Bastoncini per moltiplicare e dividere

Introduzione

Il nostro modo di contare è senz'altro uno dei più potenti e completi che siano mai stati sviluppati. Ma è anche uno dei più complessi e più difficili da apprendere. Altre strategie, preliminari o alternative, altri punti di vista, più primitivi ma in alcuni casi non meno efficaci, aiutano a comprendere meglio alcuni aspetti del contare, a mettere a fuoco e superare certe difficoltà, ad afferrare meglio le potenzialità del nostro modo di contare, oltre che a scoprirne la sua storia affascinante.

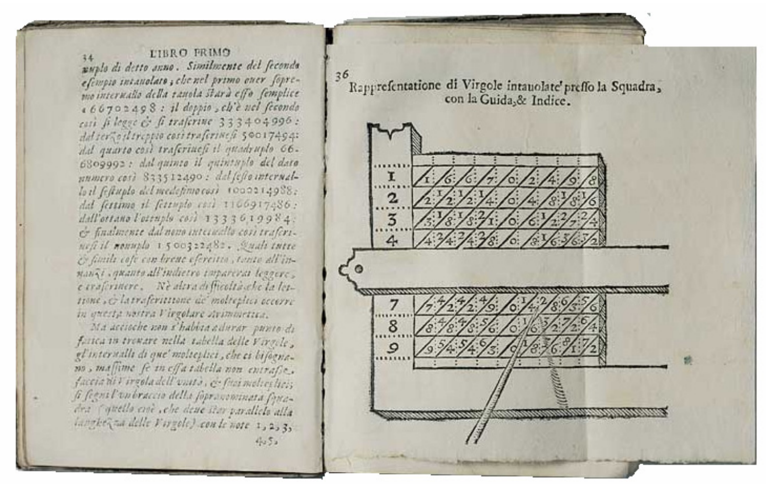
In questa prospettiva sono nati i laboratori de Il Giardino di Archimede dedicati ai sistemi di numerazione, pensati per le scuole di ogni ordine e grado e dedicati ad alcuni di questi antichi modi di contare. Si tratta di attività sperimentate con le classi dai nostri operatori.

Scopo di questo opuscolo, dedicato ai bastoncini di calcolo, è fornire agli insegnanti che desiderino riproporre le attività nelle proprie classi alcune informazioni teoriche necessarie per impadronirsi dell'argomento e una serie di suggerimenti pratici per lo svolgimento dei laboratori stessi.

1. Note storiche

Nel Seicento iniziano a svilupparsi strumenti di ausilio nel calcolo, che lo renderanno via via sempre più automatico. Fra i primi progenitori delle macchine calcolatrici troviamo i bastoncini di Nepero. Nepero è il nome latinizzato di John Napier, barone di Merchiston, nato nel 1550 e morto nel 1617.

I bastoncini di Nepero sono descritti nell'opera *Rabdologiae seu Numerationis per virgulas libri duo*, pubblicata nel 1617.



Nella prefazione dell'opera egli dichiara di essersi adoperato per eliminare la difficoltà e la lunghezza dei calcoli, che allontano molti dallo studio della matematica. Anche l'invenzione dei logaritmi, per la quale è maggiormente conosciuto, si colloca in questa direzione.

I bastoncini sono il primo di tre dispostivi descritti nell'opera. Egli li definisce “virgulae numeratrices” e “rabdologia” è il calcolo attraverso di esse. Nell'esecuzione delle moltiplicazioni i bastoncini permettono di eliminare il calcolo dei prodotti parziali e dunque di ridursi al calcolo di semplici somme.

Nepero ne descrive la costruzione e il modo d'uso. La versione che noi presentiamo è leggermente diversa da quella originale in cui le asticelle apparivano quattro a quattro sulle facce di un'asta a sezione quadrata. Il modo d'uso è lo stesso.

Oltre che la semplice moltiplicazione, Nepero mostra altre applicazioni dei bastoncini al calcolo. Noi le tralasceremo, limitandoci a mostrare come, con l'impiego di un ulteriore regolo, i bastoncini possano facilitare il calcolo delle radici quadrate.

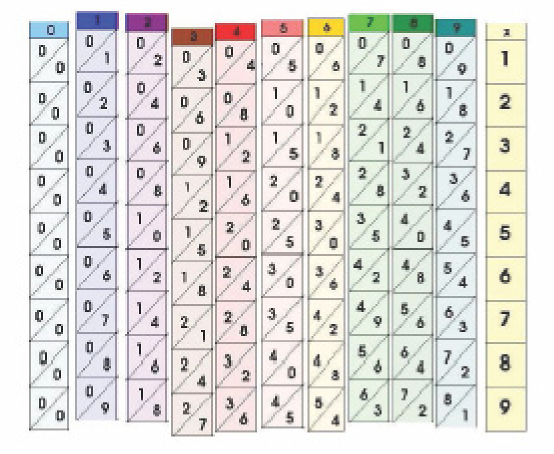
Una interessante variante dei bastoncini per moltiplicare, grazie alla quale non è più necessario neppure eseguire le somme (nelle moltiplicazioni per numeri ad una cifra) fu proposta nel 1885 dai francesi Henri Genaille, ingegnere civile, ed Edouard Lucas. Questi bastoncini vengono presentati in un'opera intitolata *Les reglettes multiplicatrices*.

Nella stessa opera di Genaille e Lucas, i due autori propongono anche i bastoncini, *reglettes multisectrices*, con i quali eseguire le divisioni per numeri ad una cifra. L'interesse pratico dei bastoncini per dividere risiedeva in speciali bastoncini *des financières* relativi a opportuni valori ricorrenti nel calcolo di interessi, che trovavano impiego nei calcoli di contabilità. Noi ci limiteremo però a descrivere i primi, per il calcolo ordinario delle divisioni.

Rispetto ai bastoncini di Nepero, quelli per moltiplicare di Genaille e Lucas eliminano il calcolo dei riporti nei prodotti per numeri a una cifra. Un'altra variante che va invece nella direzione di agevolare i prodotti per numeri a più cifre era stata proposta dallo stesso Nepero in appendice della *Rabdologia*. Si tratta del *Multiplicationis Promptuarium*, costituito da due tipi di bastoncini. Scegliendoli e sovrapponendoli opportunamente, il lavoro di chi calcola si riduce all'esecuzione di somme di cifre che appaiono in strisce diagonali. A seconda della lunghezza di bastoncini, i fattori possono, almeno in teoria, avere un numero di cifre considerevole. Nepero porta l'esempio di un numero di 10 cifre per un numero di 10 cifre.

2. La moltiplicazione con i bastoncini di Nepero.

Per eseguire le moltiplicazioni secondo l'idea di Nepero si usano dieci diverse asticelle numerate in alto da 0 a 9 e una ulteriore asticella, che chiameremo “regolo”, contrassegnata con il simbolo ×. Ciascuna asticella è divisa in nove quadrati su cui sono riportati dei numeri. A parte quelli del regolo, i quadrati sono separati in due triangoli dalla diagonale che va da destra in alto a sinistra in basso.

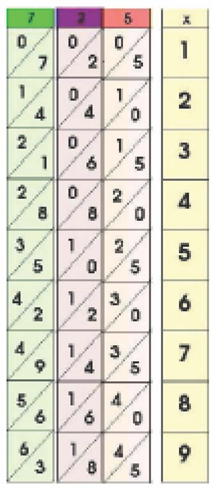


2.1. Istruzioni per l'uso.

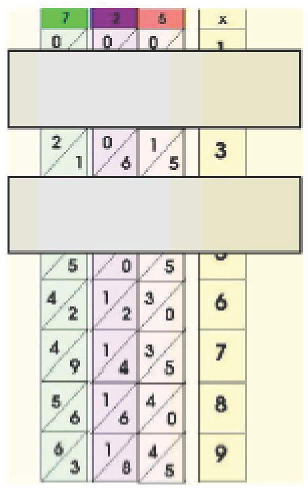
2.1.1. Moltiplicazioni per numeri a una cifra

Per eseguire il prodotto di un numero a più cifre per un numero ad una cifra si compone il numero a più cifre affiancando le asticelle contrassegnate dai numeri corrispondenti e, alla destra, si pone il regolo contrassegnato con il simbolo ×. Si considera solo la riga corrispondente al secondo fattore e per trovare il risultato si somma in diagonale.

Per eseguire ad esempio 725 × 3, si affiancano le asticelle contrassegnate con 7, 2, 5 in modo da comporre il numero 725. Sulla destra si pone il regolo:

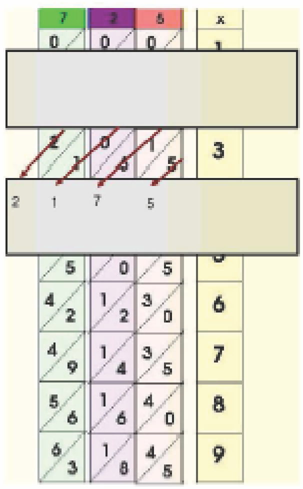


Poiché vogliamo moltiplicare questo numero per 3, isoliamo la terza riga, indicata dal numero 3 del regolo:

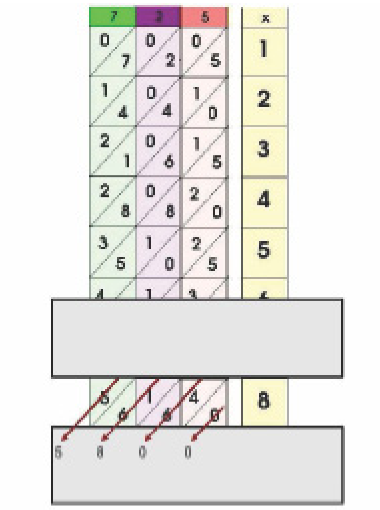


Ora sommiamo seguendo le diagonali, da destra a sinistra, i numeri che compaiono nei triangoli delle asticelle. Otteniamo: 5, 6+1=7, 0+1=1, 2.

Rileggendo il numero da sinistra a destra abbiamo il risultato: 2175.



2.1.2. Moltiplicazioni con riporto.

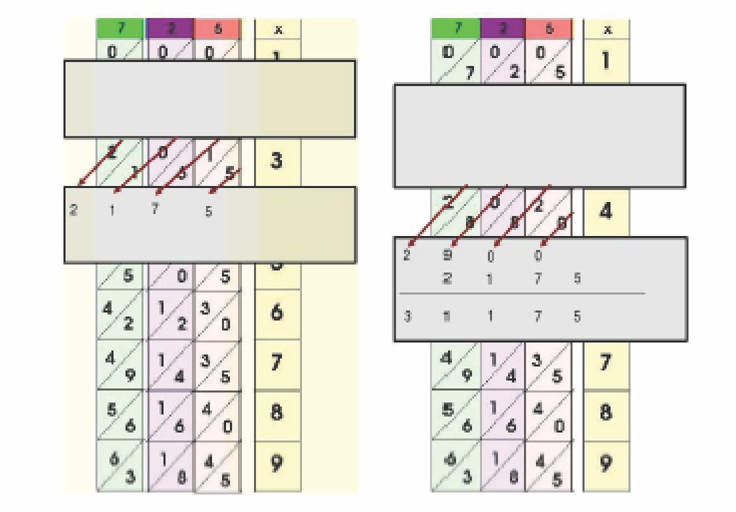


Nelle somme diagonali potrebbe essere necessario eseguire qualche riporto. Questo si fa nel modo usuale, riportando la cifra in somma nella diagonale successiva. Ad esempio, dovendo eseguire 725× 8 avrei: 0, 4+6=10 scrivo 0 e porto 1, 1+6=7 e 1 che portavo 8, 5. Dunque il risultato è 5800.

2.1.3. Moltiplicazioni per numeri a più cifre.

Come Nepero stesso indica, è possibile eseguire il prodotto di numero a più cifre per un numero a più cifre aiutandosi con i bastoncini a determinare i prodotti parziali. Se ad esempio vogliamo trovare il prodotto 725 × 43, si esegue prima 725 × 3, come descritto sopra, annotando il risultato parziale 2175. Si scorre ora alla quarta riga per eseguire 725 × 4. Si trascrive il secondo parziale, 2900, insieme al primo, avendo cura di incolonnarlo traslato di un posto a sinistra, scrivendo cioè il primo 0 in colonna col 7, il secondo 0 in colonna con l'1, il 9 in colonna con il 2, ed infine il 2.

Il risultato, 31175, si ottiene sommando in colonna i due prodotti parziali.



Invece di calcolare l'ultimo prodotto esplicitamente, si può anche sommarlo in diagonale con i prodotti parziali già ottenuti, facendo attenzione all'incolonnamento.

2.2. Come sono costruiti.

Osservando una delle asticelle si scopre immediatamente come è costruita: ognuno dei nove successivi quadrati porta il multiplo corrispondente. Così nel bastoncino del 5 troviamo 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45.

Per ciascun numero le unità sono scritte nel triangolo inferiore e le decine in quello superiore. A cosa serve questo inusuale posizionamento?

Quando si allineano più bastoncini i triangoli delle decine risultano sulla stessa diagonale di quelli delle unità del bastoncino che sta subito a sinistra. Si formano allora delle strisce diagonali (a forma di parallelogramma) in cui confluiscono un triangolo di un bastoncino e uno dell'altro.
In questo modo accade che le cifre si trovano nello stesso parallelogrammo sono dello stesso ordine decimale (e dunque pronte per essere sommate).

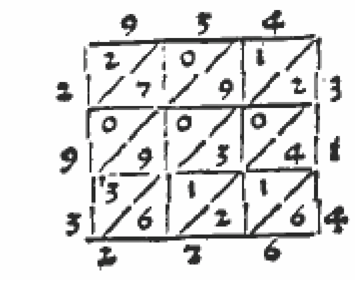
Prendiamo il primo esempio, 725×3. Partendo da destra, alla terza riga troviamo 15 nel bastoncino del 5, 06 in quello del 2, 21 in quello del 7, ossia nient'altro che 5×3, 2×3, 7×3. Quando andiamo a osservare le fasce diagonali abbiamo nella prima fascia a destra solo il 5 (un solo triangolo), nella seconda 1+6 (nel parallelogramma formato dal triangolo rosa con l'1 e da quello viola con il 6). L'1 del primo bastoncino (le decine) si somma con le 6 unità del secondo. Proprio come deve essere! Infatti il 6 sono in realtà decine: quando facciamo 2×3 stiamo moltiplicando 2 decine per 3 unità e dunque otteniamo 6 decine, che vanno sommate alle decine ottenute dal 5×3. In modo analogo il 21 ottenuto da 7×3 sono centinaia, o meglio 1 centinaio e 2 migliaia e dunque devono andare in fasce diagonali successive.

In altre parole la disposizione diagonale dei multipli in ogni asticella e la somma dentro i parallelogrammi è l'artificio grafico che corrisponde alla proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma per cui 725×3 è 5×3+20×3+700×3.

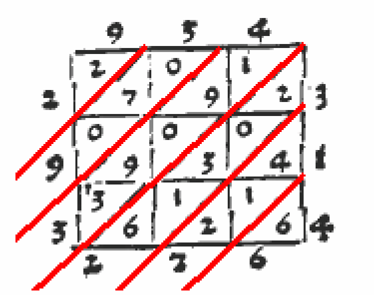
2.3. Osservazioni.

L'idea che sta alla base del funzionamento dei bastoncini di Nepero è la stessa di un algoritmo per eseguire le moltiplicazioni noto come “moltiplicazione per gelosia”. Si tratta di un procedimento usato dagli arabi a partire dal XIII secolo e molto diffuso nei trattati d'abaco.

Per eseguire il prodotto di un numero a *m* cifre per uno a *n* cifre, si disegna una griglia di *m* quadretti per *n* quadretti, dove *m* e *n* sono il numero di cifre del primo e del secondo fattore.



Nell'esempio, tratto dall'*Aritmetica di Treviso* del 1478, si moltiplica 934 per 314. Ogni quadretto è diviso in due triangoli tracciando una diagonale. Si dispongono i due fattori attorno alla griglia. In ogni quadretto si inserisce il risultato del prodotto delle cifre dei fattori che identificano la riga e la colonna del quadretto stesso, ponendo le unità nel triangolo basso, le decine in quello alto. Per ottenere il risultato si somma lungo le diagonali a iniziare da destra, con eventuali riporti nella diagonale successiva.



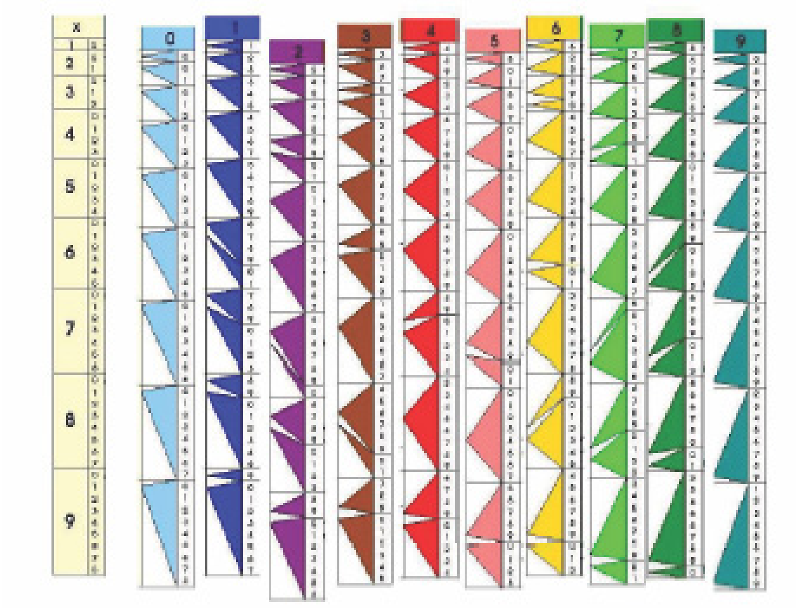
Si ottiene così 6, 4+1+2 cioè 7, 2+0+1+3+6 cioè 2 e porto 1, e così via fino all'ultima fascia che contiene solo il 2. Il risultato si legge a partire da quest'ultima cifra: 293276.

I bastoncini di Nepero permettono di eseguire la moltiplicazione per gelosia senza costruirsi la griglia e soprattutto senza dover calcolare o conoscere i prodotti dei singoli fattori, ossia senza conoscere le tabelline!

3. La moltiplicazione con i bastoncini di Genaille-Lucas.

La variante dei bastoncini ideata da Genaille e Lucas e presentata nel 1885 nel libro *Les réglettes multiplicatrices* permette di semplificare ulteriormente il lavoro di calcolo, eliminando le somme diagonali. Nella moltiplicazione di un numero a più cifre per un numero ad una cifra si tratta ora solo di posizionare correttamente le asticelle e leggere direttamente il risultato, senza nessun calcolo.

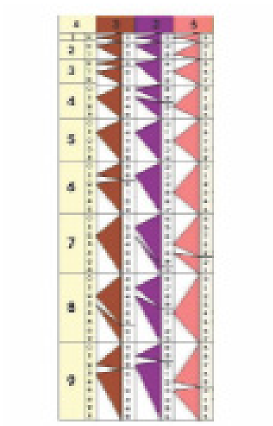
Si hanno anche qui dieci asticelle, numerate da 0 a 9, e un regolo contrassegnato con il simbolo ×. Le asticelle e il regolo sono divise in nove righe, di ampiezza crescente. Alla destra presentano una colonnina con un certo numero di cifre: una sola nella prima riga, due nella seconda, tre nella terza, ..., nove nella nona. Nelle asticelle, per ogni riga vi sono poi uno o due triangoli, con un lato appoggiato alla colonnina e il vertice opposto che punta al bordo dell'asticella. Nel regolo invece le righe sono numerate da 1 a 9.



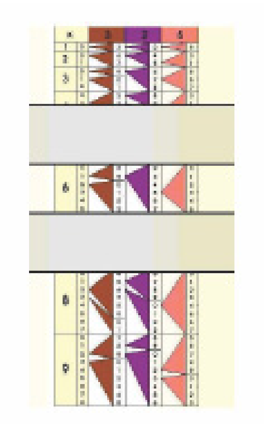
3.1. Istruzioni per l'uso.

3.1.1. Moltiplicazioni per numeri a una cifra.

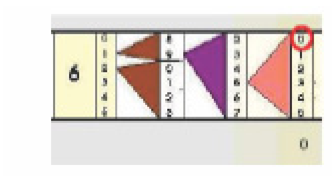
L'apparenza dei bastoncini è più complessa rispetto a quelli di Nepero, ma il loro utilizzo risulta più immediato.



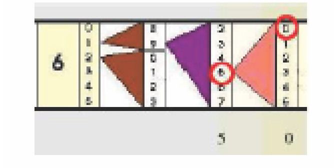
Per eseguire il prodotto di un numero a più cifre per un numero ad una cifra si compone il numero a più cifre affiancando le asticelle contrassegnate dai numeri corrispondenti e, alla sinistra, si pone il regolo contrassegnato con il simbolo ×. Per calcolare ad esempio 325 per 6, per prima cosa si compone il 325 scegliendo le asticelle corrispondenti al 3, al 2, al 5. Si aggiunge sulla sinistra il regolo.
Si procede considerando solo la riga corrispondente al secondo fattore. Nel nostro caso la sesta.



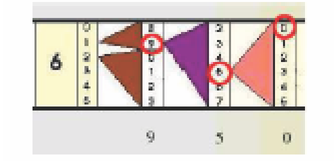
A questo punto si va a leggere il risultato. Questo è dato dalle cifre che si individuano partendo dalla asticella di destra, in cui si sceglie sempre la cifra che sta più in alto, e procedendo verso sinistra, seguendo le punte dei triangoli come fossero imbuti che puntano alla successiva cifra da scegliere.



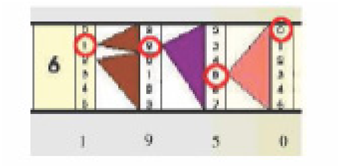
Nel nostro esempio, la cifra più a destra sarà lo 0 (la più in alto), che annotiamo sul foglio:



Il triangolo rosa ci indica quale delle cifre del successivo bastoncino dobbiamo scegliere: si tratta del 5, che si trova in corrispondenza del vertice del triangolo. Annotiamo il 5 a sinistra dello 0.



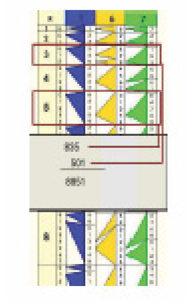
Il triangolo viola punta a sua volta sul 9, che sarà la terza cifra da destra del risultato cercato:



Abbiamo ora due triangoli marroni. Dobbiamo scegliere quello che sta più in alto, perché la cifra 9 su cui siamo appena giunti si trova in corrispondenza della sua base. Se fossimo giunti su una cifra che si trovava in corrispondenza dell'altro triangolo avremmo dovuto proseguire con quest'ultimo. Nel nostro caso la punta del triangolo ci dice che l'ultima cifra da annotare è l'1:

Rileggendo da sinistra a destra le cifre trovate, abbiamo il risultato: 1950.

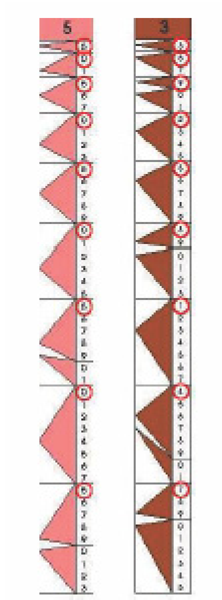
3.1.2. Moltiplicazioni per numeri a più cifre.



Per eseguire il prodotto di numero a più cifre per un numero a più cifre si possono utilizzare i bastoncini per determinare i prodotti parziali, che poi andranno sommati manualmente.

Se ad esempio vogliamo trovare il prodotto 167 × 53, si esegue prima 167 × 3, come descritto sopra, annotando il risultato parziale 501 sul foglio.

Si scorre ora alla quinta riga per eseguire 167 × 5. Si trascrive il secondo parziale, 835, insieme al primo, avendo però cura di incolonnarlo traslato di un posto a sinistra, scrivendo cioè il 5 in colonna con lo 0, il 3 in colonna con il 5, e l'8 ancora più a sinistra.



Si esegue ora la somma colonna per colonna, ottenendo come risultato 8851.

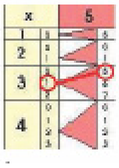
3.2. Come sono costruiti.

Come per i bastoncini di Nepero, anche qui ogni asticella porta scritti in ogni riga i successivi multipli corrispondenti. Così nel bastoncino del 5 dovremo trovare 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45. La scrittura questa volta è però decisamente più nascosta.

Per scoprire come è stata realizzata osserviamo ad esempio proprio il bastoncino del 5. Guardiamo prima di tutto le cifre che compaiono nelle colonnine di destra. Vediamo che nella prima riga la colonna porta la cifra 5, nella seconda riga troviamo come prima cifra lo 0, nella terza il 5, nella quarta lo 0, nella 5 il 5, e così via. Può sorgere il sospetto che si tratti delle unità dei prodotti 1×5, 2×5, 3×5, 4×5, 5×5, ecc. Se gettiamo uno sguardo agli altri bastoncini questo sospetto viene confermato. Nel bastoncino del 3 abbiamo infatti, ad esempio, che le colonne iniziano con 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, proprio le unità dei multipli 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Dove sono finite le decine? Prendiamo ancora l'asticella del 5. Accostiamole sulla sinistra il regolo. Osserviamo ad esempio la terza riga, dove dovrei trovare il risultato di 5×3.

Seguendo le indicazioni generali per trovare i prodotti devo prendere come cifra delle unità il 5, che sta in alto sulla colonnina, e poi seguire la punta del triangolo per ottenere quella delle decine. Fra le tre possibili cifre della terza colonnina del regolo, cioè 0, 1 e 2, il triangolo mi indica che devo prendere l'1. Il prodotto cercato è infatti 15.

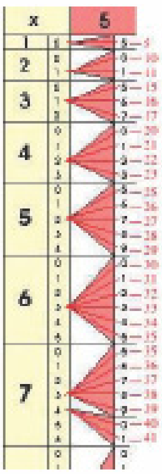


È dunque la posizione della punta del triangolo che mi indica le decine del multiplo di una determinata riga. Se ora diamo un'occhiata complessiva alle righe del bastoncino del 5 osserviamo che i triangoli puntano rispettivamente sullo 0, sull'1, sull'1, sul 2, sul 2, sul 3, sul 3, sul 4, sul 4, ossia proprio sulle decine dei multipli 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45.

Cambiando bastoncino, verificheremo che la cosa funziona anche per gli altri numeri.

Torniamo ad osservare il bastoncino del 5 affiancato al regolo. Come mai alla terza riga la colonnina del regolo riporta le tre cifre 0, 1, 2? La risposta è che queste sono in effetti le uniche decine che posso ottenere moltiplicando per tre i numeri da zero a nove. Infatti 0×3, 1×3, 2×3 e 3×3 sono tutti minori di 10 (e dunque per loro si hanno 0 decine); 4×3, che fa 12, 5×3, che fa 15, e 6×3, che fa 18, hanno invece 1 decina. Il massimo prodotto, 9×3, fa 27, che di decine ne ha 2.

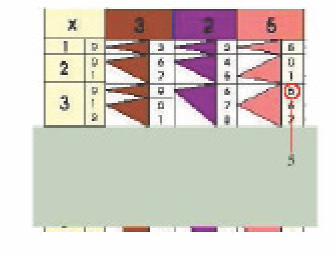
A questo punto possiamo provare a capire il significato delle altre informazioni presenti sui bastoncini e a scoprire come queste permettono di eliminare il calcolo delle somme.



Prendiamo ancora il bastoncino del 5, a cui eventualmente possiamo affiancare il regolo per aiutarsi nell'identificare le posizioni delle punte dei triangoli. Ricordando quanto appena detto, osserviamo di nuovo che nella prima riga compare un solo numero; si tratta del 5; abbiamo infatti la cifra 5 nella colonnina delle unità e la punta del triangolo che punta sullo 0. Nella seconda abbiamo due numeri; il più in alto è il 10 (0 unità e la punta del triangolo che punta su 1 decina), l'altro è l'11 (1 unità nella colonnina e la punta del triangolo che punta su 1 decina). Nella terza riga abbiamo il 15 e i due numeri successivi, 16 e 17. Nella quarta il 20 e i tre successivi, 21, 22, 23. E così via riga per riga, mettendo insieme unità e decine. Nella settima riga abbiamo il 35 e sei numeri successivi: il 36, 37, 38 e 39 hanno le unità che fanno capo al primo triangolo che punta su 3 decine, il 40 e 41 che seguono hanno come unità 0 e 1 che fanno capo ad un secondo triangolo che punta invece su 4 decine.

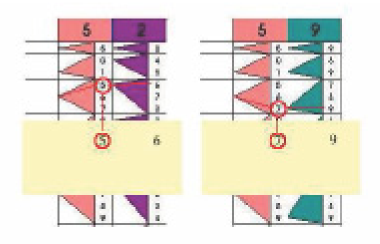
A cosa servono questi ulteriori numeri che compaiono nelle diverse righe? Scopriremo che in sostanza sono già i risultati precalcolati di tutte le possibili somme dovute ai riporti che potrei dover eseguire nel corso di una moltiplicazione.

Per vederlo meglio pensiamo di eseguire il prodotto di un numero dove compare la cifra 5 per il numero 3, secondo le istruzioni già date. Una volta composto il numero, il nostro bastoncino del 5 occuperà una certa posizione.



Se il 5 sta al posto delle unità (ad esempio sto facendo 325×3), anche se non conosco le altre cifre del numero da moltiplicare so sicuramente che le unità del risultato saranno 5. Ed infatti il procedimento prescrive di prendere la cifra più in alto della terza colonnina.

Se però il 5 occupa un altro ordine decimale, ad esempio quello delle decine, non posso sapere subito quale sarà la cifra delle decine del risultato: dipende dalla cifra delle unità del numero che sto moltiplicando. Infatti al 5 delle 15 decine che ottengo dal 5×3 dovrò aggiungere le decine che mi vengono moltiplicando la cifra delle unità per 3. Se la cifra delle unità fosse 2 avrei comunque 5 decine, ma se ad esempio le unità fossero 9, avrei 5+2 cioè 7 decine, poiché dovrei aggiungere alle 5 decine del 5×3 le 2 decine del 27 che viene da 9×3.



Non so quindi cosa dovrò aggiungere al mio 5 di partenza, ma so che, moltiplicando per 3, le possibilità sono queste: aggiungere 0, aggiungere 1, aggiungere 2. Di più no, perché il massimo riporto mi viene da 9×3. Dunque a partire dal 15 io potrei arrivare a 16 o 17. Questi, non a caso, sono proprio i numeri che stanno insieme al 15 nella terza riga del bastoncino del 5.

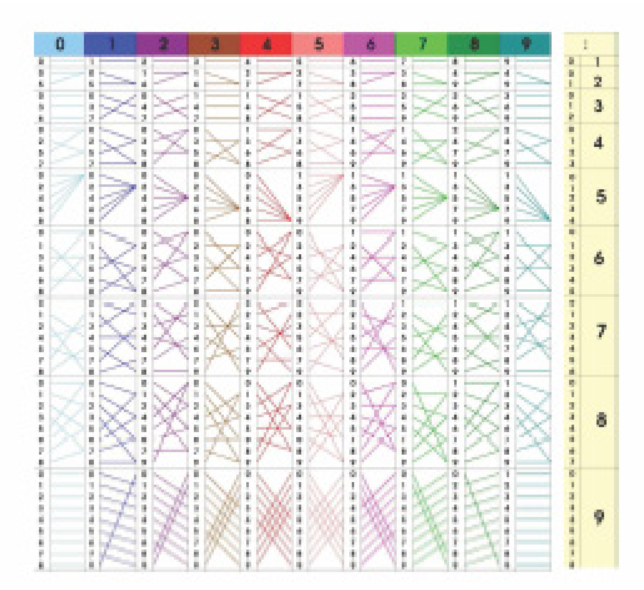
Chi mi dice quale scegliere? Il semplice accostare il bastoncino della cifra delle unità alla destra del 5. Per come sono costruiti i bastoncini infatti le decine di ogni prodotto non compaiono come cifra - che andrebbe sommata come si fa nei bastoncini di Nepero - ma sono indicate graficamente dalla posizione della punta del triangolo. Così, automaticamente, se il triangolo precedente punta in alto (posizione corrispondente a 0 decine), prendo la prima posizione, il 15 nel nostro caso e non sto aggiungendo niente, se punta alla seconda posizione (corrispondente a 1 decina) prendo 16 invece che 15, se punta alla terza (posizione corrispondente a 2 decine) prendo 17.

Osserviamo che in generale i multipli del 9 mi danno i maggiori riporti e di conseguenza determinano quante cifre successive sono necessarie nelle colonnine delle diverse righe. Nella terza, come abbiamo visto, sono tre, corrispondenti al riporto di 0, 1 e 2, poiché 9×3 fa 27 (2 decine). Nella quarta saranno quattro poiché 9×4 fa 36 (dunque 0, 1, 2 o 3 decine), e così via fino alla nona dove ve ne sono nove poiché da 9×9 si riportano 8 decine.

4. La divisione con i bastoncini di Genaille-Lucas.

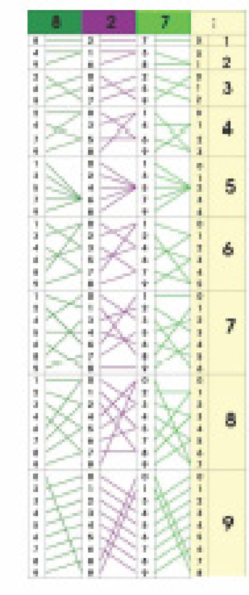
Nella stessa pubblicazione in cui vi sono i bastoncini per moltiplicare appena descritti, Genaille e Lucas presentano anche degli analoghi bastoncini per eseguire le divisioni.

Si tratta di dieci asticelle numerate da 0 a 9 e di un regolo contrassegnato con il simbolo :. Come nei bastoncini per le moltiplicazioni, le asticelle e il regolo sono divise in nove righe, di ampiezza crescente. Sulla sinistra presentano una colonnina con un certo numero di cifre: una sola nella prima riga, due nella seconda, tre nella terza, ..., nove nella nona. Nelle asticelle, da ciascuna di queste cifre parte una linea, più o meno inclinata. Nel regolo invece le righe sono numerate da 1 a 9.



4.1. Istruzioni per l'uso.

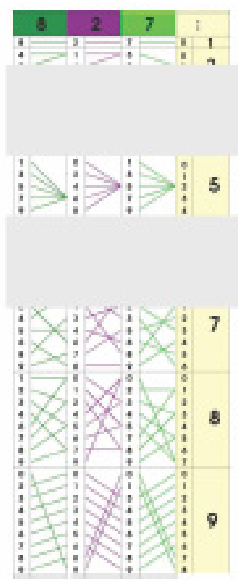
4.1.1.Divisioni per numeri a una cifra.

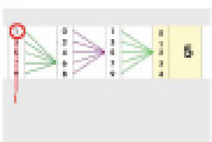


Per eseguire la divisione di un numero a più cifre per un numero ad una cifra si compone il dividendo affiancando le asticelle contrassegnate dai numeri corrispondenti e, alla destra, si pone il regolo contrassegnato con il simbolo del diviso. Per esempio, per calcolare 827:5, per prima cosa si forma l'827 e si affianca sulla destra il regolo.

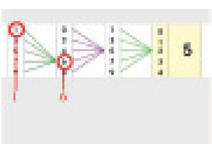
Si considera poi solo la riga corrispondente al divisore, nel nostro caso la quinta.

A questo punto si va a leggere il risultato. Questo è dato dalle cifre che si individuano partendo dalla asticella di sinistra, in cui si sceglie nella colonnina sempre la cifra che sta più in alto, e procedendo verso sinistra secondo quanto indicato dalle linee. La cifra individuata sul regolo indica il resto.

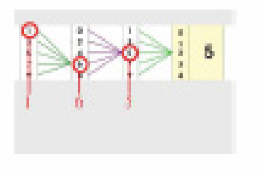




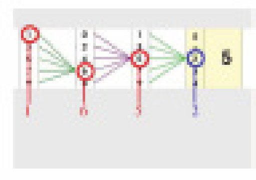
Nel nostro esempio la prima cifra da prendere sarà l'1, che è la più in alto della colonnina a sinistra. Lo annotiamo sul foglio.



La linea verde che parte dall'1 ci dice come proseguire e quale cifra andare a scegliere nell'asticella che sta alla destra. Nel nostro caso dobbiamo prendere il 6.



Proseguiamo ancora seguendo la linea viola che ci indica la successiva cifra da prendere: il 5.



Da qui una linea verde ci conduce al regolo, indicando la cifra 2. Come detto quest'ultima cifra rappresenta il resto della divisione.

In conclusione abbiamo che 827:5 fa 165 con resto di 2.

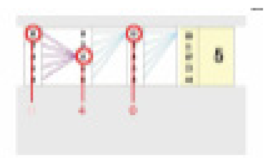
4.1.2. Cifre decimali.

Se invece del risultato espresso come quoziente intero e resto si volessero determinare alcune cifre decimali, si può proseguire il procedimento aiutandosi ancora con i bastoncini.

Si tratta allora di prendere il resto e farlo seguire da un opportuno numero di zeri, tanti quanti le cifre decimali che si vogliono determinare. Si deve poi eseguire con i bastoncini la divisione di questo nuovo numero per il divisore. Infine si riportano le cifre del risultato ora ottenuto come cifre decimali del quoziente precedente.

Nell'esempio precedente, se vogliamo determinare il risultato con due cifre decimali, componiamo il numero 200, formato dal resto 2 e da due 0.

Si esegue ora 200:5, secondo le istruzioni già viste. Si considera dunque la quinta riga dalla quale si ottengono le cifre 040.



Trascurando il primo 0 (che sono ancora unità) otteniamo le cifre decimali 40.Dunque il quoziente con due cifre decimali di 827:5 è 165.40.

Se il regolo ci segnala che il resto è 0, come nel nostro esempio, la divisione è terminata. Se il resto è diverso da 0, si possono determinare ancora cifre decimali ripetendo il procedimento: si prende cioè questo resto, si fa seguire da un certo numero di zeri e si esegue ancora la divisione del nuovo numero per il divisore.

4.2. Osservazioni.

Nel caso delle moltiplicazioni i bastoncini possono essere usati anche per calcolare prodotti di numeri a più cifre per numeri a più cifre, scomponendo la moltiplicazione in somma di prodotti parziali. Nelle divisioni di numeri a più cifre per numeri a più cifre non è possibile seguire una strategia analoga, essendo necessario considerare complessivamente il divisore.

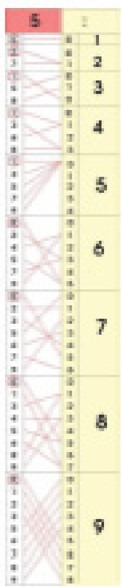
4.3. Come sono costruiti.

La costruzione dei bastoncini per le divisioni rispecchia in qualche modo quella per le moltiplicazioni.

Come primo passo cercheremo anche qui di individuare dove e come per ogni bastoncino stanno scritte le divisioni principali. Prendendo ad esempio il bastoncino del 5 cercheremo i quozienti 5:1, 5:2, 5:3, 5:4, 5:5, 5:6, 5:7, 5:8, 5:9. Se alla destra del bastoncino del 5 affianchiamo il regolo per eseguire le divisioni secondo le indicazioni, troviamo alla prima riga il risultato di 5:1, indicato dall'unica cifra che compare nella colonnina, il 5. Nella seconda riga troviamo il risultato di 5:2, indicato dal 2 che sta in alto nella colonnina. Nella terza riga troviamo come cifra più in alto nella colonnina l'1, che è il risultato di 5:3. Così andando avanti verifichiamo che ogni prima cifra della colonnina in ciascuna riga indica proprio il quoziente di 5 per il numero corrispondente a quella riga.

Questo ovviamente vale anche per gli altri bastoncini. Non poteva essere che così perché il procedimento funzionasse anche con dividendi a una cifra.

Verifichiamo poi che le linee che partono dai quozienti, con le loro diverse inclinazioni, indicano sul regolo qual è il resto di ciascuna divisione.



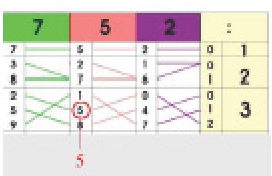
Possiamo anche qui chiederci come mai le righe abbiano colonnine con un numero diverso di cifre, crescente da uno a nove dalla prima all'ultima. Le cifre del regolo, come abbiamo visto, rappresentano i resti. Dunque è chiaro che nella prima riga, corrispondente alla divisione per 1, ci sia l'unica cifra 0, poiché il resto di una divisione per 1 è sempre 0. Nella seconda riga, corrispondente alla divisione per 2, si hanno due possibilità: resto 0 o resto1. Nella terza compaiono i possibili resti di una divisione per 3: 0, 1 e 2. E così via fino alla nona riga, quella della divisione per 9, dove i resti possibili vanno da 0 a 8.

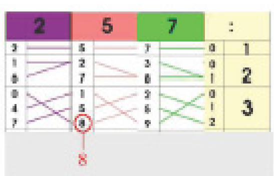
Meno evidente è il significato delle altre cifre nelle colonnine delle asticelle. Della prima cifra in alto in ogni riga abbiamo già detto. Ma le altre? Scopriremo che in sostanza sono i risultati già calcolati di tutte le possibili divisioni in cui compare la cifra del bastoncino.

Per vederlo meglio pensiamo di dover eseguire la divisione di un numero che contenga la cifra 5 per il numero 3, secondo le istruzioni già date.

Se il numero 5 occupa la prima posizione a sinistra ossia l'ordine decimale più alto (come ad esempio in 527:3), anche se non conosco le altre cifre del dividendo so sicuramente che la prima cifra del risultato sarà 1, quoziente di 5:3. Ed infatti il procedimento prescrive di prendere la cifra più in alto della terza colonnina, che riporta proprio questo quoziente.

Se però il 5 occupa un altro ordine decimale, ad esempio il secondo (ossia quello delle decine come in 752:3 oppure in 257:3), non posso sapere subito quale sarà la seconda cifra del risultato:





dipende dalla prima cifra, o meglio dipende dal resto che la divisione della prima cifra per 3 mi ha lasciato; questo infatti va “messo davanti” al 5 prima di dividere per 3. In altre parole nel procedimento della divisione, come ben noto, per ottenere le decine divido per 3 non le sole decine indicate dalla cifra del mio dividendo, ma un eventuale numero di decine maggiore, in cui conteggio anche le centinaia avanzate dal passaggio precedente. Nel nostro esempio, 752:3, per calcolare la seconda cifra del risultato, dovrò fare non 5:3 ma 15:3, perché dalla divisione delle 7 centinaia per 3 è avanzato 1. Ottengo dunque 5, come cifra delle decine. Se le centinaia fossero state 2, avrei avuto un avanzo di 2 centinaia (2:3 fa 0 con resto 2) e dunque per ottenere le decine avrei dovuto fare 25:3. Otterrei allora 8 come cifra delle decine.

In generale dunque quando nel dividendo compare un 5 in una determinata posizione, non posso sapere quale cifra del risultato mi verrà fuori in quella posizione. Ma so che se sto dividendo ad esempio per 3 le possibilità sono queste: 5:3, 15:3 o 25:3, ossia rispettivamente 1, 5 o 8, che sono proprio le cifre che compaiono nella colonnina. Escludo il 35, il 45, il 55, ecc., perché qualunque fosse la cifra alla sinistra del 5, poiché anch'essa è stata divisa per 3, il massimo resto che può aver prodotto è 2.

Così, dando un'occhiata alla quarta riga del bastoncino del 5, osservo che compaiono le cifre 1, 3, 5, 7, 9, cioè i quozienti di 5:4, 15:4, 25:4, 35:4.

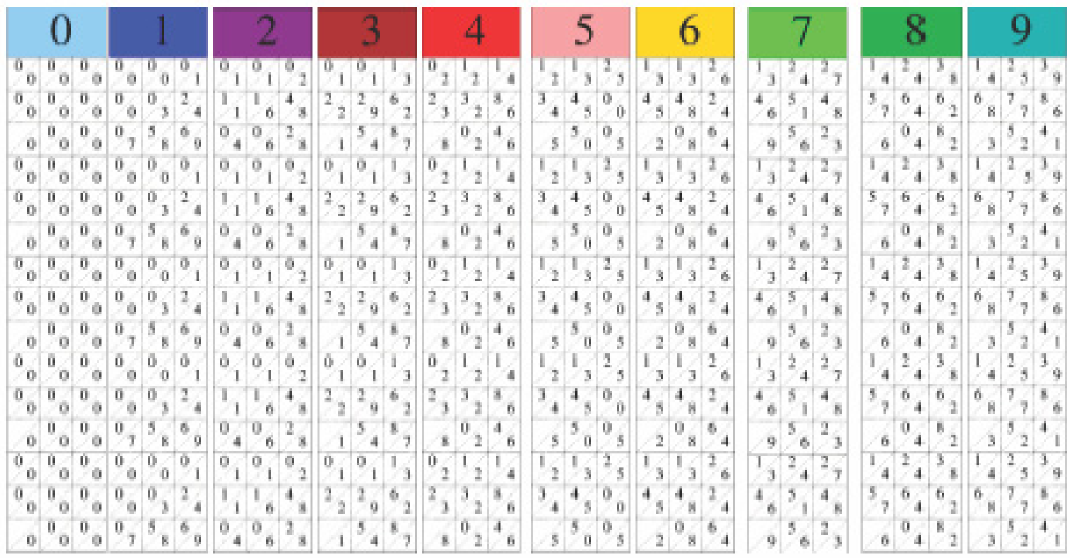
Scoperto cosa sono le cifre che seguono la prima in ogni colonnina, come si decide quale scegliere?

Ancora una volta è la realizzazione grafica dei bastoncini che mi indica automaticamente a quale quoziente devo riferirmi. Per come sono costruiti i bastoncini infatti, il resto di ogni quoziente è indicato dall'inclinazione della linea dell'asticella precedente. Così, automaticamente, se la linea da cui arrivo mi porta alla prima posizione (corrispondente al resto 0) avrò semplicemente il quoziente del numero che sto considerando per il divisore. Se punta alla seconda (corrispondente al resto 1) sarà indicato il quoziente del numero aumentato di una decina. E così via.

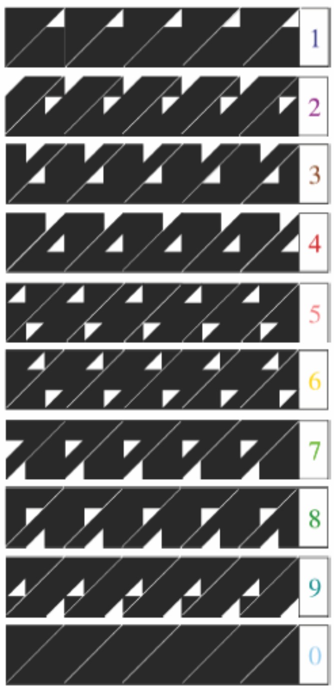
5. La moltiplicazione secondo il Promptuarium di Nepero.

In appendice ai *Rabdologiae seu Numerationis per virgulas libri duo*, in cui sono descritti i bastoncini, lo stesso Nepero propone una variante per facilitare il calcolo di moltiplicazioni di numeri a più cifre per numeri a più cifre. Qui descrive la costruzione e il funzionamento di quello che definisce *Multiplicationis Promptuarium*, attraverso il quale "qualunque moltiplicazione, per quanto difficile e lunga, si esegue in modo facilissimo e velocissimo".

Il Prontuario comprende due tipi di asticelle. Le prime sono numerate da 0 a 9 e orientate verticalmente; presentano una serie di righe, colonne e linee diagonali piene di cifre.



Le altre sono ancora numerate da 0 a 9, ma sono orientate orizzontalmente; non riportano altre cifre se non quelle dell'intestazione e presentano invece delle linee diagonali e delle finestrelle triangolari che si ripetono.

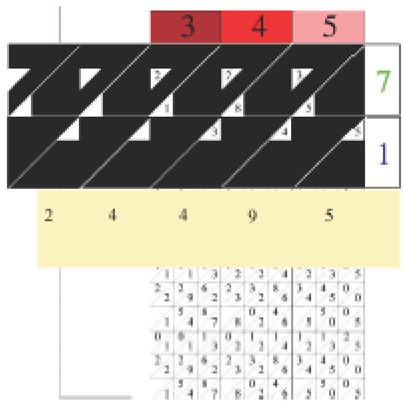


5.1. Istruzioni per l'uso.

Per eseguire il prodotto di un numero a più cifre per un numero a più cifre si compone il numero a più cifre affiancando le asticelle verticali contrassegnate dai numeri corrispondenti. Con gli altri regoli si compone il secondo fattore, in verticale, con le unità in basso. Si sovrappongono questi regoli ai primi (in modo da far combaciare l'angolo a destra in alto, intestazione dei regoli esclusa).

Ogni cifra del risultato si ottiene in corrispondenza di una striscia diagonale, scrivendo la somma di tutti i valori che vi compaiono. Si parte dalla striscia in basso a destra (che corrisponde alle unità) e si prosegue effettuando eventuali riporti.

Per eseguire ad esempio 345 × 71, per prima cosa si affiancano le asticelle verticali contrassegnate con 3, 4, 5 in modo da comporre il numero 345. Con le altre asticelle si compone (in verticale) il numero 71. Si sovrappongono queste asticelle alle prime.



Si eseguono ora le somme all'interno delle strisce diagonali. Nella striscia più a destra si trova il solo 5, che trascriviamo sul foglio: sarà la cifra delle unità. Proseguendo verso sinistra, nella seconda striscia troviamo un 5 e un 4; scriviamo la loro somma: 9, che sarà la cifra delle decine. Ancora a sinistra troviamo un 3, un 8, un 3; sommandoli abbiamo 14; scriviamo il 4 e riportiamo l'1 alla striscia successiva. Qui troviamo un 2 e un 1, che sommati insieme all'1 che riportavo mi danno 4; lo trascrivo. Infine nell'ultima striscia trovo un 2 che annoto.

Rileggendo il risultato da sinistra a destra trovo 24495.

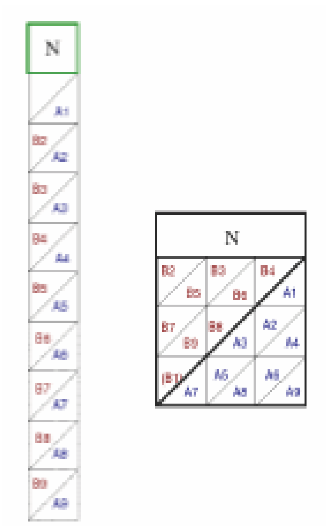
5.2. Osservazioni.

A patto di avere asticelle abbastanza lunghe e in numero sufficiente, si può aumentare a piacere il numero delle cifre sia del primo che del secondo fattore.
Nell'esempio portato da Nepero si calcola il prodotto di 8795036412 per 3586290741.

5.3. Come sono costruiti.

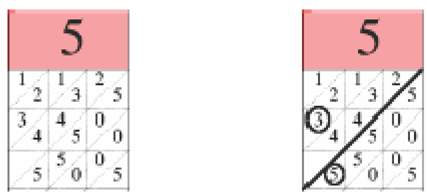
Sia le asticelle verticali che quelle orizzontali sono costruite da moduli quadrati che si ripetono. Il numero dei moduli determina il numero massimo delle cifre dei possibili fattori.

Vediamo come sono costruiti questi moduli. Iniziamo dalle asticelle del primo tipo, quelle verticali con tante cifre. I moduli sono costituiti da quadrati di tre righe e tre colonne. Un veloce sguardo ai bastoncini permette di verificare che infatti ogni tre righe le cifre si ripetono allo stesso modo.

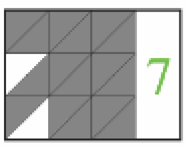


Che cosa rappresentano le cifre che compaiono all'interno di ciascun modulo? In un certo senso ogni modulo quadrato non è nient'altro che un bastoncino di Nepero classico, opportunamente compattato. In ogni modulo stanno scritti tutti i multipli del numero corrispondente, esattamente come accadeva nei bastoncini di Nepero del vecchio tipo. Nei vecchi bastoncini decine e unità di ogni multiplo erano disposte rispettivamente nel triangolo superiore e in quello inferiore di ciascun quadrato successivo. Nei nuovi bastoncini questi triangoli sono ordinati diversamente. Se immaginiamo ogni modulo diviso in due dalla diagonale, i triangolini che contengono le unità stanno tutti nella metà inferiore, quelli che contengono le decine stanno invece tutti al di sopra della diagonale.

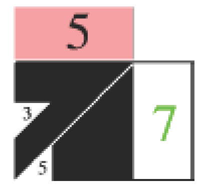
Prendiamo ad esempio l'asticella del 5 ed osserviamo il primo modulo (gli altri, come già detto, sono identici). Ricombinando opportunamente i triangolini, troveremo tutti i multipli di 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45. Ad esempio il 35, cioè 5×7, si trova mettendo insieme la cifra che sta nella posizione B7 con quella che sta nella posizione A7, cioè 3 e 5.



Passiamo ora alle asticelle del secondo tipo. I moduli quadrati qui si ripetono in orizzontale. A ben vedere anche qui ogni modulo può ritenersi scomposto negli stessi triangolini. In ogni modulo solamente due triangolini rimangono vuoti e permettono la lettura delle cifre sottostanti una volta effettuata la sovrapposizione. Prendiamo ad esempio l'asticella del 7. I triangolini si trovano in posizione B7 e A7.



Osservando le altre asticelle si verifica che in ognuno le due finestrelle triangolari si trovano nelle posizioni di decine e unità del multiplo corrispondente proprio a quel numero. Nell'asticella dell'1, dove in realtà di finestrelle ve ne è una sola, poiché le decine di tutti i prodotti per 1 sono sempre 0, la finestrella si trova in posizione A1. Nell'asticella del 2, le finestrelle si trovano in posizione B2 e A2. In quella del 3 in posizione B3 e A3. e così via. L'asticella dello 0 non ha finestrelle libere, poiché moltiplicando per 0 si ottiene comunque 0.



Quando si sovrappongono le asticelle con le finestre a quelle verticali, facendo combaciare i moduli quadrati, si vedono solamente le cifre del prodotto desiderato. Così sovrapponendo il 7 al 5, si vedranno solamente il 3 delle decine e il 5 delle unità del prodotto 5×7.

Affiancando più bastoncini, ottengo più prodotti parziali.

Poiché ogni asticella è come formata da tanti bastoncini di Nepero del vecchio tipo tutti uguali, posso usare i secondi, terzi, ..., moduli per moltiplicare lo stesso numero per altri fattori.

Così in 345×71 ho nella prima riga i prodotti di 3×7, 4×7, 5×7 e nella seconda i prodotti di 3×1, 4×1 e 5×1.

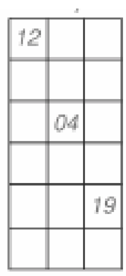
Il fatto di aver disposto le unità di ogni prodotto al di sotto della diagonale del modulo e le decine al di sopra, fa sì che nelle fasce diagonali che vengono evidenziate quando sovrappongo il bastoncino o i bastoncini orizzontali, ogni cifra si trovi insieme a quelle dello stesso ordine decimale. Dunque non resta che fare le somme fascia per fascia.

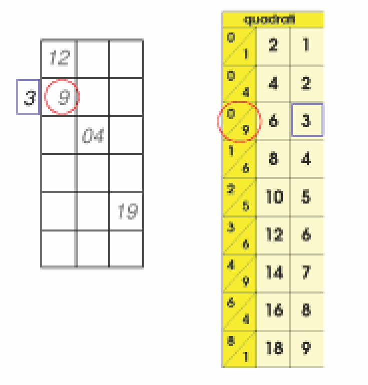
6. Estrazione di radice quadrata con i bastoncini di Nepero.

I bastoncini di Nepero classici possono aiutare nel calcolo delle radici quadrate, come lo stesso Nepero descrive nei *Rabdologiae seu Numerationis per virgulas libri duo*. Ai dieci bastoncini si affianca ora un nuovo regolo formato da tre colonne. Nella colonna più a destra sono riportati i numeri da 1 a 9. In quella che segue a sinistra i doppi di ciascuno di questi numeri. Nell'ultima colonna i nove quadrati sono divisi dalla diagonale in due triangoli, come per i bastoncini dei multipli; qui si trovano ora i quadrati, scritti con le unità nel triangolo basso e le decine in quello alto.

6.1. Istruzioni per l'uso.

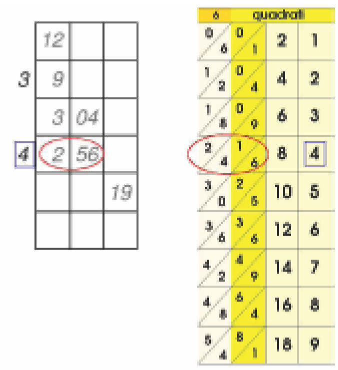
Vediamo qual è il procedimento di estrazione di radice quadrata aiutandosi con un esempio. Supponiamo di voler trovare la radice di 120419. Come passo preliminare si separano le cifre del numero in coppie, a iniziare da destra: 12.04.19. Costruiamo una griglia con tante colonne quante le coppie formate e un numero di righe doppie. Inseriamo le coppie a righe alterne, da sinistra a destra.





Iniziamo dalla prima riga della tabella, dove troviamo il numero 12. Scorriamo sul regolo i numeri che compaiono nella colonna sinistra: 1, 4, 9, 16, ... Fermiamoci prima di superare il 12 (stiamo individuando il quadrato che meglio approssima per difetto il 12). Nel nostro caso ci fermiamo alla terza riga, dove si trova il 9 (il successivo, 16, è più grande di 12). Il 9 si scrive sotto il 12, e il 3, che corrisponde alla riga individuata, lo scriviamo a fianco del 9 fuori dalla tabella: è la prima cifra del nostro risultato. Nella stessa riga, nella colonna intermedia, troviamo il 6. Dobbiamo allora prendere il bastoncino di Nepero corrispondente al 6 e affiancarlo alla sinistra del regolo dei quadrati: ci servirà nel passaggio successivo.

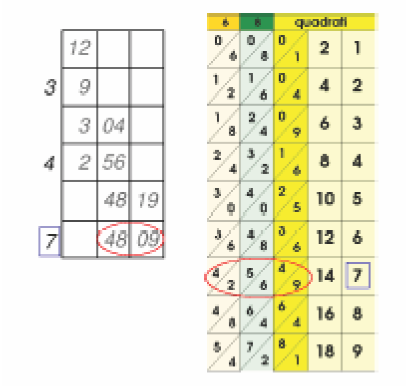
Passiamo ora alla riga successiva della nostra tabella. Nella prima colonna scriviamo la differenza fra il 12 e il 9 delle righe precedenti: 3, nel nostro caso. Con lo 04 che avevamo già segnato, otteniamo il numero 304.



Scorriamo ora i numeri che compaiono considerando il bastoncino del 6 e la colonna sinistra del regolo. Dobbiamo leggerli ricordando che cifre nella stessa fascia diagonale si sommano. Nel nostro caso abbiamo dunque: 61, 124, 189, 256, 325, ... Anche qui ci fermiamo prima di superare il numero che compare in tabella. Nel nostro caso ci fermiamo al 256, poiché il successivo, 325, supera il 304 della tabella. Scriviamo il 256 sotto al 304. Il 256 individua la quarta riga. Scriviamo il 4 accanto al 256: è la seconda cifra del nostro risultato.

La colonna intermedia del regolo, che alla quarta riga porta il numero 8, ci dice di prendere ora il bastoncino di Nepero corrispondente all'8 e di disporlo all'immediata sinistra del regolo, spostando quello del 6.

Passiamo ancora una volta alla riga successiva, che completiamo scrivendo la differenza tra 304 e 256, ossia 48. Con il 19 che già avevamo scritto, abbiamo ora il numero 4819.



Di nuovo scorriamo i numeri che compaiono considerando ora le tre colonne affiancante del bastoncino del 6, dell'8 e del regolo. Abbiamo ora, sommando in diagonale: 681, 1364, 2049, 2736, 3425, 4116, 4809, 4504, ... Ci fermiamo dunque al 4809, poiché il successivo, 4504, supera il 4819 della tabella. Lo scriviamo sotto il 4819. Abbiamo questa volta individuato la settima riga. Scriviamo il 7 a fianco del 4809: è la terza cifra del nostro risultato.

Poiché le righe della tabella sono terminate, anche il procedimento si ferma.

Abbiamo trovato che la radice quadrata di 120419 è 347. Il 10 che si ottiene come resto, dalla differenza di 4819 e 4809, ci dice che 120419 non è un quadrato perfetto. La radice trovata è approssimata per difetto; infatti il quadrato di 347 è 120409.

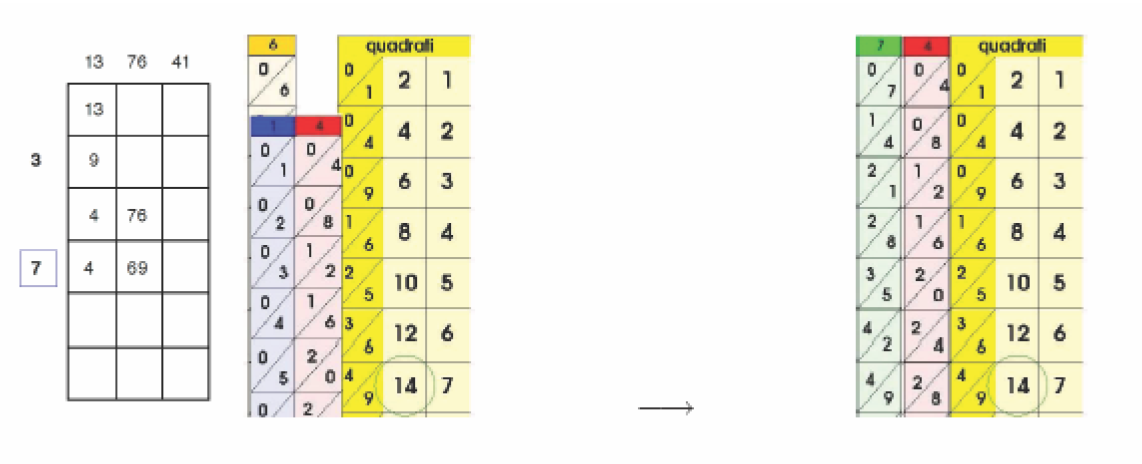
6.2. Osservazioni.

Se volessimo determinare alcune cifre decimali della radice, potremmo allargare la tabella con nuove coppie di 00 e proseguire secondo le istruzioni.

Nell'esempio dato, seguendo le istruzioni, le prime due cifre del risultato individuate, il 3 e il 4, indicavano di prendere i bastoncini del 6 e dell'8, corrispondenti ai loro doppi. Se le cifre del risultato sono maggiori di 4, i doppi corrispondenti avranno due cifre, e dunque andranno composti usando due bastoncini.

Se avessimo avuto ad esempio come prima cifra del risultato un 7, il cui doppio è 14, avremmo dovuto comporre il 14 usando due bastoncini, posizionando il 4 accanto al regolo e l'1 subito a sinistra, e poi proseguire come al solito.

La radice di 137641 è 371. Se iniziamo il procedimento di calcolo troviamo come prima cifra un 3 e posizioniamo il bastoncino del 6 vicino al regolo. Andando avanti viene fuori il 7 come seconda cifra. Dovremmo ora spostare il 6 di un posto a sinistra e posizionare il 14. Il 4 va accanto al regolo, l'1 dovrebbe andare subito a sinistra, dove però c'è già il bastoncino del 6 che viene dal passaggio precedente. Dovremo allora sostituire il 6 con un 7, sommando cioè i valori dei due bastoncini che idealmente si sovrapporrebbero in quella posizione.



7. Indicazioni sullo svolgimento dei laboratori.

7.1. Premessa sui laboratori.

Le varie forme di bastoncini per i calcoli presentati in questa dispensa si prestano ad un utilizzo a diversi livelli.

Per tutte le età (8-16) sarà in ogni momento una piacevole scoperta il vedere come semplici bastoncini possono sollevare dalla fatica del calcolo, come Nepero auspicava.

Volendo inserirli in modo più diretto nella programmazione scolastica, la forma più semplice dei bastoncini di Nepero può ad esempio essere già presentata con l'introduzione dei multipli e delle tabelline, per la memorizzazione delle quali i bastoncini possono divenire un ausilio, sostituto della tavola pitagorica. Con l'introduzione dell'algoritmo della moltiplicazione si vedrà poi come devono essere combinati e utilizzati, per arrivare, passando magari attraverso la moltiplicazione per gelosia, a costruire il procedimento ordinario. Viceversa, se è stato introdotto il procedimento ordinario, potranno aiutare a comprenderne meglio i passaggi nascosti.

La variante di Genaille e Lucas può apparire in un certo senso quasi magica. Se per i piccoli sarà un'utile esperienza di applicazione di istruzioni d'uso, per i più grandi potrà essere un'interessante sfida il capire come questi bastoncini sono costruiti.

Così anche la moltiplicazione con i bastoncini del Promptuarium: oltre l'acquisizione del modo d'uso, la comprensione del loro funzionamento sarà un'occasione per vedere concretamente e toccare con mano il comportamento degli ordini decimali nascosti nella rappresentazione posizionale e di riconoscere la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto.

Le attività sull'estrazione di radice potranno essere anche spunto per riflettere e applicare le formule dei quadrati di binomi, trinomi, etc...

7.2. Contenuto delle presentazioni per il laboratorio.

Oltre ai bastoncini per il calcolo, il materiale per i laboratori comprende un CD-rom con delle presentazioni da proiettare durante lo svolgimento delle attività. Si tratta di diapositive in formato PowerPoint che contengono immagini e brevi commenti da usare per le spiegazioni e per gli esercizi da proporre. Ne diamo qui una breve descrizione, che comprende anche indicazioni sulle classi a cui si adattano. Naturalmente si tratta di un nostro parere del tutto generico: spetta all'insegnante scegliere il livello di difficoltà adatto alla propria classe.

Gli esempi e le presentazioni sono scelti per un laboratorio di un'ora. L'insegnante potrà naturalmente proporre altri esercizi, graduati a seconda dell'età e delle possibilità dei ragazzi.

Moltiplicazioni a una cifra

Dalla terza elementare.

Con le prime diapositive si introducono i bastoncini di Nepero e il regolo. Attraverso un semplice esempio, 45× 3, si spiega come utilizzare i bastoncini per eseguire una moltiplicazione di un numero a più cifre per un numero a una cifra. Seguono poi esempi da proporre in cui si chiede di moltiplicare un numero di tre o quattro cifre per un numero a una cifra, con o senza riporti.

Seguono i bastoncini di Genaille-Lucas. Una volta introdotti i dieci bastoncini e il regolo, attraverso un esempio –un prodotto già calcolato con i bastoncini di Nepero- si spiega come utilizzare i bastoncini per eseguire la moltiplicazione di un numero a più cifre per un numero a una cifra. Seguono alcune moltiplicazioni da proporre con le relative soluzioni. Il primo fattore è composto da due, tre o quattro cifre.

Moltiplicazioni a più cifre.

Dalla prima media.

Il file inizia con la spiegazione della moltiplicazione per gelosia, all'origine dei bastoncini di Nepero. Dopo un esempio di moltiplicazione a una cifra, utile per ricordare il metodo, si eseguono alcune moltiplicazioni a due cifre, prima moltiplicando a gelosia e poi facendo la stessa moltiplicazione con i bastoncini. Si passa poi ai bastoncini di Genaille-Lucas, calcolando anche qui prodotti a più cifre.

Divisioni.

Ci sono due presentazioni, una per le elementari (divisioni1.ppt) e una per le medie (divisioni2.ppt).

La prima comprende l'introduzione dei bastoncini di Genaille-Lucas per le divisioni, e un certo numero di esempi di divisioni con resto di numeri a due, tre e quattro cifre.

La seconda prosegue con il calcolo delle cifre decimali.

Promptuarium.

Dalla quinta elementare.

Questa presentazione è relativa alla moltiplicazione secondo il *Promptuarium* di Nepero.

Con le prime diapositive si presentano i due tipi di bastoncini. Si spiega poi come sovrapporli e utilizzarli per eseguire un moltiplicazione. Nell'esempio si illustra la moltiplicazione di un numero a tre cifre per un numero a due.

Seguono poi gli esempi da proporre. Si tratta di moltiplicazioni di numeri a tre cifre per numeri a due cifre oppure a tre cifre.

Dopo aver illustrato il funzionamento dei bastoncini si può suggerire la riflessione su come sono costruiti.

Radice.

Terza media e superiori.

Con le prime diapositive si introduce il regolo da affiancare ai dieci bastoncini di Nepero.

Attraverso due esempio, il calcolo delle radici di 1225 e di 530, si spiega come servirsi del regolo e dei bastoncini per procedere all'estrazione della radice. Al termine del procedimento si determina se il numero di partenza è un quadrato perfetto o no e qual è la sua radice (esatta o approssimata).

Seguono vari esempi ed esercizi in cui si chiede di determinare la parte intera della radice.

Nell'ultimo esempio si fa vedere come calcolare le cifre decimali.

Indice