Prof. Roberto Capone

Euclide (parte II)

Corso di Didattica della Matematica
2016/2017
Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria

Proprietà dei triangoli isosceli

Il triangolo isoscele ha almeno due lati congruenti, l'eventuale lato non congruente si chiama base, i due lati congruenti si dicono lati obliqui.

Il triangolo equilatero è un caso particolare di triangolo isoscele:
si dice che il triangolo equilatero è isoscele rispetto a qualsiasi lato preso come base

Euclide

Teorema diretto del triangoli isosceli

In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti.

Ipotesi: $AC \cong BC$
Tesi: $B\hat{A}C \cong A\hat{B}C$

Dimostrazione

Tracciamo la bisettrice CK dell'angolo in C .

I triangolo ACK e BCK sono congruenti per il primo criterio, infatti hanno:

$AC \cong BC$ per ipotesi, CK lato in comune

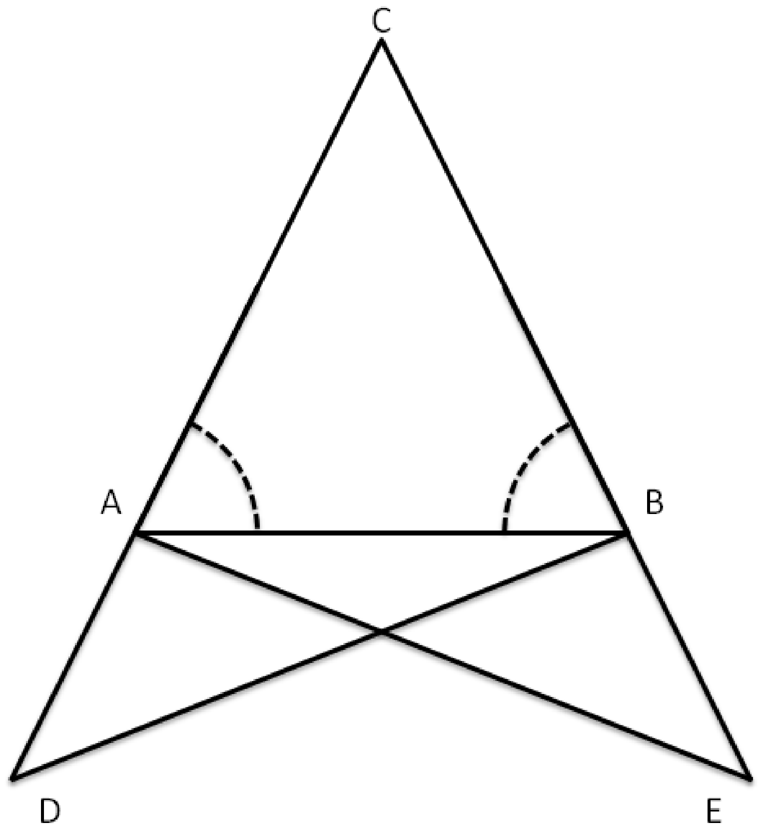
$$A\hat{C}K \cong B\hat{C}K$$

perché CK è la bisettrice dell'angoloin C .

Pertanto, essendo congruenti hanno tutti gli elementi congruenti, in particolare l'angolo in A è congruente all'angolo in B . Q.e.d.

Euclide

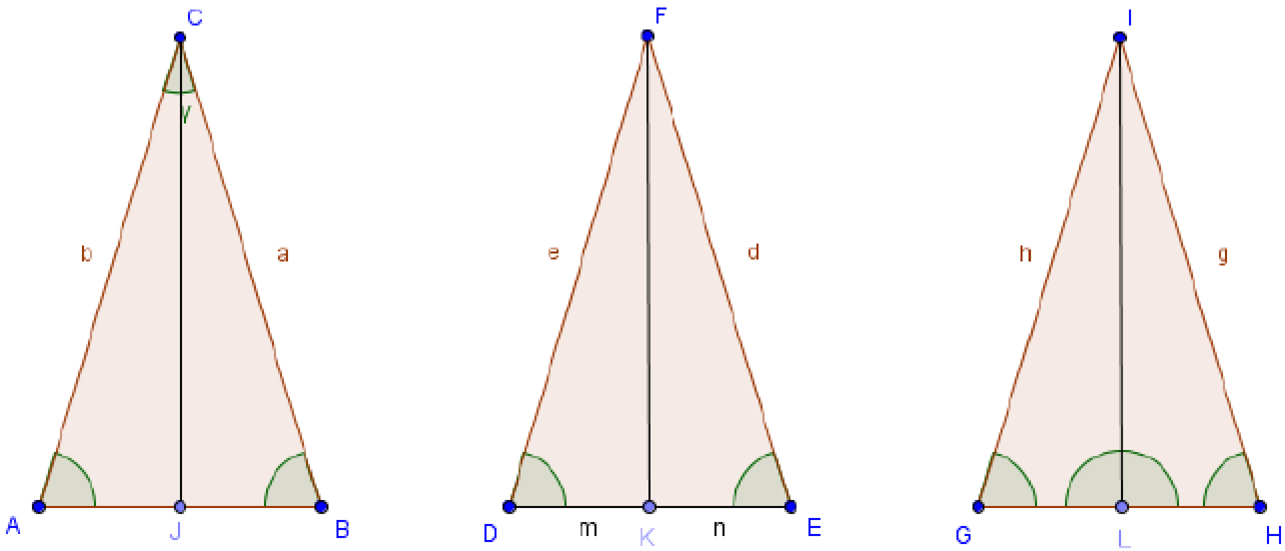
Il teorema precedente è invertibile, nel senso che è valido anche il teorema inverso, quello che si ottiene scambiando ipotesi e tesi. (si tratta del teorema del pons asinorum)



Euclide

Proprietà del Triangolo isoscele

In ogni triangolo isoscele, la mediana relativa alla base è anche altezza e bisettrice.



Corollari

Un triangolo equilatero è anche equiangolo.
Viceversa, se un triangolo è equiangolo, allora è equilatero.
Un triangolo scaleno non ha angoli congruenti.
Viceversa, se un triangolo non ha angoli congruenti, allora è scaleno.

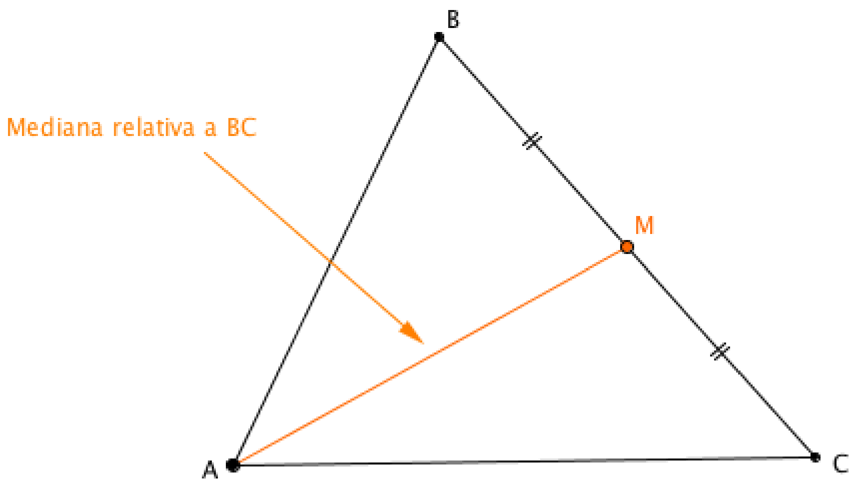
Euclide

Mediane e baricentro

Consideriamo un triangolo ABCABC ed individuiamo il punto medio di ciascun lato. Ogni punto medio così ottenuto può essere collegato con un segmento al vertice opposto.

Definizione

Si chiama *mediana relativa ad un lato* di un triangolo il segmento ottenuto collegando il punto medio del lato considerato con il vertice opposto al lato



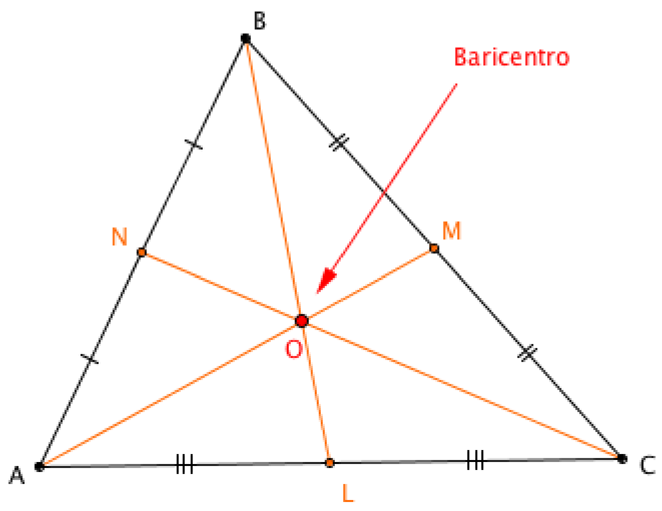
Euclide

Le mediane hanno le seguenti proprietà:

- Ogni mediana divide il triangolo in due triangoli equivalenti. Riferendoci alla figura precedente, abbiamo quindi Area(ABM)=Area(MAC).
- Le mediane di un triangolo si incontrano tutte nello stesso punto

Definizione

Il punto di incontro delle tre mediane di un triangolo è detto baricentro del triangolo



Elenchiamo qui alcune proprietà del baricentro:

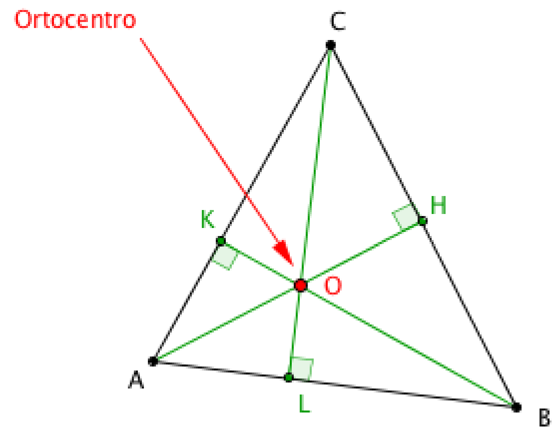
- esso divide la mediana in due segmenti: il segmento che ha per estremo un vertice del triangolo è il doppio dell'altro (nella figura precedente, ad esempio: $AO \cong 2OM$).
- è sempre un punto interno al triangolo.

Altezze e ortocentro

Dato un triangolo ABC, consideriamo le tre possibili altezze che possiamo costruire relativamente a ciascun lato. Si dimostra che le altezze si incontrano tutte in un medesimo punto.

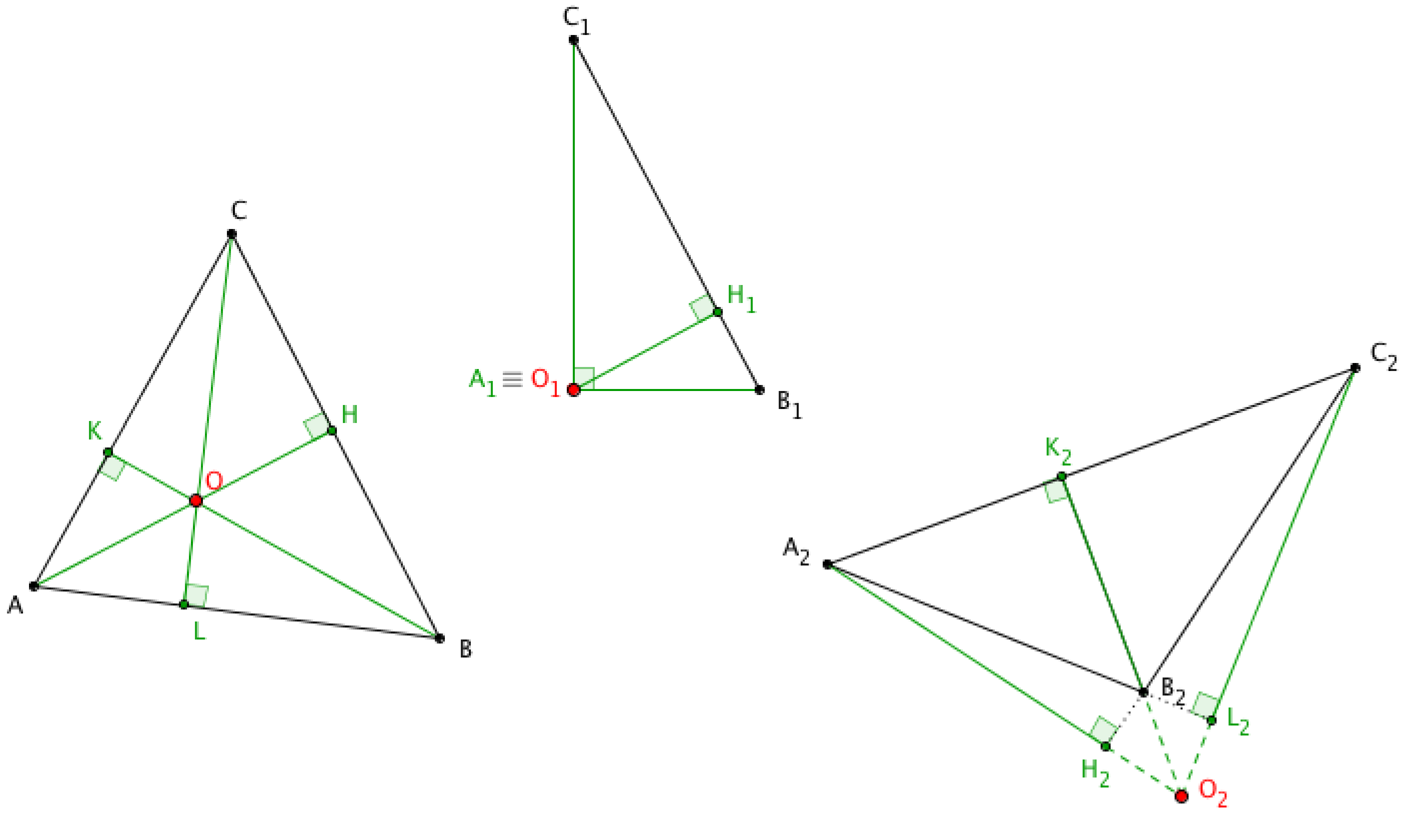
Definizione
Si chiama *ortocentro* di un triangolo il punto di incontro delle altezze relative ai lati del triangolo considerato

Euclide



La posizione dell'ortocentro può essere messa in relazione con le caratteristiche degli angoli di un triangolo.
L'ortocentro è un punto interno al triangolo se e solo se il triangolo è acutangolo.
L'ortocentro è un punto esterno al triangolo se e solo se il triangolo è ottusangolo.
L'ortocentro coincide con uno dei vertici del triangolo se e solo se il triangolo è rettangolo (e in questo caso l'ortocentro coincide con il vertice corrispondente all'angolo retto).

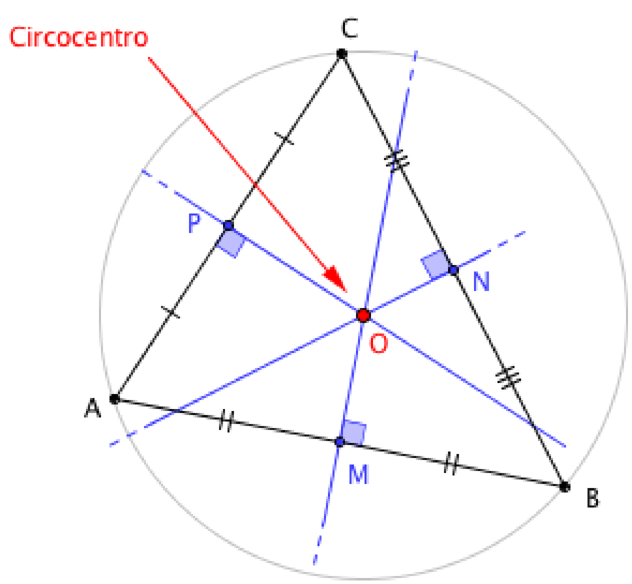
Euclide



Assi e circocentro

Consideriamo nuovamente un triangolo ABC e costruiamo i tre assi relativi ai tre lati del triangolo. Queste tre rette si intersecano nello stesso punto (fatto non banale, ma che si può dimostrare).

Definizione
Si chiama circocentro di un triangolo il punto di incontro delle assi relative ai lati del triangolo considerato.



Euclide

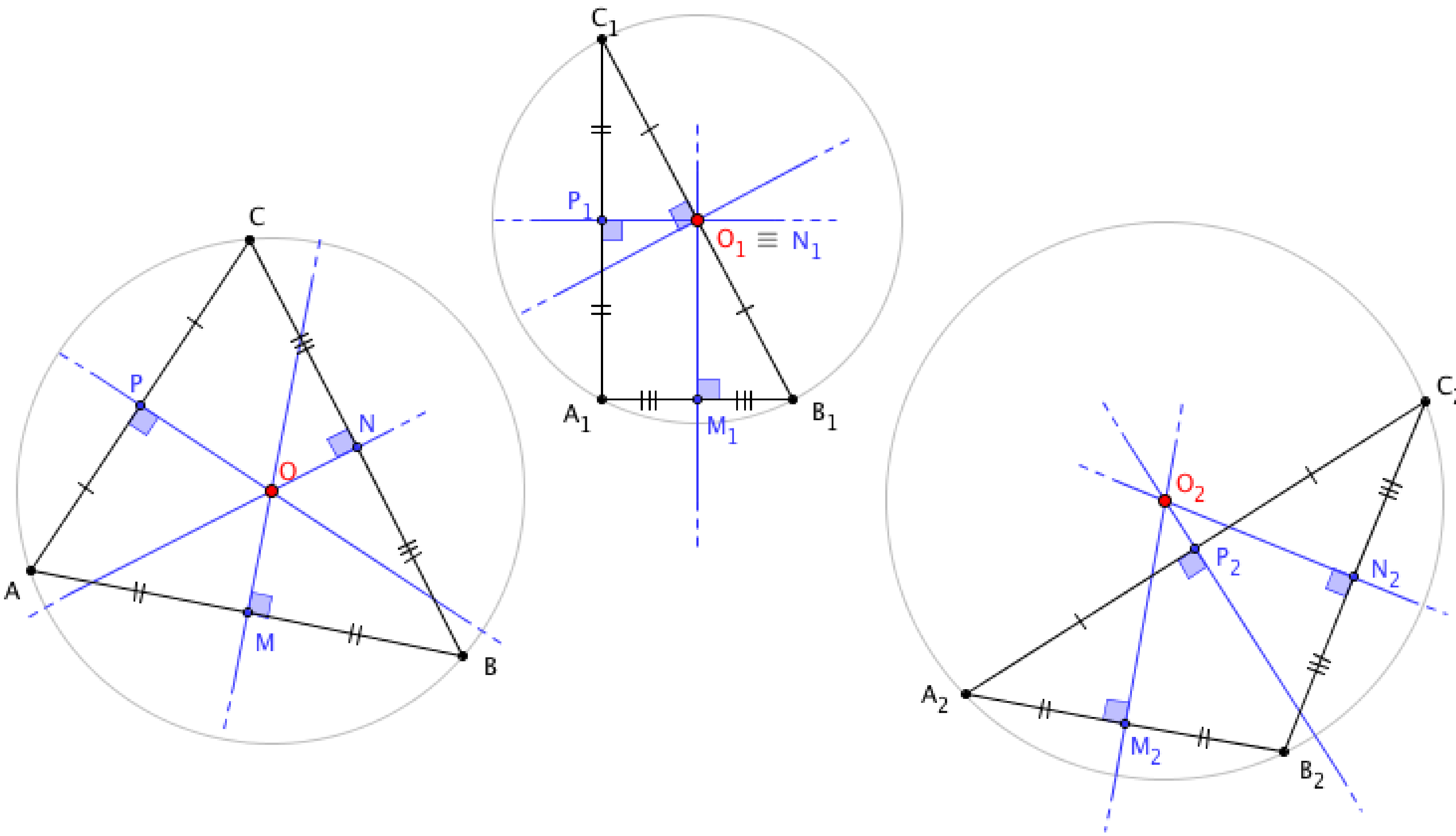
Tra le proprietà del circocentro, ricordiamo che:

- è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo;
- è equidistante dai vertici del triangolo (segue dalla proprietà precedente).

Come accade per l'ortocentro, la sua posizione determina le caratteristiche degli angoli del triangolo. In particolare:

- il circocentro è un punto interno al triangolo se e solo se il triangolo è acutangolo;
- il circocentro è un punto esterno al triangolo se e solo se il triangolo è ottusangolo;
- il circocentro è il punto medio di uno dei lati se e solo se il triangolo è rettangolo (ed in questo caso il lato in questione è l'ipotenusa del triangolo).

Euclide



Euclide

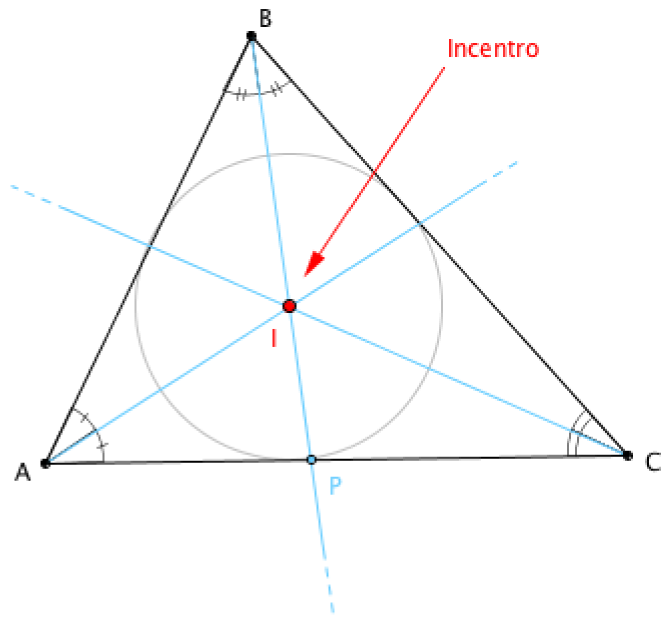
Teorema di Eulero
Il circocentro, il baricentro e l'ortocentro di un triangolo equilatero sono coincidenti.
Se il triangolo non è equilatero, tuttavia, questi tre punti notevoli hanno una interessante proprietà: essi sono *sempre allineati*, ovvero giacciono sulla medesima retta. Questa retta viene chiamata *retta di Eulero*.

Bisettrici e incentro

Nel triangolo ABCconsideriamo le tre bisettrici degli angoli $B\hat{A}C, A\hat{B}C\ e\ B\hat{C}A$. È possibile dimostrare che esse si incontrano in un solo punto.

Definizione

Si chiama **incentro** di un triangolo il punto di incontro delle bisettrici degli angoli interni al triangolo considerato.



Euclide

Proprietà dell’incentro.

- È sempre un punto interno al triangolo.
- È il centro della circonferenza inscritta nel triangolo.

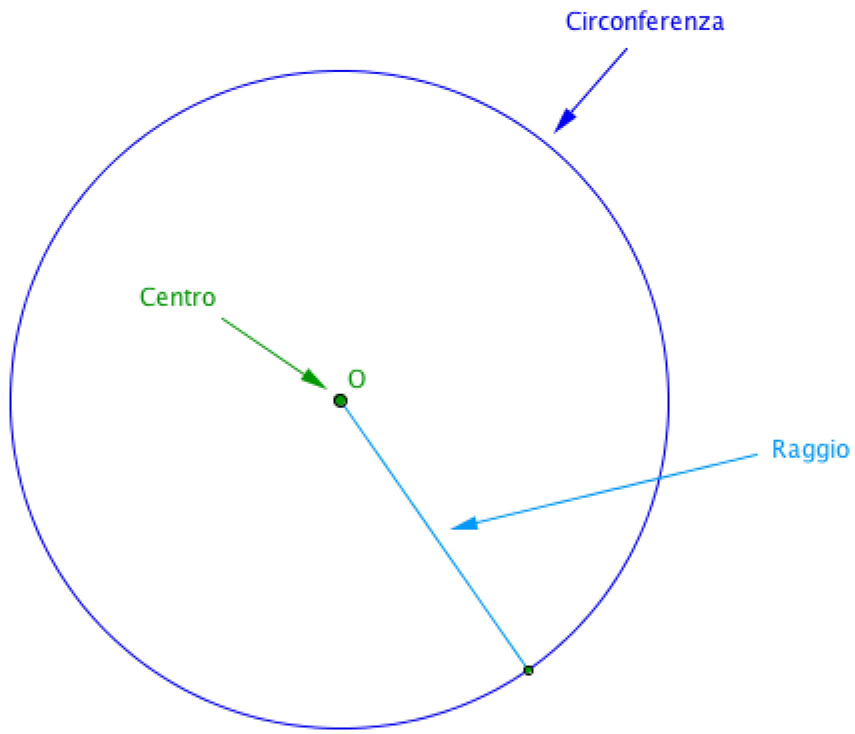
Come conseguenza della proprietà precedente:

- la distanza dell’incentro da un lato del triangolo è la stessa, indipendentemente da lato scelto.

- Ogni bisettrice divide il triangolo considerato in due triangoli più piccoli. Consideriamone uno (per esempio BCP) e prendiamo il lato costituito dalla bisettrice. L’incentro divide questo lato in due segmenti. La proporzione tra questi segmenti è la stessa che c’è tra gli altri due lati del triangolo considerato. Nel caso del triangolo BCP, BI:IP=BC:CP. Lo stesso discorso può essere ripetuto per il triangolo ABP, ottenendo BI:IP=AB:AP.

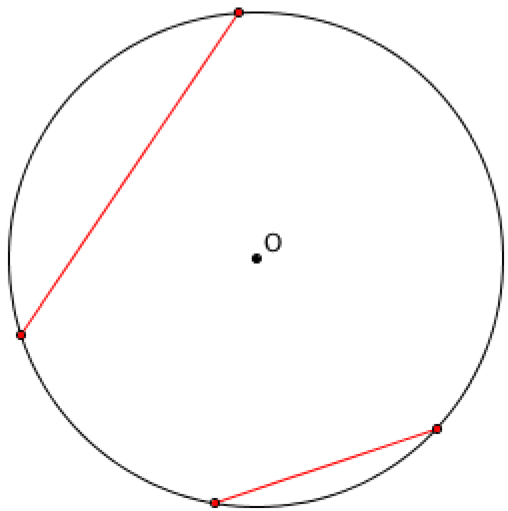
Euclide

Definizione
Consideriamo un punto O. Tutti i punti del piano che hanno la medesima distanza da O formano una figura geometrica, che chiamiamo circonferenza. Il punto O viene detto centro della circonferenza. La distanza assegnata che determina la circonferenza viene chiamato raggio.

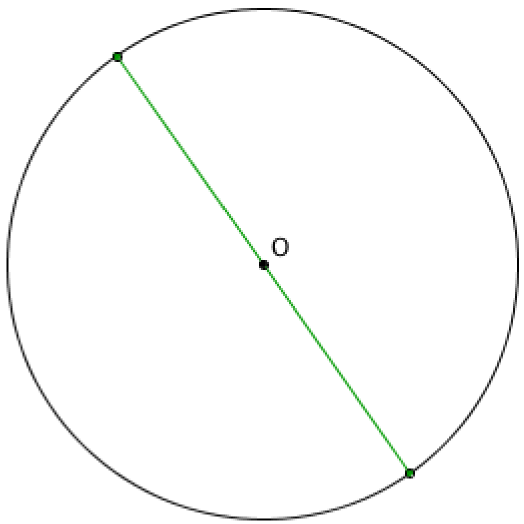


Euclide

Definizione
Ogni segmento che collega due punti sulla circonferenza si chiama *corda*.
Una corda di una circonferenza che passa per il suo centro si chiama *diametro*.



Corde di una circonferenza



Diametro di una circonferenza

Euclide

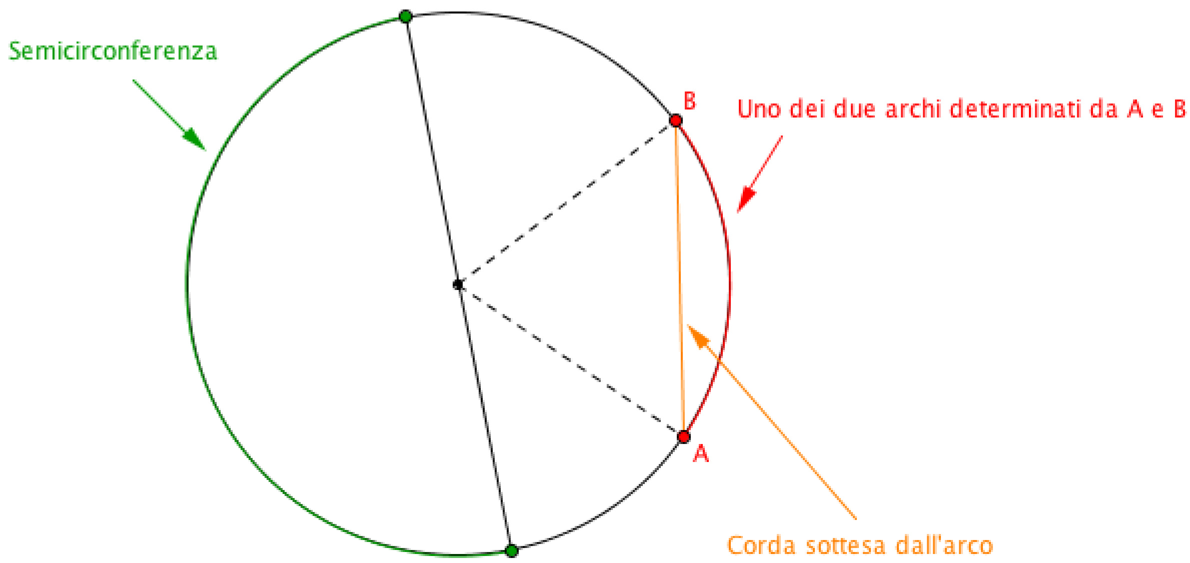
Definizione

La circonferenza è una linea chiusa, che suddivide il piano in *punti interni* e *punti esterni* alla circonferenza. La figura costituita dai punti interni alla circonferenza e dalla circonferenza stessa viene chiamata *cerchio*

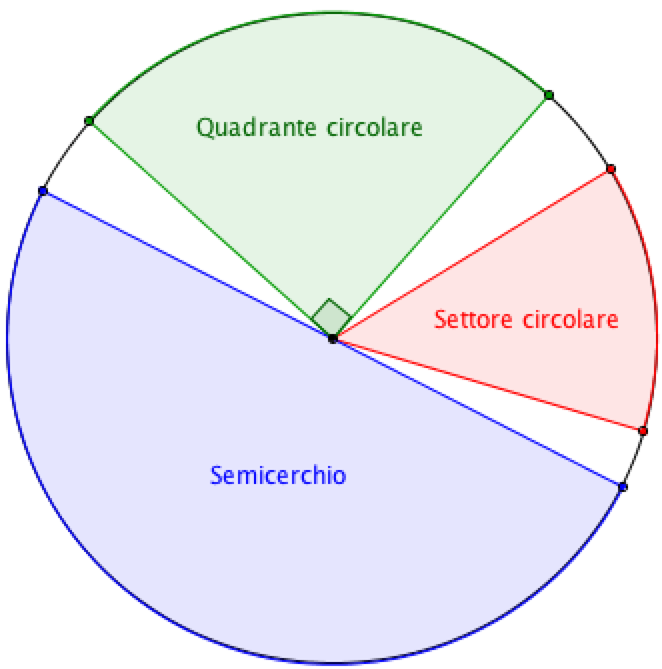
ATTENZIONE: Un errore molto comune è quello di scambiare il cerchio per la circonferenza, e viceversa. Ribadiamo che la circonferenza è solamente il contorno del cerchio; la circonferenza è quindi una *linea*, che si misura come una *lunghezza*, mentre il cerchio è una *superficie*, che si misura come un'*area*.

Euclide

Definizione
Consideriamo una circonferenza e due punti A e B su di essa. Si chiama arco di circonferenza di estremi A e B una delle due parti di circonferenza delimitate da A e B. Se colleghiamo A e B, otteniamo una corda, e diremo che la corda AB è sottesa da ciascuno dei due archi determinati da A e B.
Un arco che sottende un diametro è chiamato semicirconferenza.

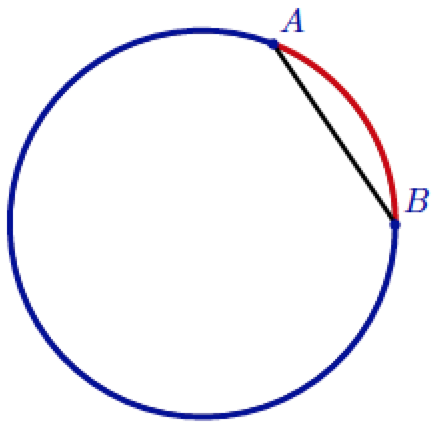


Definizione
La parte di piano racchiusa da un arco di circonferenza e dai raggi che passano per i suoi estremi si chiama *settore circolare*.
Un settore circolare determinato da due raggi perpendicolari viene chiamato *quadrante circolare*.
Un settore circolare in cui un raggio è il prolungamento dell'altro è detto *semicerchio*



Lunghezza di un arco di circonferenza

Definizione 1.
Una qualsiasi coppia di punti distinti appartenenti a una circonferenza la divide in due parti. Ciascuna di esse è detta arco di circonferenza e i due punti che lo individuano sono chiamatiestremi dell’arco.



Definizione 2.
Per lunghezza dell'arco di circonferenza si intende il numero reale positivo che esprime l’estensione dell’arco secondo la comune nozione intuitiva.

La lunghezza l di un arco può essere usata per definire l'estensione in radianti dell'angolo da esso sotteso.
Diciamo che la misura in radianti dell’angolo al centro sotteso dall’arco l è

$$\alpha = l/r$$

dove r è il raggio della circonferenza.

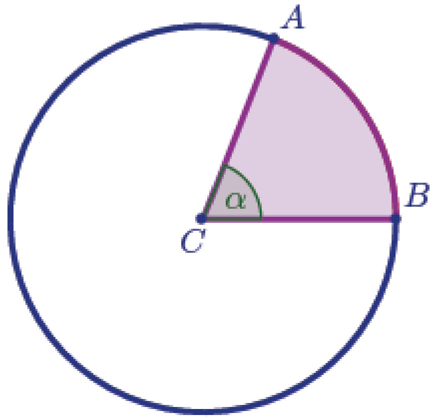
Viceversa, grazie alle formule inverse, possiamo ottenere la lunghezza l a partire dall'angolo α espresso in radianti:

$$l = \alpha \cdot r$$

Area del settore circolare

Definizione 3.
Chiamiamo settore circolare la figura piana che si ottiene dall’intersezione tra un cerchio e un suo angolo al centro. Nel caso particolare in cui l’angolo al centro sia piatto, il settore circolare acquista il nome particolare di semicerchio.

Euclide



Prendiamo in considerazione il settore circolare della figura qui sopra, indicando con r il raggio del cerchio e con αα l'angolo al centro. Visto che l'area del settore è proporzionale ad α, possiamo scrivere la seguente proporzione:

$$A_{cerchio} : 2\pi = A_{settore} : \alpha$$

Da cui ricaviamo il risultato che ci interessa:

$$A_{settore} = A_{cerchio} \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$$

Dal momento, poi, che $A_{cerchio} = \pi \cdot r^2$ giungiamo alla conclusione:

$$A_{settore} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{\alpha \cdot r^2}{2}$$

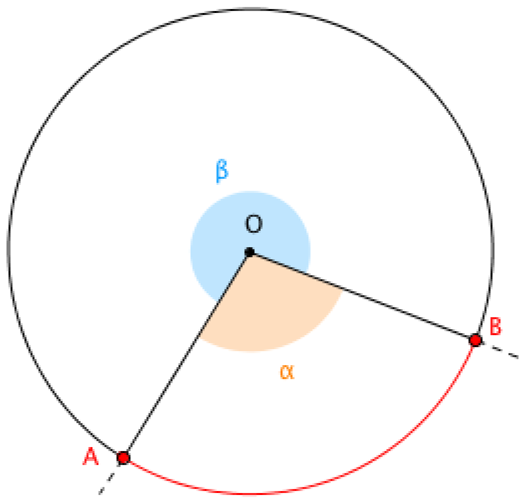
Se in quest'ultima sostituiamo infine α=l/r, otteniamo:

$$A_{settore} = \frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{2} lr$$

Euclide

Definizione

Un angolo al centro di una circonferenza è un angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza considerata.
I lati dell'angolo intersecano la circonferenza in due punti A e B; consideriamo l'arco AB che ha tutti i punti compresi nell'angolo al centro. Diremo che questo arco corrisponde all'angolo al centro, e che l'angolo al centro sottende l'arco considerato.



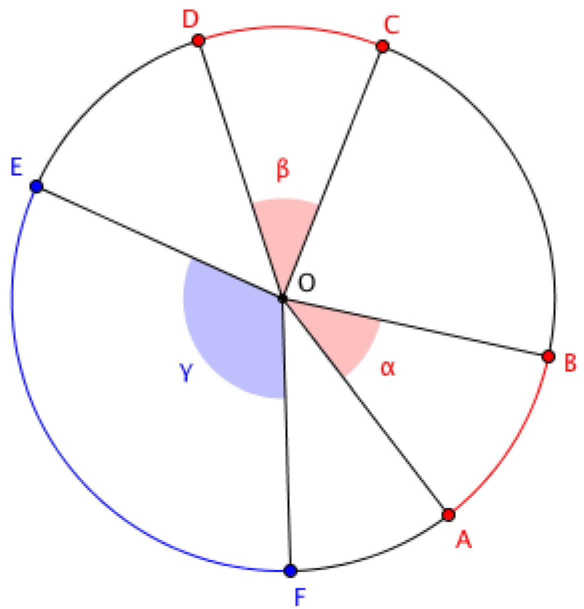
α e β sono angoli al centro

L'angolo α sottende l'arco AB
L'arco AB corrisponde all'angolo α

Euclide

Valgono le seguenti proprietà:

- la bisettrice di un angolo al centro divide a metà l’arco corrispondente;
- nella stessa circonferenza, due angoli al centro sono congruenti se e solo se gli archi corrispondenti sono congruenti;
- inoltre se un arco è maggiore di un altro arco, allora l’angolo che sottende il primo arco è maggiore dell’angolo che sottende il secondo (e viceversa).

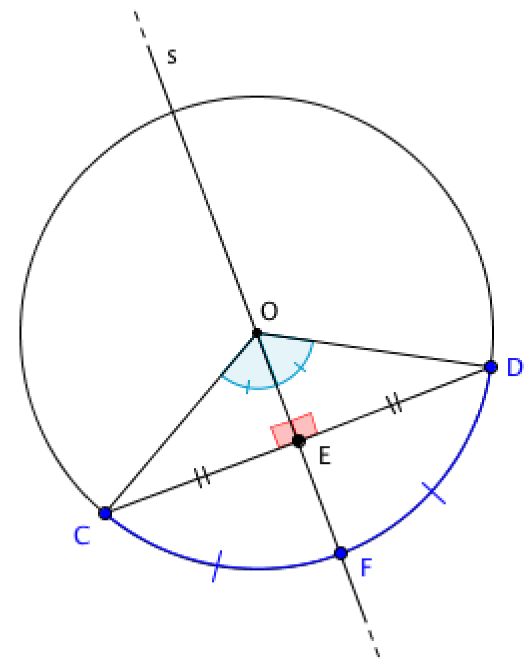


$$\alpha = \beta \iff \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$$

$$\gamma > \alpha \iff \overset{\frown}{EF} > \overset{\frown}{AB}$$

Euclide

Una retta che passa per il centro di una circonferenza è perpendicolare a una corda se e solo se divide a metà la corda stessa, l'angolo al centro e l'arco corrispondente.

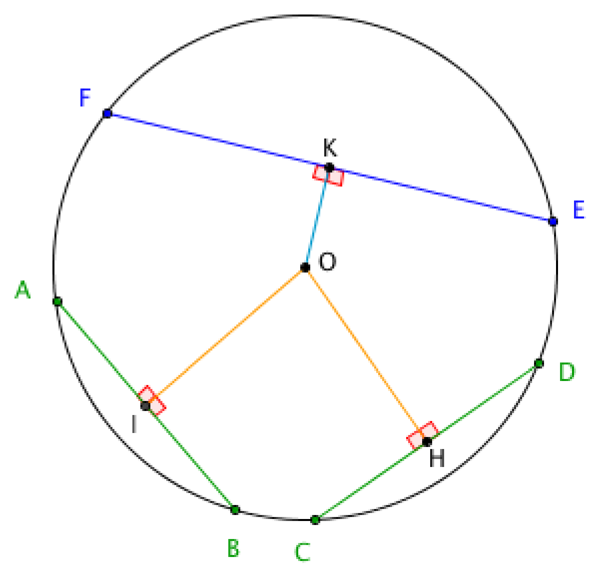


$$\left.\begin{array}{l} CE \cong ED \\ C\hat{O}E \cong E\hat{O}D \\ \overset{\frown}{CF} \cong \overset{\frown}{FD} \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad s \perp CD$$

Euclide

L'asse di una corda di una circonferenza passa per il centro della circonferenza stessa.

Nella stessa circonferenza, *corde congruenti sono ugualmente distanti dal centro*; inoltre se una corda è maggiore di un'altra corda, la distanza dal centro della prima corda sarà minore della distanza della seconda.

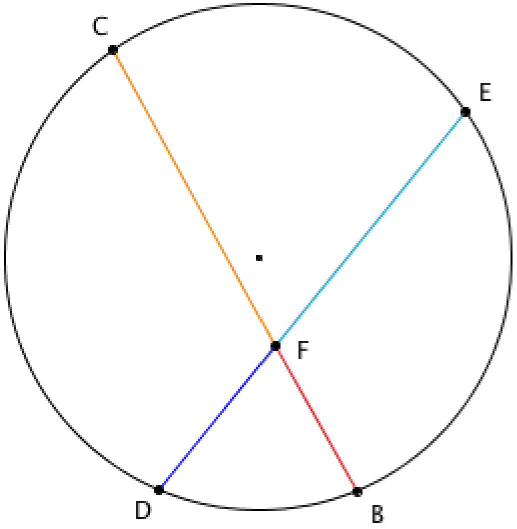


$$OI \cong OH \quad \Longleftrightarrow \quad \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$$

$$FE > AB \quad \Longleftrightarrow \quad OK < OI$$

Euclide

TEOREMA (delle corde):
Se due corde di una circonferenza si intersecano, i segmenti che si formano su una di esse sono i medi e i segmenti sull'altra sono gli estremi di una stessa proporzione.



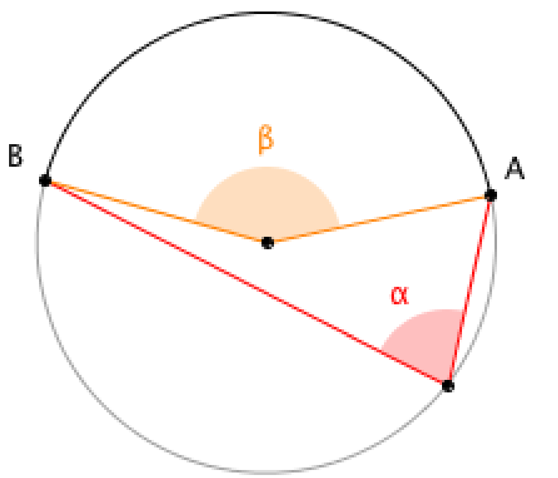
$$CF : FD = FE : FB$$

Euclide

Definizione

Un *angolo alla circonferenza* è un angolo convesso che ha vertice sulla circonferenza considerata, e tale per cui i suoi lati sono entrambi secanti la circonferenza, oppure uno secante e l'altro tangente.
Diremo che un angolo alla circonferenza *insiste* sull'arco che ha per estremi i punti di intersezione tra i lati dell'angolo e la circonferenza, ed è contenuto nell'angolo.
Dato un angolo alla circonferenza, si dice *angolo al centro corrispondente* l'angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza e che sottende l'arco su cui insiste l'angolo alla circonferenza.

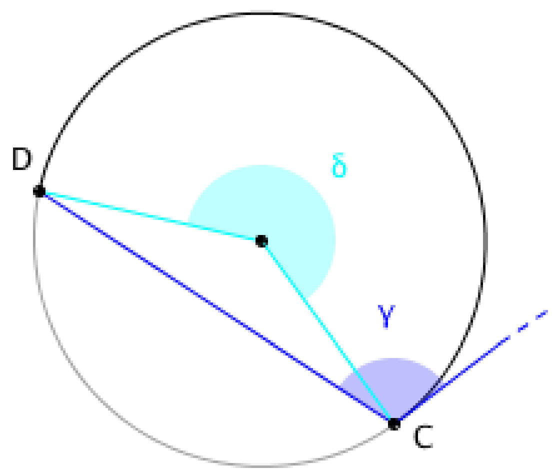
Euclide



α è un angolo alla circonferenza

α insiste su $\widehat{AB}$

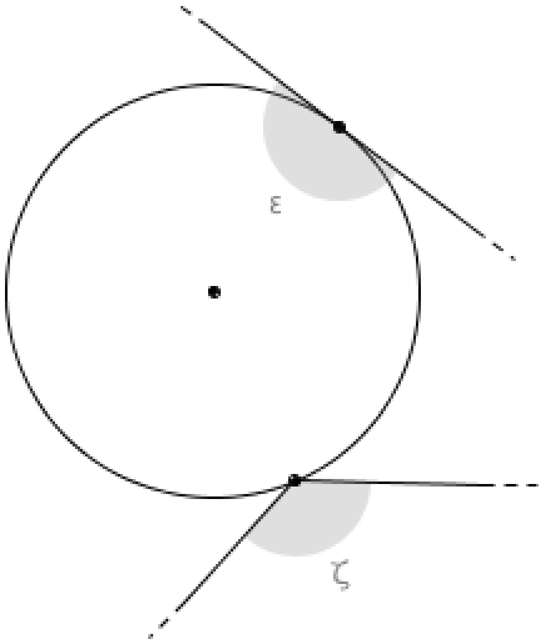
β è l'angolo al centro
corrispondente ad α



γ è un angolo alla circonferenza

γ insiste su $\widehat{CD}$

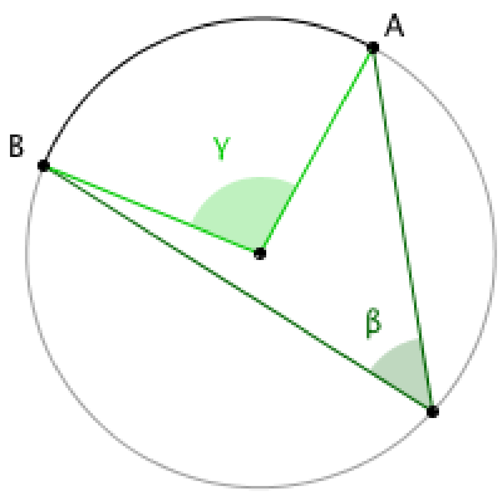
δ è l'angolo al centro
corrispondente a γ



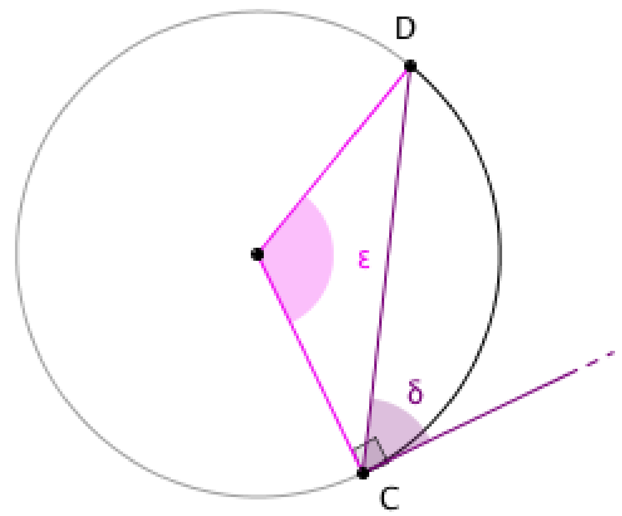
ε e ζ NON sono
angoli alla circonferenza

Euclide

TEOREMA: un angolo alla circonferenza è la metà del suo angolo al centro corrispondente.



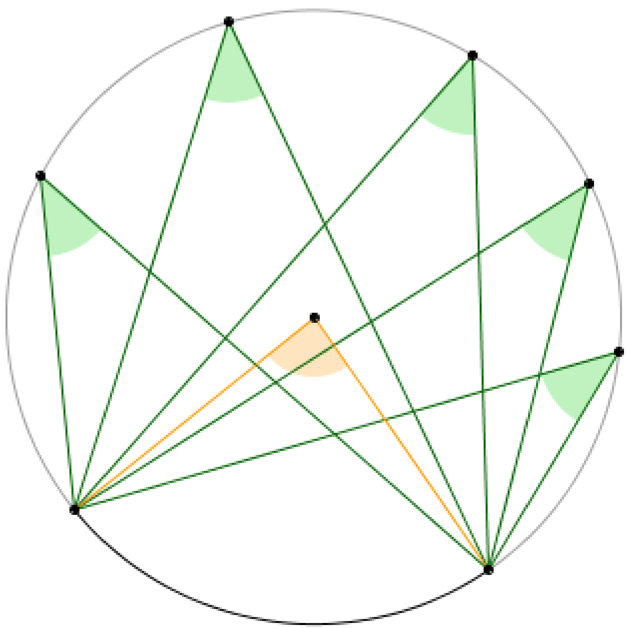
β e γ insistono su $\widehat{AB} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2\beta$



δ e ε insistono su $\widehat{CD} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 2\delta$

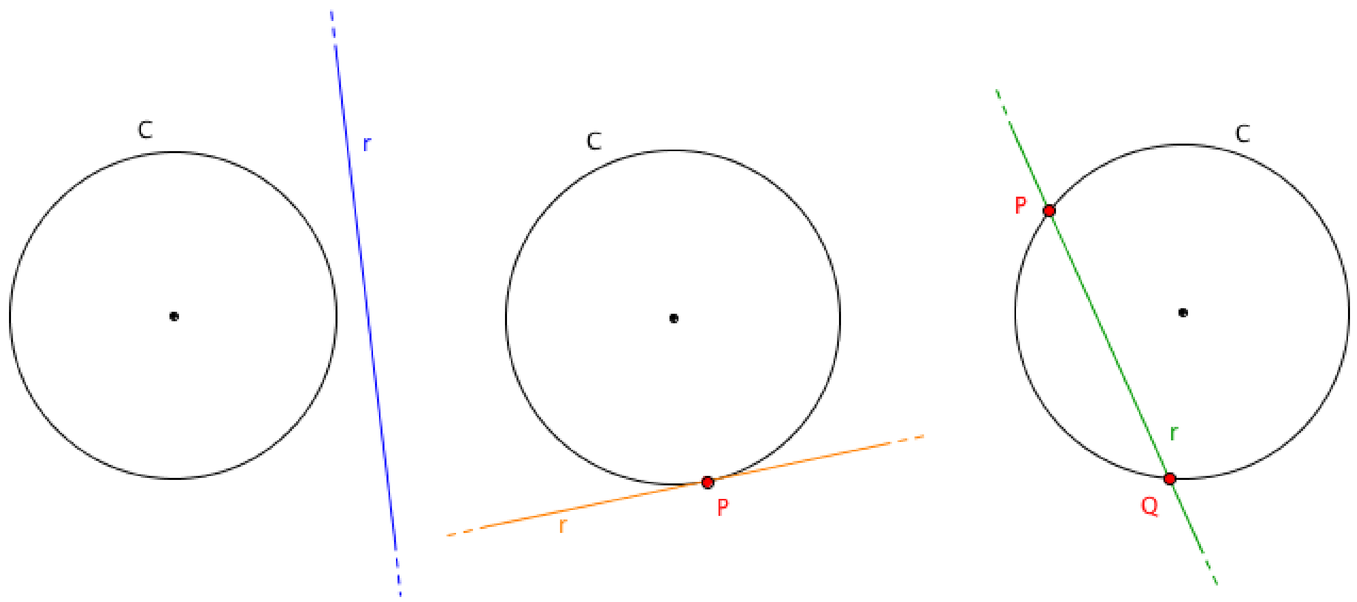
Euclide

Da questo teorema discendono immediatamente due proprietà molto interessanti:
ogni angolo che insiste su una semicirconferenza è retto (dato che il suo corrispondente angolo al centro è piatto);
gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono tutti congruenti: infatti, ciascuno di questi angoli ha il medesimo angolo al centro corrispondente, e pertanto sono tutti congruenti a metà dello stesso angolo



Euclide

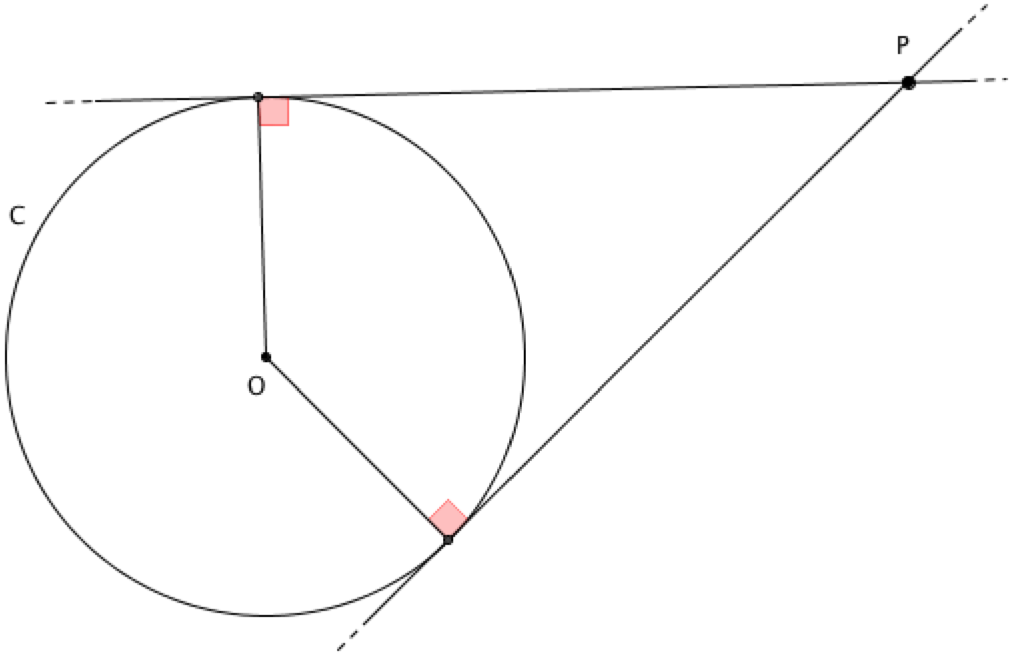
Definizione
Consideriamo una retta rr e una circonferenza C nel piano. Diremo che:
r è esterna a C se $C \cap r = \emptyset$, cioè se la retta e la circonferenza non hanno punti in comune;
r è tangente a C se $C \cap r = P$, cioè se la retta e la circonferenza hanno solo un punto in comune, che viene chiamato punto di tangenza;
r è secante di C se $C \cap r = \{P,Q\}$, cioè se la retta e la circonferenza hanno due punti in comune



Retta esterna alla circonferenza
Retta tangente alla circonferenza
Retta secante la circonferenza

Euclide

Elenchiamo alcune proprietà delle rette tangenti a una circonferenza.
Presa una tangente a una circonferenza, il raggio che ha come estremo il punto di tangenza è perpendicolare alla tangente considerata.
Preso un punto esterno a una circonferenza C, esistono sempre due rette tangenti a C che passano per il punto considerato. Se il punto è interno, da esso non passa alcuna tangente a C; se il punto appartiene alla circonferenza, invece, esiste un’unica tangente.

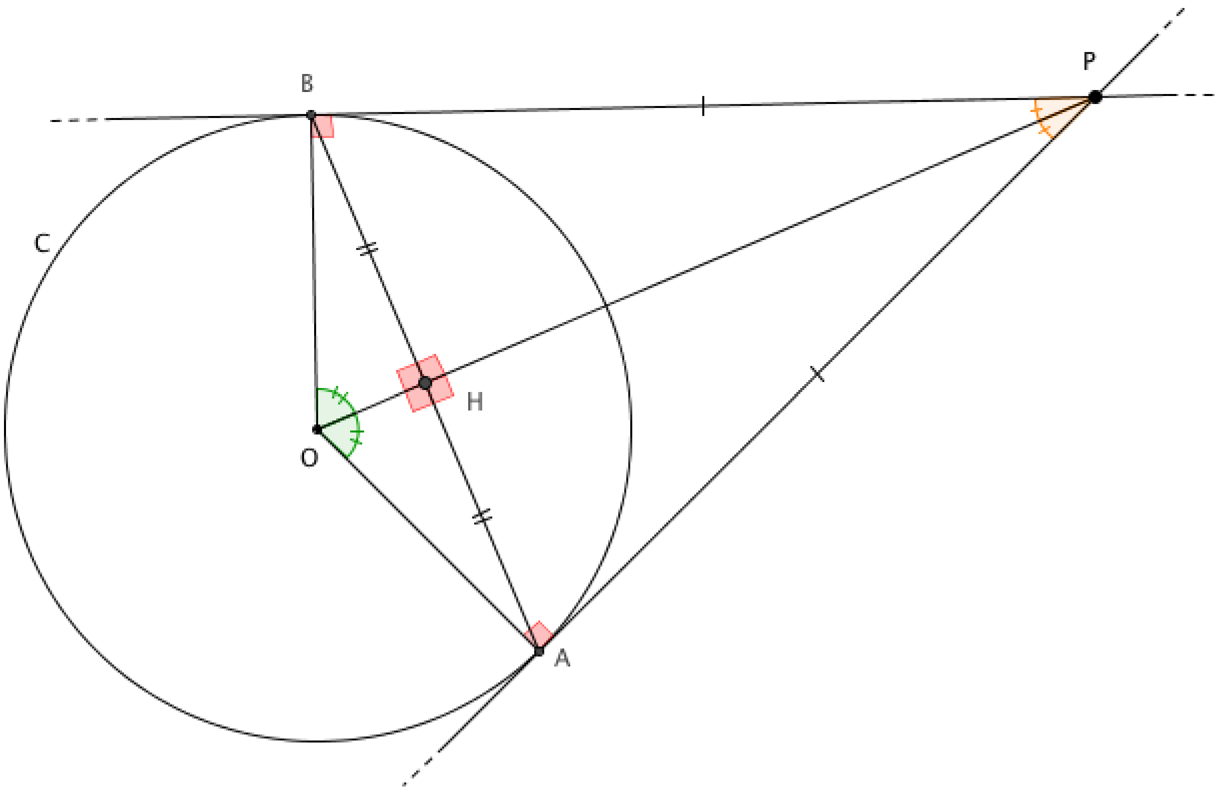


Le due tangenti a C che passano da P

Euclide

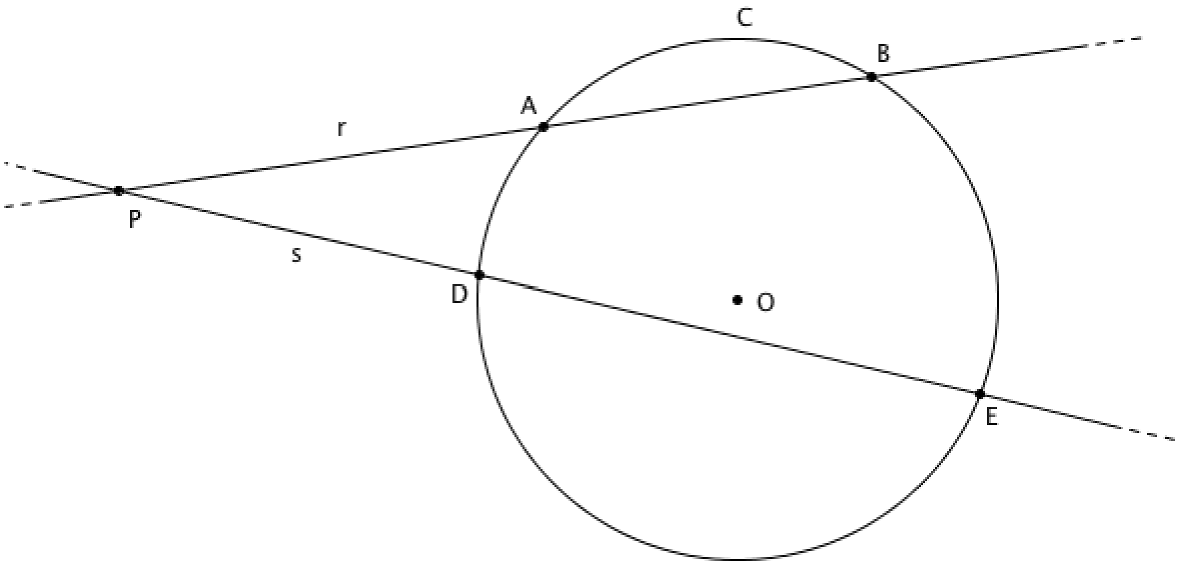
TEOREMA (delle tangenti):

Consideriamo un punto PP esterno a una circonferenza C di centro O, e da P conduciamo le tangenti a C. Chiamiamo A e B i punti di tangenza. Allora:
PA≅PB;
Il segmento PO divide a metà l'angolo $A\hat{P}B$ e anche l'angolo $A\hat{O}B$.



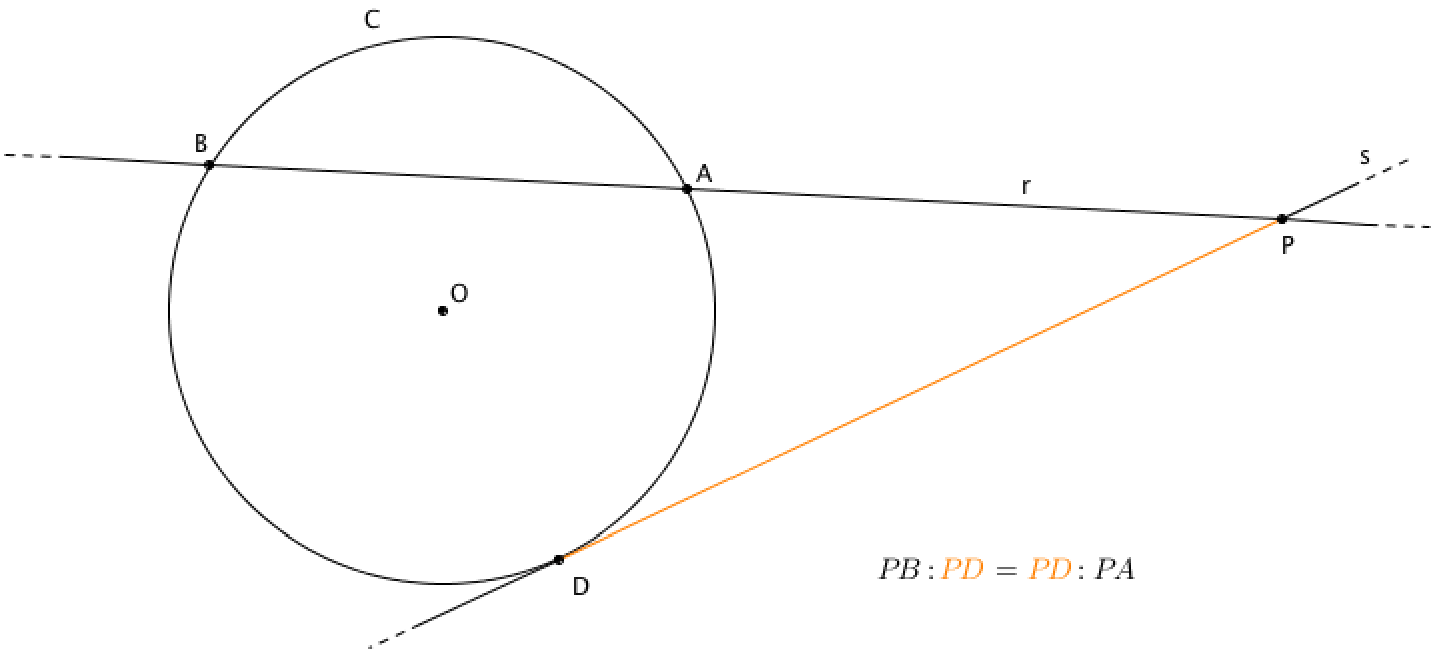
Euclide

TEOREMA (delle secanti):
Consideriamo una circonferenza C e due rette secanti rr, ss che hanno in comune un punto P esterno alla circonferenza. Detti A e B i punti di intersezione di r e C (con PA<PB), e detti D e E i punti di intersezione di s con C (con PD<PE) abbiamo la seguente proporzione: PA:PD=PE:PB.



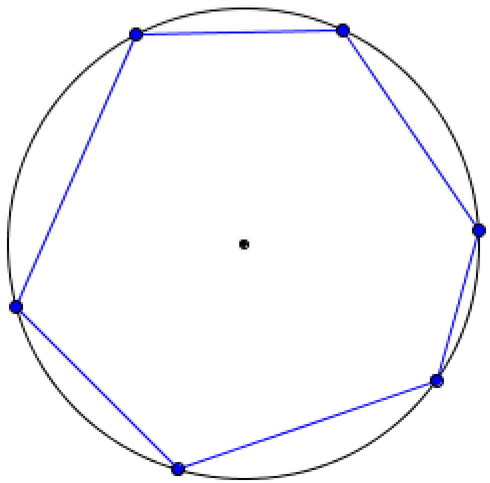
Euclide

TEOREMA (della secante e della tangente):
Consideriamo una circonferenza C, una retta secante r e una retta tangente s che hanno in comune un punto P esterno alla circonferenza. Detti A e B i punti di intersezione di r e C (con PA<PB), e detto D il punto di tangenza di ss rispetto a C, abbiamo la seguente proporzione: PB:PD=PD:PA.

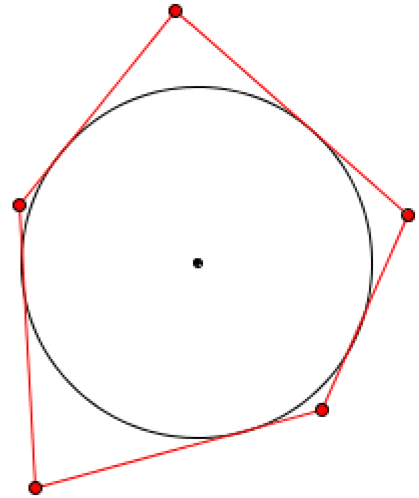


Euclide

Definizione
Un poligono si dice *inscritto* in una circonferenza quando i suoi vertici stanno sulla circonferenza data. In questo caso la circonferenza si dice *circoscritta* al poligono.
Un poligono si dice *circoscritto* a una circonferenza quando i suoi lati sono tangenti alla circonferenza data. In questo caso la circonferenza si dice *inscritta* nel poligono.



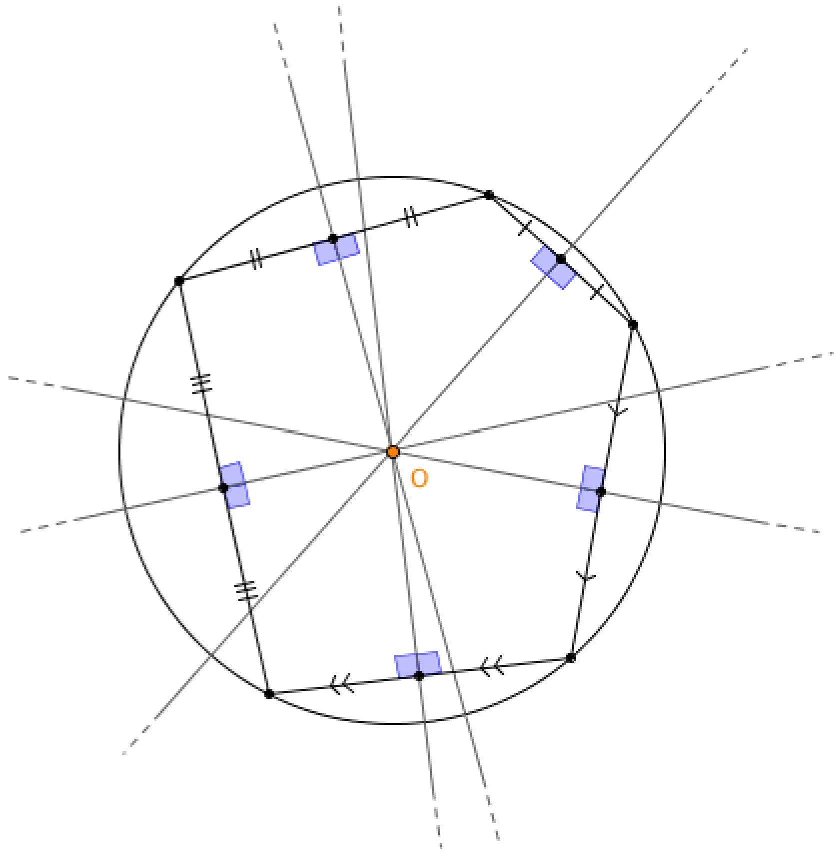
Poligono inscritto in una circonferenza
La circonferenza è circoscritta al poligono



Poligono circoscritto a una circonferenza
La circonferenza è inscritta nel poligono

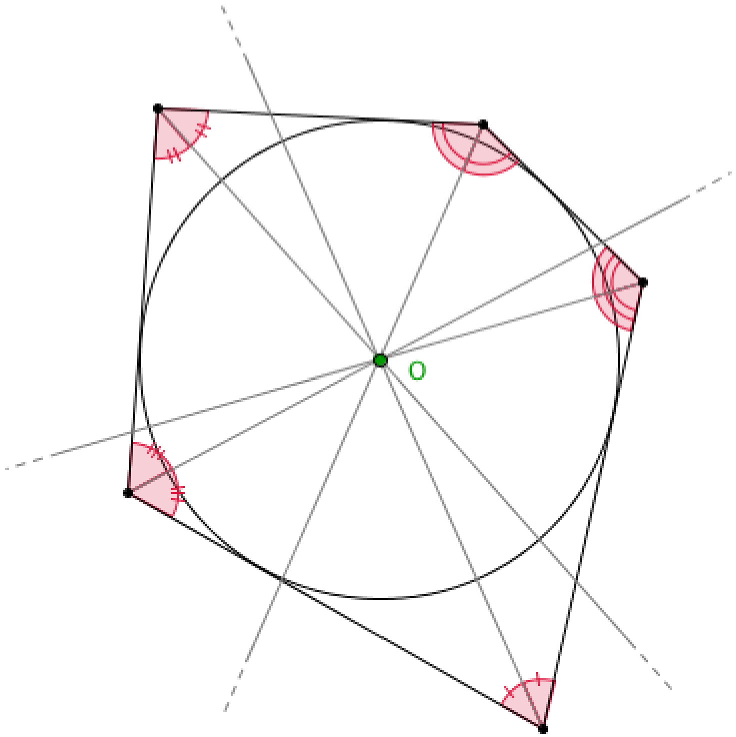
Euclide

TEOREMA (*Criterio di inscrivibilità di un poligono*):
Un poligono può essere inscritto in una circonferenza se e solo se gli assi dei lati si incontrano nello stesso punto, che è proprio il centro della circonferenza circoscritta al poligono.



Euclide

TEOREMA (*Criterio di circoscrivibilità di un poligono*):
Un poligono può essere circoscritto a una circonferenza se e solo se
le bisettrici degli angoli interni si incontrano nello stesso punto, che è proprio il centro della circonferenza inscritta al poligono.

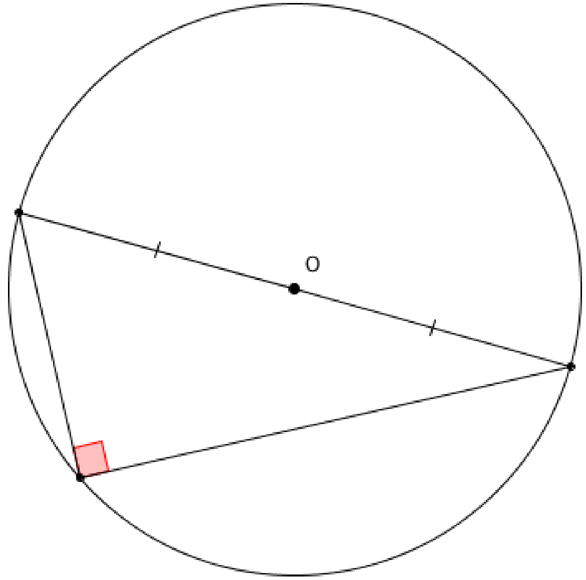


Euclide

TEOREMA: Dati tre punti nel piano, esiste sempre una unica circonferenza che li unisce.

TEOREMA: Un triangolo si può sempre inscrivere in una circonferenza, e si può sempre circoscrivere a una circonferenza

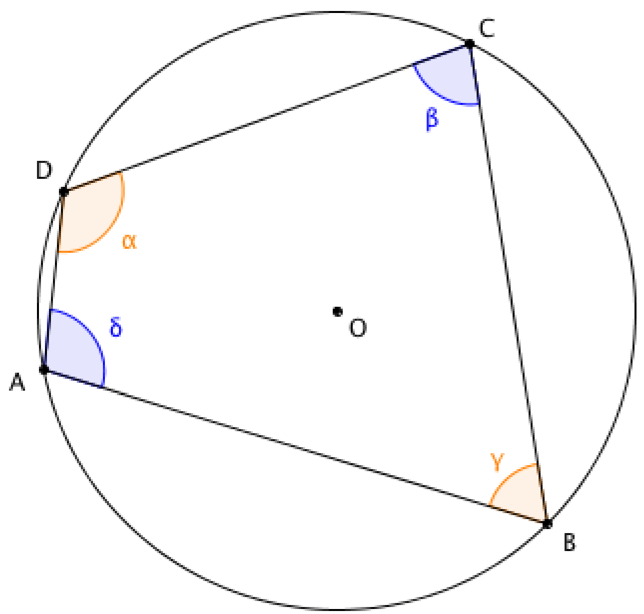
Ogni triangolo rettangolo può essere inscritto in una circonferenza; l'ipotenusa del triangolo è il diametro di tale circonferenza, e il suo centro è il punto medio dell'ipotenusa stessa. Per questo motivo, spesso si dice che *un triangolo rettangolo è inscrivibile in una semicirconferenza*



Un triangolo rettangolo inscritto in una semicirconferenza.

Euclide

TEOREMA: (*Criterio di inscrivibilità di un quadrilatero*):
Un quadrilatero può essere inscritto in una circonferenza se e solo se due angoli opposti sono supplementari.



Euclide

TEOREMA (Criterio di circoscrivibilità di un quadrilatero):
Un quadrilatero può essere circoscritto a una circonferenza se e solo se la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.