare tutti i termini cosi' ottenuti.

Verifichiamo il teorema di Laplace sul seguente esempio.

**Esempio** Torniamo alla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, di cui avevamo già calcolato il determinante, trovando il valore $-10$. Sviluppiamo il determinante lungo la seconda riga, e otteniamo dalla proposizione:

$$\begin{aligned} \det A &= -a_{21} \det A_{21} + a_{22} \det A_{22} - a_{23} \det A_{23} \\ &= -0 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (4) \\ &= -10 \end{aligned}$$

Ora sviluppiamo il determinante lungo l'ultima colonna, e otteniamo:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{13} \det A_{13} - a_{23} \det A_{23} + a_{33} \det A_{33} \\ &= 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 4 \cdot (-6) - 1 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ &= -10 \end{aligned}$$

Notiamo lo *schema dei segni* : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$.

Per abbreviare i calcoli, possiamo dunque scegliere la riga (o colonna) con il massimo numero di zeri.

**Esempio** Calcoliamo il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ già considerata in precedenza. Conviene sviluppare il determinante lungo l'ultima colonna; dalla proposizione abbiamo che

$$\begin{aligned} \det A &= a_{24} \det A_{24} \\ &= 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 4 \cdot 3 \cdot (-7) \\ &= -84 \end{aligned}$$

dove il determinante di ordine tre è stato sviluppato lungo la seconda colonna.

# 5 Prime proprietà del determinante

Osserviamo innanzitutto:

**Proposizione** *Si ha sempre* $\det A = \det(A^t)$.

*Dimostrazione.* Per matrici di ordine due l'affermazione è immediata. Supponiamo ora che la matrice abbia ordine 3, e calcoliamo il determinante con lo sviluppo lungo la prima riga. Osserviamo che tale sviluppo coincide con lo sviluppo del determinante di $A^t$ lungo la prima colonna (spiegare perché) e dunque, per il teorema di Laplace, $\det A = \det(A^t)$. Ora è chiaro come continuare se l'ordine è $4, 5 \dots$ $\square$

Se una matrice è triangolare superiore, o triangolare inferiore, il determinante si calcola immediatamente.

**Proposizione** *Il determinante di una matrice triangolare superiore, o triangolare inferiore, uguaglia il prodotto degli elementi diagonali.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che la matrice sia triangolare superiore. Se la matrice è di ordine due l'affermazione è immediata: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = ad$. Se è di ordine tre, essa si scrive

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Sviluppando lungo la prima colonna:

$$\det A = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

È chiaro a questo punto che, sviluppando il determinante via via lungo la prima colonna, la proposizione risulta vera per ogni ordine. Un argomento simile prova l'affermazione nel caso in cui la matrice sia triangolare inferiore (sviluppare via via lungo la prima riga). □

**Esempio** Abbiamo $\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-2) = -6$ e $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 8 & 15 & 19 \end{pmatrix} = 0$.

**Proposizione** *Se una matrice ha una riga (o colonna) nulla, allora il suo determinante è nullo.*

*Dimostrazione.* Basta sviluppare il determinante lungo la riga (o colonna) nulla. □

Infine osserviamo la cosiddetta *formula di Binet* , già dimostrata per matrici di ordine due, e che afferma che il determinante di un prodotto di matrici è uguale al prodotto dei determinanti.

**Proposizione** *Date due matrici quadrate $A$ e $B$ di ordine $n$ arbitrario si ha sempre:* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

*Dimostrazione.* Omessa. □

**Esercizio** Dimostrare che l'uguaglianza $\det(A+B) = \det A + \det B$ non è vera in generale, cioè possiamo trovare matrici $A$ e $B$ tali che $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

**Esercizio** Data una matrice $A$ di ordine $n$ e un numero reale $k$, dimostrare che $\det(kA) = k^n \det A$. (*Suggerimento:* partire dai casi semplici $n = 2$ e $n = 3$ e generalizzare a $n$ arbitrario.)

## 5.1 Complessità del calcolo del determinante

È evidente dagli esempi, e dalla stessa definizione, che il calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ diventa via via piú complicato al crescere dell'ordine $n$. Cerchiamo di quantificare questa complessità. Dalla definizione induttiva di determinante sappiamo che, dopo un certo numero di passi, il calcolo è ridotto a quello di un certo numero di determinanti di ordine due. Quanti, esattamente? Vogliamo quindi calcolare:

$a_n =$ numero di determinanti di ordine due necessari al calcolo di un determinante di ordine $n$.

È evidente che $a_2 = 1$ e $a_3 = 3$. Dalla definizione di determinante con lo sviluppo lungo la prima riga ricaviamo subito la seguente relazione:

$$a_n = na_{n-1}.$$

Quindi la successione $\{a_n\}$ è l'unica avente le proprietà:

$$\begin{cases} a_2 = 1 \\ a_n = na_{n-1}. \end{cases}$$

Dunque $a_3 = 3, a_4 = 4 \cdot 3 = 12, a_5 = 5 \cdot 12 = 60$; si ha poi $a_8 = 20160$ e $a_{10} = 1814400$. Ma come cresce tale successione? È immediato verificare che, per ogni $n$, si ha:

$$a_n = \frac{1}{2}n!$$

dove $n!$ indica il fattoriale di $n$ (cioè, il prodotto dei primi $n$ numeri naturali). La crescita è estremamente rapida quando $n$ è via via più grande.

Va poi considerato che il numero delle operazioni effettive (cioè moltiplicazioni o somme) necessarie al calcolo di un determinante di ordine $n$ è ancora più grande, poiché oltre a calcolare i determinanti di ordine due dobbiamo anche sommarli e moltiplicarli opportunamente tra loro.

Vedremo che sarà possibile, con l'algoritmo di Gauss, ridurre i calcoli fino a un numero dell'ordine di $n^3$.

## 6 Matrice inversa

Ricordiamo che una matrice quadrata $A$ si dice invertibile se esiste una matrice quadrata $B$, dello stesso ordine, tale che $AB = BA = I$. Proviamo ora l'unicità dell'inversa.

**Proposizione** *Supponiamo che la matrice quadrata $A$ sia invertibile: allora esiste un'unica matrice $A^{-1}$ tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. La matrice $A^{-1}$ è detta l'* inversa *di $A$.*

*Dimostrazione.* Per ipotesi, esiste una matrice $B$ tale che $AB = BA = I$. Dimostriamo che $B$, con tale proprietà, è unica: infatti, supponiamo che esista una ulteriore matrice $C$ tale che $AC = CA = I$. Allora si ha

$$CAB = (CA)B = IB = B$$
$$CAB = C(AB) = CI = C$$

che implica $B = C$. Possiamo dunque porre $A^{-1} = B$. $\square$

In questa sezione dimostreremo che una matrice quadrata di ordine $n$ arbitrario è invertibile se e solo se ha determinante non nullo, generalizzando cosi' l'analogo risultato già provato per le matrici di ordine 2. Inoltre daremo una formula esplicita per il calcolo della matrice inversa.

Ricordiamo che, dato l'elemento $a_{ij}$ della matrice $A$, la matrice aggiunta di $a_{ij}$, denotata con $A_{ij}$, è la sottomatrice di ordine $n-1$ ottenuta sopprimendo la $i$-esima riga e $j$-esima colonna di $A$.

**Proposizione** *Supponiamo* $\det A \neq 0$*, e consideriamo la matrice* $B = (b_{ij})$ *con elementi*

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}.$$

*Allora si ha* $AB = BA = I$*. In altre parole,* $B = A^{-1}$*.*

*Dimostrazione.* Omessa. □

La formula si esprime più semplicemente con l'introduzione del *complemento algebrico.*

## 6.1 Complemento algebrico di un elemento

Sia $A$ una matrice quadrata e sia $a_{ij}$ un suo elemento. Il *complemento algebrico di* $a_{ij}$ è il numero reale:

$$\bar{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Con questa notazione, le formule per il calcolo del determinante si semplificano. Ad esempio, lo sviluppo del determinante lungo la prima riga prende la forma:

$$\det A = a_{11}\bar{a}_{11} + a_{12}\bar{a}_{12} + \cdots + a_{1n}\bar{a}_{1n}.$$

Più in generale si ha:

**Proposizione** *Sia* $A$ *una matrice quadrata di ordine* $n$*. Allora, per ogni* $i = 1, \ldots, n$ *si ha:*

$$\det A = a_{i1}\bar{a}_{i1} + a_{i2}\bar{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\bar{a}_{in},$$

*che rappresenta lo sviluppo del determinante lungo la* $i$*-esima riga. Inoltre, per ogni* $k = 1, \ldots, n$ *si ha anche:*

$$\det A = a_{1k}\bar{a}_{1k} + a_{2k}\bar{a}_{2k} + \cdots + a_{nk}\bar{a}_{nk},$$

*che rappresenta la sviluppo del determinante di* $A$ *lungo la* $k-$*esima colonna.*

*Dimostrazione.* Questo fatto è una conseguenza immediata delle formule per il calcolo del determinante viste nella sezione precedente. □

In altre parole, il determinante si può calcolare in questo modo:

- Si sceglie una qualunque riga (o colonna).
- Si moltiplica ciascun elemento della riga (o colonna) scelta per il proprio complemento algebrico.

- Si somma il tutto.

Diamo ora un'espressione equivalente dell'inversa di una matrice.

**Proposizione** *Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine $n$ con determinante non nullo. Allora $A$ è invertibile e l'inversa di $A$ ha la seguente espressione:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A}^t.$$

*dove $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ indica la matrice dei complementi algebrici di $A$.*

Quindi l'inversa si ottiene prendendo la *trasposta* della matrice dei complementi algebrici e moltiplicando per $\dfrac{1}{\det A}$.

**Esempio** Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Dimostriamo che $A$ è invertibile e calcoliamo la sua matrice inversa.

*Soluzione.* Sviluppando lungo la terza colonna, ad esempio, si trova che $\det A = 6$. Calcoliamo la matrice dei complementi algebrici. Si ha $\bar{a}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$, etc. Tenendo conto dei segni, si ha che la matrice dei complementi algebrici è:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo ora trasporre $\bar{A}$ e moltiplicare per $\dfrac{1}{\det A}$. La matrice inversa è dunque:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\bar{A}^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si può verificare con un calcolo diretto che $AA^{-1} = I$. $\square$

**Esempio** La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile: infatti, essendo triangolare superiore, si vede immediatamente che ha determinante 1 (il prodotto dei suoi elementi diagonali). La sua inversa, procedendo come nel caso precedente, risulta essere:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che l'inversa è anch'essa triangolare superiore. Questo non è un caso.

• Sia $A$ una matrice triangolare superiore (risp. inferiore) invertibile. Allora $A^{-1}$ è triangolare superiore (risp. inferiore).

## 6.2 Un criterio necessario e sufficiente per l'invertibilità

Grazie alla proposizione precedente e al Teorema di Binet possiamo caratterizzare completamente le matrici invertibili.

**Teorema** *Una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.*

*Dimostrazione.* Esercizio. □

**Esercizio** Sia $A$ una matrice diagonale con elementi diagonali $d_1, \dots, d_n$. Verificare che $A$ è invertibile se e solo *tutti* gli elementi diagonali sono diversi da zero. In tal caso, l'inversa di $A$ è la matrice diagonale avente elementi diagonali $\frac{1}{d_1} \dots, \frac{1}{d_n}$.

## 6.3 Proprietà delle matrici invertibili

Iniziamo dalla seguente proprietà.

**Proposizione** *Se $A$ e $B$ sono invertibili allora $AB$ è invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

*Dimostrazione.* Esercizio. □

Indichiamo con $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ l'insieme delle matrici di ordine $n$ invertibili:

$$\mathbf{GL}(n, \mathbf{R}) = \{A \in \mathbf{Mat}(n \times n) : \det A \neq 0\}.$$

La proposizione precedente afferma che $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ è *chiuso* rispetto al prodotto righe per colonne.

**Esercizio** Dimostrare che, se $A$ è invertibile allora $A^{-1}$ è invertibile e si ha $(A^{-1})^{-1} = A$. Inoltre $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

**Esercizio** Verificare con un controesempio che la somma di due matrici invertibili potrebbe *non* essere invertibile.

**Esercizio** Dimostrare che, se $A$ è invertibile e $k \neq 0$, allora $kA$ è invertibile. Dare una formula per $(kA)^{-1}$.

**Esercizio** Dimostrare che, se $A$ è invertibile, allora anche $A^t$ è invertibile e si ha $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

# 7 Teorema di Cramer (caso generale)

In questa sezione generalizzeremo il teorema di Cramer a sistemi *quadrati,* cioè di $n$ equazioni in $n$ incognite, con $n$ arbitrario.

In generale, dato un sistema di $m$ equazioni in $n$ incognite, detta $A$ la matrice dei coefficienti (di tipo $m \times n$), $X$ il vettore colonna delle incognite (di tipo $n \times 1$) e $B$ il vettore colonna dei termini noti (di tipo $m \times 1$) possiamo esprimere il sistema nella cosiddetta *forma matriciale* :

$$S : AX = B.$$

Se il sistema è quadrato la sua matrice dei coefficienti sarà anch'essa quadrata.

**Teorema** a) *Sia $S : AX = B$ un sistema di $n$ equazioni in $n$ incognite tale che la sua matrice dei coefficienti $A$ sia invertibile. Allora $S$ è risolubile e ammette una e una sola soluzione data da:*

$$X = A^{-1}B.$$

b) *La soluzione è anche data dalle formule:*

$$x_i = \frac{\det A(i)}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n$$

*dove $A(i)$ è la matrice ottenuta da $A$ sostituendo alla $i$-esima colonna la colonna dei termini noti.*

La seconda parte del teorema è nota come *metodo di Cramer:* esso fornisce un' importante semplificazione del calcolo della soluzione dato in a).

*Dimostrazione.* a) È immediata: poiché $A$ è invertibile, esiste la matrice inversa $A^{-1}$. Moltiplicando ambo i membri di $AX = B$, a *sinistra,* per $A^{-1}$ otteniamo la formula $X = A^{-1}B$.
b) Omessa. Comunque si tratta di esplicitare ciascuna delle entrate della soluzione $X$. $\square$

**Definizione** *Un sistema quadrato di $n$ equazioni in $n$ incognite, con matrice dei coefficienti avente determinante non nullo, si dice* crameriano.

Dunque, un sistema crameriano ammette sempre una e una sola soluzione.

**Esempio** Discutere le eventuali soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite $x, y, z$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x + y = -1 \\ x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

*Soluzione.* La matrice dei coefficienti è $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Un calcolo mostra che $\det A = 6 \neq 0$ dunque il teorema garantisce che esiste un'unica soluzione. Applichiamo dunque il metodo di Cramer descritto nella parte b) del teorema. Si ha:

$$x = \frac{1}{6} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{6} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$z = \frac{1}{6} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

e l'unica soluzione è $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Potevamo trovare la soluzione anche calcolando $A^{-1}$ e quindi $X = A^{-1}B$, dove $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è la colonna dei termini noti. Tale procedura è, normalmente, piú lunga del metodo di Cramer. Ma poichè abbiamo già calcolato l'inversa (vedi sezione precedente), abbiamo, come verifica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

□

**Esercizio** Risolvere il sistema precedente con l'algoritmo di Gauss.

**Esempio** Discutere le eventuali soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite $x, y, z$:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x + y = -1 \\ x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$$

*Soluzione.* Abbiamo in questo caso, come matrice dei coefficienti: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Ma un calcolo mostra che $\det A = 0$. Dunque *non* possiamo applicare il teorema di Cramer; il sistema potrebbe non essere compatibile. In effetti, applicando l'algoritmo di Gauss si può verificare che $S$ non ammette soluzioni. $\square$

## 8 Determinante e algoritmo di Gauss

Vediamo ora alcune proprietà del determinante che permettono, a volte, di semplificarne il calcolo.

**Proposizione** a) *Se si scambiano due righe (o colonne) della matrice, il determinante cambia di segno. In particolare, se due righe (o colonne) sono uguali il determinante è nullo.*
b) *Se $A'$ si ottiene da $A$ moltiplicando una riga (o colonna) per il numero $k$, allora* $\det A' = k \det A$. *In particolare,* $\det(kA) = k^n \det A$, *dove $n$ è l'ordine della matrice.*
c) *Se si somma ad una riga (risp. colonna) un qualunque multiplo di un'altra riga (risp. colonna), il determinante non cambia.*

*Dimostrazione.* Poichè $\det A = \det(A^t)$, basta dimostrare le affermazioni riguardo alle righe della matrice. Daremo la dimostrazione nel caso in cui $n = 2, 3$: questo darà un idea della dimostrazione nel caso generale.
a) Questo fatto è immediato dalla definizione se la matrice è $2 \times 2$. Supponiamo ora che $A$ abbia ordine 3, e sia $A'$ la matrice ottenuta da $A$ scambiando fra loro, ad esempio, le prime due righe. Sviluppiamo il determinante di $A'$ lungo la terza riga: siccome a) è vera per le matrici di ordine due, otteniamo che $\det A' = -\det A$. Il generale, se $A'$ si ottiene da $A$ scambiando due righe qualunque, basta sviluppare il determinante di $A'$ lungo la riga non interessata dallo scambio. È chiaro ora come continuare se l'ordine $n = 4, 5, \dots$.

b) Basta sviluppare il determinante lungo la riga che si è moltiplicato per $k$.

c) Supponiamo che $n = 2$ e che $A'$ si ottenga da $A$, ad esempio, sommando alla seconda riga la prima moltiplicata per $k$. Esplicitamente:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c + ka & d + kb \end{pmatrix}.$$

Un calcolo mostra che, in effetti, $\det A' = \det A$. È chiaro a questo punto che l'affermazione è vera per l'ordine $n = 2$. Il caso $n = 3$ si riduce al caso $n = 2$ semplicemente sviluppando il determinante di $A'$ lungo la riga non interessata dall'operazione (ad esempio, se $A'$ si ottiene da $A$ sommando alla seconda riga la prima moltiplicata per $k$ svilupperemo il determinante di $A'$ lungo la terza riga). Dunque c) è vera per $n = 3$ e iterando via via l'argomento appena descritto otteniamo che c) è vera per ogni ordine $n$. $\square$

**Esempio** Dimostriamo che, se $A = \begin{pmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 125 & 126 & 127 \\ 150 & 151 & 152 \end{pmatrix}$, allora $\det A = 0$.

*Soluzione.* Moltiplichiamo la prima riga per $-1$ e sommiamo alla seconda ($R_2 \to R_2 - R_1$), e successivamente moltiplichiamo la prima riga per $-1$ e sommiamo alla terza ($R_3 \to R_3 - R_1$). Per la proposizione appena dimostrata, queste due operazioni non alterano il determinante. Dunque:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 25 & 25 & 25 \\ 50 & 50 & 50 \end{pmatrix}.$$

Ora moltiplichiamo la seconda riga per $-2$ e sommiamo alla terza. Si ha dunque:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 100 & 101 & 102 \\ 25 & 25 & 25 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Avendo una riga nulla, il determinante è nullo. $\square$

**Esempio** Calcoliamo il determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

*Soluzione.* Scambiando le prime due righe otteniamo la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

dunque $\det A = -\det A_1$. Ora applichiamo le operazioni $R_3 \to R_3 - R_1$ e $R_4 \to R_4 - 2R_1$. Otteniamo

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e $\det A_2 = \det A_1 = -\det A$. Ma $A_2$ ha due righe uguali: per la proposizione si ha $\det A_2 = 0$ e quindi anche $\det A = 0$. $\Box$

**Esercizio** Giustificare i seguenti passaggi, usando le parti b) e c) della Proposizione:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ 2 & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} &= \frac{1}{72}\det\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 4 & 6 & -3\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{72}\det\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 4 & 6 & -3\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

## 8.1 Calcolo del determinante con l'algoritmo di Gauss

Ricordiamo ora le operazioni elementari sulle righe di una matrice, usate nell'algoritmo di Gauss:

1) Scambiare fra loro due righe.
2) Moltiplicare una riga per uno scalare $k \neq 0$.
3) Sommare a una data riga un multiplo di un'altra riga.

Vogliamo vedere l'effetto di ciascuna di tali operazioni sul determinante della matrice (supposta, ovviamente, quadrata). Dalla proposizione, otteniamo rispettivamente:

1) Il determinante cambia di segno.
2) Il determinante viene moltiplicato per $k$.
3) Il determinante rimane invariato.

Applicando tali operazioni in successione osserviamo che, se il determinante è non nullo all'inizio, tale rimarrà dopo aver effettuato operazioni elementari sulle righe. Dunque:

**Proposizione** *Supponiamo di ridurre la matrice quadrata $A$ ad una matrice a scalini $\tilde{A}$ mediante l'algoritmo di Gauss. Allora* $\det A = 0$ *se e solo se* $\det \tilde{A} = 0$. *In particolare, $A$ è invertibile se e solo se $\tilde{A}$ è invertibile.*

In realtà, nella riduzione a scalini si possono usare solamente le operazioni 1) e 3); in tal caso, occorre solamente tenere conto del numero degli scambi di riga:

**Proposizione** *Supponiamo di ridurre la matrice quadrata $A$ ad una matrice a scalini $\tilde{A}$ utilizzando solamente le operazioni 1) e 3). Allora, se $s$ è il numero degli scambi, si ha:*

$$\det A = (-1)^s \det \tilde{A}$$

**Esempio** Calcolare il determinante di $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ usando l'algoritmo di Gauss.

*Soluzione.* Applicando in successione le operazioni:

$$\begin{aligned} R_3 &\to R_3 - R_1 \\ R_3 &\to R_3 - 2R_2 \end{aligned}$$

otteniamo $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ che è a scalini, dunque triangolare. Non ci sono scambi di righe: concludiamo che $\det A = \det \tilde{A} = -6$. □

**Esempio** Calcolare il determinante di $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ usando l'algoritmo di Gauss.

*Soluzione.* Scambiamo le prime due righe: $R_1 \leftrightarrow R_2$. Applichiamo poi, in successione, le operazioni:

$$\begin{aligned} R_3 &\to R_3 - R_1 \\ R_4 &\to R_4 - R_1 \\ R_3 &\to R_3 + R_2 \\ R_4 &\to R_4 + R_3 \end{aligned}$$

per ottenere la matrice a scalini $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Abbiamo effettuato un solo scambio: dunque

$$\det A = -\det \tilde{A} = -3.$$